GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLII

NUMĂRUL 1. — SEPTEMVRIE 1936

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

SUMARUL

1. Lista Membrilor Societăţii „Gazeta Matematică".
2. Membrii decedaţi.
3. Asupra unei descompuneri a puterilor neperechi. *Leonescu.*
4. Concursul „Gazetei Matematice" din 1937.
5. Premii, donaţii şi alte dispoziţii ale fondurilor Societăţii „Gazeta Matematică".
6. Note Matematice: 1 — 4.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 260.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 2354, 2598, 2701, 3593, 3639, 4190, 4428, 4469, 4505, 4535, 4544, 4604, 4646.
11. Exerciţii: 1 — 3.
12. Probleme propuse: 4708, 4711 — 4722.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1936

Acest număr conţine şi un supliment de patru pagini.

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 170, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 503, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 713, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3069, 81, 127, 61, 208, 55, 60, 98, 304, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 89, 522, 23, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65; 81, 82, 84, 99, 700, 33, 36, 93, 804, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 16, 20 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102. 11, 12, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 10, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 33, 37, 40, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 80, 84, 89, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 16, 26, 38, 45, 49, 52, 61, 64, 68, 73, 74, 79, 80, 81, 83, 84, 86, 87, 89, 90, 92, 98, 500, 03, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 22, 30, 31, 33, 34, 47, 50, 58, 59, 61, 78, 88, 90, 92, 93, 96, 98, 601, 02, 13, 15, 18, 30, 36, 41, 45, 47, 50, 57, 66, 70, 72, 75, 80, 83, 85, 86, 87, 88, 90, 92, 93, 94, 96, 97, 98, 703, 04, 06, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

„SUPLIMENTUL CU EXERCIȚII“

AL

GAZETEI MATEMATICE

ANUL III. Nr. 1.

ÎNCEPE SĂ APARĂ LA 1 OCTOMVRIE 1936

ABONAMENTUL ANUAL ESTE **50** LEI

ȘI SE TRIMITE D-LUI LT. C-DOR GR. ZAPAN

Casa „Gazeta Matematică“, Calea Griviței, 158.—București 2

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLII. No. 1. *SUPLIMENT* SEPTEMVRIE 1936

RECREAŢIUNI

1. **Numărul 11.** E unul din cele mai sărace în legende. Anticitatea, care diviniza unele numere, nu dedea nici o importanţă lui 11. Pitagoricianii nu spuneau nimic de el. In *Biblie* se găseşte numai ca diferenţă dintre 12 şi 1, ca de exemplu cei 11 fii ai lui IACOV fără IOSIF; cei 11 apostoli ai lui CRISTOS fără IUDA. Se vorbeşte în visul lui IOSIF de soare, lună şi 11 stele. Se mai vorbeşte de 11 ani, luna a 11-a, 11 covoare, 11 cetăţi, de ceasul al 11-lea. Atâta tot. Poeţii îl nesocotesc. Il găsim însă la EMINESCU: *«Că din cel ce câştigă 10 şi cheltueşte 11 şi cel ce câştigă 2 şi cheltueşte 1, acest din urmă este cel mai bogat şi cel d'intâiu sărac».*

I. I.

*

2. **Numărul nefast 13.** In ziua de 13 Iunie într'un magazin unui client i se dă un leu mai puţin. Acesta spune negustorului:

— Scuzaţi, mi-aţi dat restul numai 12 lei!

— Iertaţi-mă, credeam că sunteţi superstiţios!

V. C. POPESCU.

*

3. **Numărul 13 în Istoria Românilor.**

Influenţa Slavă a dispărut în secolul 13.

Vestita luptă a lui MIHAI VITEAZUL în contra Turcilor a avut loc la 13 August 1595.

CRIŞAN s'a sinucis în temniţă la 13 Februarie 1785.

MIHAI ŞUŢU ocupă tronul Muntenii la 13 Ianuarie 1793.

ION CARAGEA vine Domn în Muntenia la 13 Decemvrie 1812.

Lupta dintre Turci şi Pompieri în Dealul Spirei din Bucureşti a avut loc la 13 Septemvrie 1848.

REGELE FERDINAND I a domnit 13 ani.

M. S. REGELE CAROL II a venit în ţară la 7/6 1930, suma cifrelor din zi şi lună făcând 13 ca şi suma cifrelor anului.

M. UNGHEANU.

*

4. **Cifre care arată câte litere are cuvântul cu care ele se exprimă.** In limba română ar fi numai *cinci* şi cu oarecare bunăvoinţă *unusprezece.*

V. C. POPESCU.

*

5. **Numere în colindele ţăranilor.** Iată câteva exemple:

a) $\frac{1}{2}$. Pe plaiu de munte apucară şi suiră *jumătate.*

b) 5. Atunci ea împărţi vreo 5, La flăcăii cei voinici.

c) 2; 9. Lor li s'au înecat 9 corăbioare, Din cele 9 am scos numai 2.

d) 10; 11; 14. Abia ani 14 numărase la vârstra mea, când din fraţi-mi 11, cei 10 mă pizmuiau.

e) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$. Ca să-i iert din păcate, Din păcate *jumătate,* Din greşeli *a treia parte.*

C. C. POPOVICI.

*

6. **Cuvinte numai cu aceeaşi vocală repetată.** Cu 5 *a* avem cuvântul *abracadabrant;* cu 5 *e* avem cuvântul *elementele;* cu 7 *i* avem cuvântul *indivizibilii;* cu 3 *o* avem cuvântul *omolog;* cu 3 *u* avem cuvântul *tutunul;* cu 3 *ă* avem cuvântul *căpătă;* cu 2 *â* avem cuvântul *târât.* In limba română, sunt altele cu mai multe vocale repetate?

I. I.

*

7. **Muncă + cinste = sărăcie.** Se aude deseori vorbindu-se de o asemenea egalitate? Este ea oare posibilă?

Pentru a răspunde la această întrebare să încercăm să executăm adunarea presupunând că fiecare literă reprezintă o anume cifră. Adunarea se dispune astfel:

m u n c ă
c i n s t e
s ă r ă c i e

Privind la stânga vedem imediat că $s = 1$, $c = 9$, $ă = 0$. Inlocuind şi suprimând părţile comune dela sumă şi dela părţile ei, ne rămâne:

m u n 9 0
i n 1 t e
r 0 1 i e.

Cum t diferă de i, el nu poate fi de cât 7. In acest caz u nu poate fi decât 3. Inlocuindu-le şi simplificând găsim:

$$t = i + 1, \quad r + 10 = m + i + 1.$$

Pentru i nu au rămas decât valorile 2, 4, 5, 6, 8. Ele dau pentru t valorile 3, 5, 6, 7, 9. Din acestea nu au mai fost 5 şi 6, care vin dela $i = 4$ sau 5. In aceste cazuri a doua relaţie de mai sus devine:

$$r = m - 5, \text{ sau } r = m - 4$$

In primul caz egalitatea ar trebui să poată fi verificată cu două din numerele 2, 6, 8, ceea ce nu se poate; iar în al doilea cu două din numerele 2, 4, 8, ceea ce se poate luând $m = 8$ şi $r = 4$. Ne rămâne atunci să luăm $e = 2$. Avem prin urmare soluţia:

$$83\,780 + 957\,162 = 1\,040\,952.$$

AL. STOENESCU.

*

8. **Obişnuinţa.** Doctorul ascultând pe pacient îi spune:

— Zi de 3 ori 33.

— 99, fu răspunsul obşnuitului calculator.

GH. B.

*

9. **Pologlie numerică.** MACARIE, cronicarul lui PETRU RAREŞ, voind să arate în ce an a fost lupta dela Obertyn, spune:

„Era în anul ce se capătă dacă numeri de şapte ori câte o mie şi de cinci ori câte cinci şi câte cinci de cinci ori şi a opta rotaţie dela facerea lumii, iar dela naşterea lui Cristos 1550".

Nu era mai uşor de spus anul 7058 dela facerea lumii!

V. CRIVĂŢ.

*

10. **O socoteală bună.** In *«Ric et rac»* din 1/III 1930 găsim:

Băiatul Bancherului. — Mamă, mi-a venit o idee!

Mama. — Care?

Băiatul Bancherului. — Imprumută-mă cu 10 franci, dar să nu-mi dai de cât cinci. Cu modul acesta, eu îţi voiu datora 5 franci şi tu îmi vei datora de asemenea 5 franci, deci suntem chit!

V. C. POPESCU.

*

11. **Serie de patrate.** Avem:

$$1_{n-1}\,2\,8_{n-2}\,9\,6 = (3_{n-1}\,6)^2 \qquad n \geqslant 2$$

în care indicii arată de câte ori se repetă cifra la care sunt puşi. Patratele acestea se bucură de proprietatea că numărul format de ultimele n cifre $8_{n-2}\,96$ este multiplu al numărului format de primele n cifre $1_{n-1}\,2$. In cazurile particulare când $n = 2$ şi $n = 3$ se obţin patratele $1\,296 = 36^2$ şi $112\,896 = 336^2$ care au fost semnalate de D-l V. THÉBAULT în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXV, pag. 57.

I. B. F.

*

12. **Soluţii umoristice ale problemei 4559.** Problema cerea o proprietate caracteristică a numărului 40 în enunţul căreia să nu intervină, nici explicit, nici implicit, niciun număr. Iată aci câteva soluţii. Vom mai da în viitor şi altele:

a) Numărul 40 este numărul pe care M. S. REGELE CAROL II, cu ocaziunea Jubileului l'a predestinat ca *multiplicator* al jubileului.

b) Numărul 40 este numărul de litere din adresa propunătorului problemei:

„Domnul profesor inginer ION IONESCU. Bucureşti".

c) Numărul 40 este numărul nemuritorilor dela Academia franceză.

d) Numărul 40 este numărul de ani la care *unii* bărbaţi se socotesc *maturi*.

e) Numărul 40 este numărul de *primăveri* la care femeile se cred încă tinere şi frumoase şi pe care bărbaţii fini le consideră *«între două vârste»*.

AL. STOENESCU.

*

13. **Analiza nedeterminată la cazarmă.** Soldatul I. POPUŞOI a fost pedepsit cu 10 zile de carceră pentru că: „fără voie a plecat din cazarmă la o oră nedeterminată şi s'a înapoiat numai trei ore după aceea".

Bietul POPUŞOI s'a întrebat adesea în timpul celor 10 zile, ce i s'ar fi întâmplat dacă se înapoia după un număr nedeterminat de ore.

GH. B.

*

14. **Curiozitate aritmetică.** Un rezultat curios ni-l dă împărţirea lui 24 prin $(2+6)$. Putem împărţi mai întâiu pe 24 prin 2 şi apoi prin 6 şi după aceea să împărţim câturile găsite. Rezultatul este 3.

N. D. ROMEO.

Proprietatea nu este particulară lui 24 împărţit cu $(2+6)$. Soluţia generală este dată de $[k\alpha(\alpha+\beta)]:[(k\alpha\beta)+(k\beta^2)]$ în care $\alpha > \beta$ sunt primi între ei. Astfel pentru $\alpha = 5$ şi $\beta = 1$, cu $k = 7$ avem împărţirea $210:(7+35) = 5$, care se poate efectua şi astfel: $(210/7):(210/35) = 5$.

I. I.

*

15. **Papagali geometrici.** Nu e vorba de cei ce învaţă geometrie fără să o priceapă, ci de altceva. In *«Drumuri cu plopi»* de C. PETRESCU, la pag. 44 găsim:

„. . . a învăţat-o să coasă pe canava, cu lână verde, galbenă şi roşie, *papagali geometrici* cu pliscul încovoiat".

Autorul mai întrebuinţează matematicile şi în alte părţi. Aşa la pagina 113 găsim:

„. . . cu clăi de snopi în şiraguri *drepte, geometrice, paralele*".

M. A. CERNES.

*

16. **La un examen de Cosmografie.** Prof. — Ce este o eclipsă de soare?

Elevul. — Când luna trece între pământ şi soare.

Prof. — Dar eclipsa de lună.?!..

Elevul. — ?!

Prof. — Păi, D-ta nu poţi raţiona?

Elevul. — Da. Când soarele trece între pământ şi lună!.

N. M.

*

17. **Ampère.** Cu ocaziunea centenarului lui AMPÈRE din anul acesta repetăm o recreaţiune dată mai înainte în *Gazeta Matematică*.

O dorinţă mare are, || Ori şi care realist. || Ştiţi care-i? || E ca să vadă || pe a treia a Copertei || Forţa lui reprezentată || Prin A. N. P. E. R.!

GAZETA MATEMATICA

GAZETA MATEMATICA

FOAE LUNARA

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ȘI SPECIALE

PENTRU UZUL

ȘCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ȘI SUPERIOARE

VOLUMUL XLII

15 SEPTEMVRIE 1936 — 15 AUGUST 1937

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1936

LISTA MEMBRILOR
SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ”

DELEGAȚIUNEA PENTRU ANUL 1936 *)

GH. ILIESCU, A. IOANOVICI și AL. D. BUNESCU (Cassier)

PERSONALUL REDACȚIUNII „GAZETA MATEMATICĂ”

I. IONESCU. Membru delegat pentru: cereri, diverse și suplimente.
G. ȚIȚEICA și AL. PANTAZI. Raportori.
LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Membru delegat pentru: schimburi de reviste și primirea lor, recreațiuni, reclamațiuni privitoare la tipărire, primirea și repartizarea manuscriselor destinate *Gazetei Matematice*.
GH. ILIESCU. Membru delegat pentru convocările lunare.
Z. CONSTANTINESCU, U. FLORESCU, GH. ILIESCU și HAR. P. IONESCU. Membri delegați pentru corecturi și imprimarea revistei.
GENERAL GH. BUICLIU, O. ȚINO și LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru aritmetică elementară.
D. BARBILIAN, N. BOTEA, U. FLORESCU, ADR. GHEORGHIU, C. IONESCU-BUJOR și LT.-COMANDOR GH. NICULESCU. Membri delegați pentru geometrie elementară.
GH. TH. GHEORGHIU, COL. GH. LITEANU, O. ȚINO și GH. VASILIU. Membri delegați pentru trigonometrie.
TH. ANGHELUȚĂ, N. CIORĂNESCU, GH. TH. GHEORGHIU, HAR. P. IONESCU, C. IONESCU-BUJOR și M. SARIAN. Membri delegați pentru algebră elementară.
I. CHIȚULESCU și C. ORĂȘANU. Membri delegați pentru geometrie descriptivă.
U. FLORESCU, CR. MATEESCU, R. WOINAROSKI și LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru mecanică elementară.
GENERAL GH. BUICLIU și O. ȚINO. Membri delegați pentru geometrie analitică.
C. ORĂȘANU și A. PÂRVU. Membri delegați pentru cosmografie.
TH. ANGHELUȚĂ și M. GHERMĂNESCU. Membri delegați pentru probleme și note de matematici superioare.
TH. ANGHELUȚĂ, GH. TH. GHEORGHIU, D. V. IONESCU și P. SERGESCU. Membri delegați pentru probleme propuse de matematici superioare.
O. ȚINO. Membru delegat pentru clasarea problemelor propuse.
C. IONESCU-BUJOR. Membru delegat pentru exerciții.
N. ABRAMESCU, V. ALACI, N. BOTEA, MIRON NICULESCU, M. SARIAN și LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru chestiuni de examen.
GENERAL GH. BUICLIU și C. IONESCU-BUJOR. Membri delegați pentru alcătuirea tablei de materii.
ADR. GHEORGHIU, U. FLORESCU și LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru cercetarea prealabilă a soluțiilor primite dela corespondenți.
GH. TH. GHEORGHIU. Membru delegat pentru evidența problemelor publicate.
LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Bibliotecar.
I. S. ANTONIU, N. BOTEA, GENERAL GH. BUICLIU, N. CIORĂNESCU, GH. I. DUMITRESCU, U. FLORESCU, ADR. GHEORGHIU, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, HAR. P. IONESCU, C. IONESCU-BUJOR, LT. C. IONESCU-ȚIU, MAIOR I. LINTEȘ, COLONEL GH. LITEANU, AL. NICULESCU, LT.-COMANDOR GH. NICULESCU, O. ORĂNESCU, AL. PANTAZI, A. PÂRVU, AL. ROȘU, M. SARIAN, GH. D. SIMIONESCU, O. ȚINO, GH. VASILIU, R. WOINAROSKY și LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru cercetarea și redactarea problemelor rezolvate.

*) Societatea este administrată și reprezentată de o delegație alcătuită din doi membri și un cassier. (Art. 14 din Statute).

PERSONALUL REDACŢIUNII „SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII"

O. N. ŢINO. Membru delegat pentru clasarea exerciţiilor propuse.

C. IONESCU-BUJOR. Membru delegat pentru concentrarea soluţiunilor de publicat şi imprimarea „Suplimentului".

HAR. P. IONESCU. Membru delegat pentru corecturi.

LT. C. IONESCU-ŢIU. Membru delegat pentru totalizarea şi formarea tabelei de rezolvitori.

ADR. GHEORGHIU. Membru delegat pentru alcătuirea dosarelor de soluţiuni primite.

G-L GH. BUICLIU, N. BOTEA, U. FLORESCU, ADR. GHEORGHIU, GH. TH. GHEORGHIU, HAR. P. IONESCU, C. IONESCU-BUJOR, LT. C. IONESCU-ŢIU, MAIOR I. LINTEŞ, N. N. MIHĂILEANU, AL. AL. ROŞU, GH. D. SIMIONESCU, M. SARIAN, O. N. ŢINO şi LT. COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegaţi pentru exerciţii propuse.

MEMBRII

1	1922, Mart. 1*	ABASON ERNEST. Inginer-Şef. — Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. Doctor în Matematici.—Profesor şi Subdirector de studii la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Matei Voevod, 25. Bucureşti 4.
2	1907, Iulie 1	ABRAMESCU N. Doctor în Matematici.—Profesor la Universitatea din Cluj. — Str. V. Alecsandri, 3. Cluj.
3	1913, Oct. 7	ALACI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara.—Str. Traian Lalescu, 1. Timişoara.
4	1919, Sept. 12	ANGELESCU A. Doctor în Matematici. — Profesor Universitar. — Str. Frumoasă, 12. Bucureşti 2.
5	1921, Noem. 4	ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici.—Profesor la Universitatea din Cluj.— Str. Iuliu Maniu, 2. Cluj.
6	1934, Febr. 21	ANTONIU CORNELIU. Inginer-Şef. — Şef de serviciu tehnic. Direcţiunea Generală a Drumurilor M. L. P.— Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti.—Str. C. Disescu, 17. Bucureşti 2.
7	1928, Aug. 29	ANTONIU S. ION. Inginer Electromecanic, Diplomat de Şcoala Politehnică din Bucureşti. Inginer Electrician, Diplomat de Şcoala Superioară de Electricitate din Paris. — Inginer la Societatea de Gaz şi Electricitate din Bucureşti. — Str. Edgar Quinet, 6. Bucureşti 1. (Telefon 3-6315).
8	1931, Mart. 11	ARGHIRIADE EM. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Gimnaziul Ştefan Cel Mare. — Str. G. Enescu, 6. Iaşi.
9	1935, Febr. 13	ARMEANCA IOAN. Doctor în Matematici. — Astronom la Observatorul Astronomic Cluj. Profesor la Liceul Gh. Bariţiu Cluj.— Cluj, Universitate.
10	1921, Febr. 5	AVRAMESCU C. Inginer.— Şeful Serviciului judeţean de Drumuri Teleorman. — T. Măgurele.

*) Data admiterii.

11	1929, Aug. 28	BĂDESCU A. LUCA. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Director tehnic al Societăţii Comunale a Tramvaelor Bucureşti. Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Sos. Gh. Buzdugan, 38. Bucureşti 2.
12	1936, Febr. 27	BĂDESCU RADU. Doctor în Matematici şi Docent al Universităţii din Geneva.—Asistent al Seminarului de Matematici dela Universitatea din Cluj. Profesor suplinitor la Academia de Agricultură din Cluj. — Cluj.
13	1924, Aug. 29	BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos-Aires. Avenida de Abayo 560. Republica Argentina.
14	1911, Febr. 20	BANCIU I. Licenţiat în Matematici. — Directorul General al Casei de Depuneri şi Consemnaţiuni.—Str. Lucaci, 95. Bucureşti 3.
15	1927, Mai 11	BARBILIAN DAN. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar.— Str. Carol Davila, 8. Bucureşti 6.
16	1920, Ian. 10	BORNEANU GEORGE. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Academia de Arhitectură. Directorul Societăţii „Uzinele Chimice Române".—Str. Basarabia, 45. Bucureşti 2.
17	1932, Apr. 20	BOTEA NICULAE. Licenţiat în Matematici. — Calea Floreasca, 46. Bucureşti 3.
18	1935, Aug. 22	BOTEZ ST. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Profesor-Director la Liceul Comercial din Piatra-Neamţ. — Str. I. Gh. Duca, 15. Piatra-Neamţ.
19	1920, Aug. 15	BRATU GH. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. — Profesor de Astronomie şi de Calcul diferenţial şi integral la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. Directorul Observatorului Astronomic din Cluj.—Str. Observatorului, 4. Cluj.
20	1926, Iunie 28	BRENER M. AVRAM. Inginer.—Str. Viitorului, 22. Bucureşti 3.
21	1910, Iunie 21	BRUCKNER VICTOR. Inginer Inspector General. — Director Superior C. F. R.—Str. Ing. Pandele Ţăruşanu, 7. Bucureşti 2.
22	1935, Noem. 7	BUCURESCU I. Lt. din Reg. 2 Căi Ferate. Licenţiat în Matematici.— Profesor de Algebră şi trigonometrie la Şcoala de ofiţeri de Geniu. — Str. Costache Negri, 33. Bucureşti 6.
23	1920, Ian. 10	BUDEANU I. C. Inginer dela Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele din Bucureşti, Şcoala Superioară de Electricitate din Paris.— Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Str. Washington, 32. Parcul Bonaparte. Bucureşti 3.
24	1910, Apr. 3	BUICLIU GH. General din Artilerie.—Directorul Direcţiei Chimice Militare din Ministerul Armamentului. Însărcinat cu conferinţe la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". — Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 6.
25	1928, Mai 9	BUJOREANU N. Inginer Inspector General. — Inspector conducător C. F. R. — Str. Justinian, 17. Bucureşti 3.
26	1924, Ian. 30	BUNESCU D. AL. Inginer S. N. P. S. — Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului. — Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6. (Telefon 3-6033).

27	1930, Aug. 31	BUNGESCU ION. Maior de Artilerie. Absolvent al Şcoalei de Art. A. A. din Franţa (Metz).—Maior în Reg. 1 Art. A. A. — Aleea Suter, 21. Bucureşti 2.
28	1920, Ian. 10	BURADESCU TRAIAN. Inginer-Şef. — Inspector principal tehnic C. F. R. Şef de serviciu în Direcţia Mişcării.—Str. Petre Poni, 7, etaj I, Scara A. Bucureşti 2.
29	1930, Aug. 31	BUŞILĂ ADRIAN. Inginer. — Inginer în Direcţiunea Întreţinerii şi Lucrărilor Noui C. F. R.— Str. Vaselor, 40 B. Bucureşti 4.
30	1910, Oct. 25	BUŞILĂ D. C. Inginer de Poduri şi Şosele. Inginer Electrician.— Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Aleea Modrogan, 1. Bucureşti 3. (Telefon 2-4661).
31	1921, Mai 4	BUŞILĂ I. Inginer Inspector General.—Inginer în Ministerul Lucrărilor Publice.— Str. Dr. Lueger, 6 bis. Bucureşti 2.
32	1926, Iulie 28	CAMBUREANU V. D. Inginer.—Inginer la Casa Autonomă a Drumurilor de Stat.— Str. Virgiliu, 15. Bucureşti 2.
33	1914, Iulie 12	CAMBUREANU V. Inginer Inspector General.— Subdirector General al Casei Muncii C. F. R.—Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti 2.
34	1921, Noem. 4	CAPRIEL I. Inginer-Şef. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti.—Administrator-Delegat al Societăţii „România Carboniferă", al Societăţii „Construcţiunea". — Str. Visarion, 5. Bucureşti 3.
35	1936, Noem. 7	CARAFOLI ELIE. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat şi Doctor în Ştiinţe dela Sorbona.—Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". — Str. Popa Savu, 42. Bucureşti 2.
36	1920, Mart. 1	CARAMAN E. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „V. Alecsandri" din Galaţi.—Str. Lascar Catargi, 40. Galaţi.
37	1936, Febr. 27	CARTIANU GH. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". Antreprenor. — Str. Popa Tatu, 81. Bucureşti 2.
38	1928, Aug. 29	CASSIAN GH. Lt.-Colonel din Artilerie. — Ajutor de comandant la Reg. 41 Artilerie Braşov.— Str. Regina Maria, 13. Braşov.
39	1920, Ian. 10	CAZACU N. C. Inginer-Şef.— Inspector de Mişcare C. F. R. — Str. Sf. Ilie, 2 bis. Galaţi.
40	1935, Apr. 10	CHIRICESCU V. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti.— Inginer în Regia Autonomă C. F. R. — Str. Italiană, 30. Bucureşti 1.
41	1914, Dec. 20	CHIRICUŢĂ A. Inginer Inspector General.—Administraţia Comercială a porturilor şi căilor de comunicaţie pe apă. — Str. Oţetari, 8. Bucureşti 1.
42	1920, Mart. 1	CHIŢULESCU I. IOAN. Inginer-Şef.—Direcţia Specială a Atelierelor C. F. R. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.—Str. I. Căpitanu, 44. Bucureşti 4.
43	1921, Febr. 5	CIOC M. Inginer.—Administrator industrial. Antreprenor de lucrări publice şi particulare. — Str. Gr. Cantacuzino, 14. Bucureşti 1.
44	1930, Aug. 31	CIORĂNESCU NICOLAE. Doctor în Matematici din Paris. Licenţiat în Fizico-Chimice.—Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Pomul Verde, 12. Bucureşti 2.

45	1933, Aug. 31	CONSTANTINESCU GH. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti.—Inginer la Societatea A. E. G. — Str. B. Musolini, 22/II. Bucureşti 3.
46	1895, Sep. 15* (fondator)	CONSTANTINESCU TANCRED. Inginer Inspector General.— Senator. Fost Ministru.—Aleea Vulpache, 7 (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
47	1932, Apr. 20	CONSTANTINESCU ZAHARIA. Inginer, Diplomat dela Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Inginer ordinar cl. II. Conducătorul Imprimeriei C. F. R. Asistent suplinitor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". — Imprimeria C. F. R. Bucureşti-Sud.
48	1936, Febr. 27	COŞEREANU ION. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Timişoara. — Inginer în Biroul de studii Avioane al Uzinei I. A. R. din Braşov. — Fabrica de avioane I. A R. Braşov.
49	1910, Apr. 3	COSTINESCU DAN. Inginer. — Director General al Fabricii de Hârtie „Letea". — Fabrica de hârtie „Letea". Bacău.
50	1936, Aug. 25	DĂSCĂLESCU HR. Licenţiat în Matematici. — Str. Vârful cu Dor, 12. Bucureşti 3.
51	1936, Febr. 27	DROSESCU GH. ION. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Charlottenburg. — Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". — Str. Belgrad, 2. Bucureşti 3.
52	1922, Mart. 1	DUMITRESCU ARG. D. Inginer-Şef. — Inspector tehnic C. F. R.— Str. Principele Nicolae, 32. Craiova.
53	1922, Noem. 1	DUMITRESCU I. GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Mihai Vitezul", Bucureşti. — Str. Sf. Elefterie, 52. Bucureşti 6.
54	1936, Febr. 27	DUMITRESCU C. I. Inginer Electromecanic dela S. P. B. — Asistent la „Rezistenţa Materialelor" la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Inginer la Direcţiunea Economatului C. F. R. — Str. Temişana, 42/II. Bucureşti 2.
55	1918, Ian. 28	FELIX CORNELIU. General de Brigadă în rezervă. — Str. G. D. Palade, 72. Bucureşti 3.
56	1909, Iulie 1	FILIPESCU EM. GH. Inginer. — Director General al Soc. Comunale a Tramvaelor Bucureşti. Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.—Str. Vasile Lascăr, 216. Bucureşti 3.
57	1935, Apr. 10	FLORESCU M. ULPIU. Inginer-constructor, Diplomat al Şcolii Politehnice din Bucureşti. — Sub-şef de secţie la Dir. Podurilor, Construcţiilor şi Lucrărilor noi (D) C. F. R. — Calea 13 Septemvrie, 22, Bucureşti 6.
58	1929, Ian. 31	FOCŞENEANU I. MIHAIL. Lt. de Artilerie. Licenţiat în Matematici. Elev Şcoala Superioară de Războiu. — Str. Th. Aman, 8. Bucureşti 2.
59	1928, Mai 9	FUNDĂŢEANU C. ION. Inginer, Diplomat E. P. Z. — Director General al Oficiului Central de Licitaţii din Ministerul Finanţelor. — Aleea N. Ionescu, 3 (Parcul Delavrancea). Bucureşti 2.
60	1921, Mai 4	GABRIELESCU RAMIRO. Inginer. — Str. Dionisie, 19. Bucureşti 1.
61	1914, Dec. 20	GÂLCĂ I. TOMA. Inginer. Fost Secretar General al Ministerului de Lucrări Publice şi Comunicaţii fost Preşedintele Regiei P. C. A. — Profesor la Şcoala Superioară de Războiu. — Str. Wilson, 13, etaj II, apart. 7. Bucureşti 1.

*) Data fondării revistei „*Gazeta Matematică*". Societatea Gazeta Matematică a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

62	1906, Mart. 4	GEORGESCU I. N. Inginer Inspector General. Directorul General al Serviciului de Indiguiri şi Desecări. — Str. G. D. Palade, 35. Bucureşti 3.
63	1921, Febr. 5	GEORGESCU N. N. Inginer.—B-dul Elisabeta, 24. Bucureşti 1.
64	1927, Mai 11	GEORGESCU-ROEGEN N. Licenţiat în Matematici. Diplomat al Institutului superior de Statistică din Paris. — Secretar al Institutului de Statistică Generală a Statului. Profesor la Şcoala de Statistică.—Str. Pescari, 1 bis. Bucureşti 4.
65	1934, Dec. 19	GEORGESCU-VAL. N. ION. Căpitan de Artilerie. Inginer Electro-Mecanic, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Timişoara.—Membru în Comisia de recepţie „Schneider". — Rue H. Fenoux, 6. Le Havre. France.
66	1936, Febr. 27	GHEORGHIU C. ADR. Licenţiat în Matematici. — Str. Gh. Barițiu, 4. Bucureşti 2.
67	1932, Apr. 20	GHEORGHIU TH. GH. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Parcul Ianculul. Şos. Vatra Luminoasă, 5. Bucureşti 4.
68	1914, Ian. 8	GHEORGHIU S. I. Inginer-Şef. — Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Lahovary, 3. Bucureşti 3.
69	1913, Aug. 30	GHEORGHIU A. MIRCEA. Inginer Inspector General. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Subdirectorul Navigaţiei Fluviale Române. — Str. Vasile Lascăr, 111. Bucureşti, 3.
70	1929, Aug. 28	GHEORGHIU A. ŞERBAN. Doctor în Ştiinţele Matematice. Diplomat al Institutului de Statistică al Universităţii din Paris. — Director în Ministerul de Finanţe. — Str. Robert de Flers, 3. Bucureşti 3.
71	1922, Aug. 31	GHERMĂNESCU N. MIHAIL. Doctor în Matematici.—Conferenţiar la Şcoala Politehnică din Timişoara.—Str. Popa Nan, 79. Bucureşti 4.
72	1921, Mai 4	GHIMUŞ D. A. Maior. Inginer Radio-electrician. E. S. E. — Şeful Serviciului Radio M. St. M.—Str. Chişinău, 12. Bucureşti 2.
73	1936, Aug. 25	GHIŞOIU I. PETRE. Inginer. — Str. Răspântiilor, 17. Bucureşti 3.
74	1931, Mart. 11	GHIŢESCU VIRGIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Dr. Ioan Meşotă„ din Braşov.—Str. Ing. Iul. Kertsch, 8. Braşov.
75	1910, Iunie 21	GRIGORESCU C. Inginer. — Antreprenor de lucrări publice. — Str. Plantelor, 40. Bucureşti 4.
76	1936, Febr. 27	GUŢU AL. Inginer.—Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". Referent la Ministerul de Industrie. — Str. Sevastopol, 11 C. Bucureşti 2.
77	1920, Ian. 10	GUTZU VICTOR. Inginer. — Parcul Filipescu. Str. Andrei Mureşanu, 23. Bucureşti 3.
78	1927, Ian. 28	HANGANU D. M. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti şi al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris. — Inginer la C. A. M. Asistent la Şc. Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.—Str. Logofătul Nestor, 2. Bucureşti 6.
79	1924, Ian. 30	IANCULESCU ROMULUS. Inginer-Şef — Licenţiat în Matematici. — Str. Petre Poni, 7. Bucureşti 2.

80	1922, Maiu 10	ILIESCU GH. Inginer-Şef. — Directorul Fabricei de Chibrituri-Filaret. — Fabrica de Chibrituri-Filaret. Bucureşti 6.
81	1895, Sept. 15 (fondator)	IOACHIMESCU GH. ANDREI. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici.— Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Str. Buzeşti, 76. Bucureşti 2.
82	1926, Iunie 28	IOACHIMESCU A. GH. Inginer.— Directorul Fabricei de Timbre.— Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6.
83	1920, Ian. 10	IOANOVICI AUREL. Inginer.— Antreprenor.— Str. Paris, 28. Bucureşti 3.
84	1922, Noem. 1	IONESCU V. D. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris.—Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Cluj.—Str. Iuliu Maniu, 2. Cluj.
85	1936, Febr. 27	IONESCU P. HARALAMBIE. Licenţiat în Matematici. — Str. Matei-Voevod, 65. Bucureşti 4.
86	1895, Sept. 15 (fondator)	IONESCU I. Inginer Inspector General.— Membru corespondent al Academiei Române. Membru în Consiliul tehnic Superior. Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Str. Căluşei, 23. Bucureşti 4.
87	1933, Febr. 22	IONESCU-BUJOR C. Licenţiat în Matematici. — Str. Maior Popescu Gh., 26 (Parcul Ianculuí). Bucureşti 4.
88	1936, Febr. 27	IONESCU-ŢIU C. Lt. din Geniu. — Str. Popa Tatu, 17. Bucureşti 2.
89	1932, Apr. 20	IONESCU-ZANE D. GH. Inginer.—Şeful Serv. Aprovizionărilor din Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. — Str. Popovici, 38. Parcul Delavrancea. Bucureşti 3.
90	1936, Febr. 27	ISTRATI CONSTANTIN. Căpitan-Inginer, diplomat al Şcoalei Superioare de Aeronautică din Paris. — Preşedintele Comisiei de control a Subsecretariatului de Stat al Aerului la Uzinele I. A. R. din Braşov. — Braşov.
91	1912, Iunie 2	JIJIE ADAM. Căpitan-Comandor în rezerva Marinei. Licenţiat în Ştiinţe. Inginer electrician.— Concesionarul luminatului electric şi al alimentării cu apă din Sulina.— Sulina.
92	1924, Ian. 30	KAUFMAN N. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele—Şef de Serviciu în Direcţiunea Generală C. F. R.— Str. G-ral Manu, 26. Bucureşti 2.
93	1936, Febr. 27	LAMOTH PETRU. Licenţiat în Fizico-Matematici. — Profesor la Liceul „Banaţia". — Piaţa Tebec, 2. Timişoara.
94	1931, Aug. 28	LAZU CONST. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul Monetăriei Naţionale. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.—Str. Sf. Elefterie, 19. Bucureşti 6.
95	1934, Dec. 19	LEONIDA D-TRIE. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Str. Salcâmilor, 9. Bucureşti 3.
96	1919, Sept. 12	LINTEŞ ION. Maior de Artilerie. Inginer aeronautic.—Însărcinat cu conferinţe şi Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". Director Tehnic al Aeronauticei. — Str. Epicol, 49. Bucureşti 6.

97	1921, Mai 4	LITEANU I. GH. Colonel de Artilerie.— Marele Stat Major General al Armatei. — Str. I. L. Garagiale, 30 A. Bucureşti 1. (Telefon 2-0940).
98	1935, Aug. 22	LIVADA F. GRIGORE. Licenţiat în Matematici.—Profesor secundar.— Liceul militar „D. A. Sturdza". Craiova.
99	1934, Dec. 19	MALAXA ELENA. Profesoară de Matematici.—Str. Aurel Vlaicu, 36. Bucureşti 3.
100	1934, Dec. 19	MALAXA N. Inginer. — Industriaş. — Aleea Alexandru, 38. (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
101	1913, Aug. 30	MALCOCI C. Inginer Inspector General. — Str. Pia Brătianu, 4. Bucureşti 3.
102	1934, Febr. 21	MANAFU VALERIU. Inginer, Diplomat al Şcoalei Centrale de Arte şi Manufacturi din Paris.—Inginer la Uzinele Reşiţa.—U. D. R. Reşiţa.
103	1926, Iunie 28	MANOILESCU MIHAIL. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Mare industriaş. — Str. Mussolini, 27. Bucureşti 3.
104	1932, Apr. 20	MĂRĂCINE B. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul Imprimeriei Naţionale. — Str. Lânăriei, 80. Vila 26, Bucureşti 6.
105	1921, Febr. 5	MAREŞ T. Inginer-Şef.—Direcţia Generală a Drumurilor. — B-dul Bonaparte, 20 (Alee). Bucureşti 3.
106	1922, Mai 10	MATEESCU CR. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Subdirector la Soc. „Electrica" Bucureşti.—Calea Dorobanţilor, 1. Vila B. Bucureşti 3.
107	1927, Mai 11	MEREUŢĂ V. Inginer. — Subdirector Direcţiunea de Întreţinere C. F. R.— Str. Dan Vodă, 3. Bucureşti 2.
108	1935, Noem. 5	MIHĂILEANU N. N. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Moise Nicoară" din Arad.—Arad.
109	1929, Ian. 31	MIHĂILESCU P. TIBERIU. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoala Comercială din Ploeşti. — Str. Dionisie Eclesiarhul, 15. Bucureşti 2.
110	1921, Febr. 5	MIHALOPOL C. Inginer Inspector General. — Subdirector General al Administraţiei Comerciale a Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe Apă. — Splaiul Independenţei, 63. Bucureşti 6.
111	1925, Febr. 11	MIRCEA M. E. Inginer.— Inginer-Şef la Societatea „Concordia".— Gura Ocniţei, Jud. Dâmboviţa.
112	1934, Dec. 19	MIRESCU PETRE. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „N. Bălcescu" din Brăila. — Str. Galaţi, 71. Brăila.
113	1929, Aug. 28	MITESCU CAMIL. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul Serviciului Exploatării Fabricelor la Casa Autonomă a Monopolurilor. — Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti 3.
114	1920, Ian. 10	MITITELU C. CLAUDIU. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Director de Serviciu în Adm. Centrală a Casei Autonome a Monopolurilor. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Piaţa Lahovari, 1 A. Bucureşti 3.
115	1920, Ian. 10	MITITELU C. I. Inginer. — Intreprinzător de lucrări publice. — Str. Ciprian Porumbescu, 11. Bucureşti.

116	1932, Febr. 21	NEAMȚU PETRE. Inginer.—Director S.T.B. Asistent la Școala Politehnică „Regele Carol II" din București. — Str. Roma, 59. București 3.
117	1928, Aug. 29	NEGURĂ ST. Licențiat în Matematici dela Universitatea din București. — Profesor cu titlu definitiv la Liceul „Codreanu" din Bârlad.— Str. Lascăr Catargiu, 63. Bârlad.
118	1936, Aug. 25	NESTOR D-TRU. Inginer.— Str. V. Stroescu, 10. București.
119	1910, Mai 21	NICHIFOR A. G. Doctor în Științele Matematice. — Profesor la Facultatea de Științe din București și la Școala de Arhitectură București.— Str. Magheru, 62. București 2.
120	1934. Dec. 19	NICOLAU AL. Inginer. — Profesor. — Școala Politehnică Timișoara.
121	1929, Aug. 28	NICOLAU H. CONSTANTIN. Inginer-industrial, Diplomat al Școalei Politehnice din București 1923.— Directorul tehnic al Societății „Letea".—Fabrica de hârtie „Letea". Bacău.
122	1921, Noem. 4	NICOLAU T. M. Inginer Inspector General. — Director al Direcțiunii Tehnice din Ministerul Lucrărilor Publice și al Comunicațiilor. Profesor la Școala de Conductori de Lucrări Publice din București.— Str. Ecoului, 85. București 6.
123	1931, Mart. 11	NICULESCU V. ALEX. Licențiat în Matematici.—Profesor la Liceul „Mihail Eminescu" din București.— Str. Izvor, 98. București 6.
124	1920, Oct. 28	NICULESCU CRISTEA. Inginer Șef.— Președintele Comisiei de control C. F. R. — Str. Londra, 35. București 3.
125	1923, Iulie 4	NICULESCU V. GHEORGHE. Diplomat al Școalei Politehnice Timișoara și al Școalei Superioare de Aeronautică din Paris. — Locot.-comandor inginer. — Str. Izvor, 98. București 6.
126	1929, Ian. 31	NICULESCU MIRON. Fost elev al Școalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Științele Matematice dela Sorbona. — Profesor la Facultatea de Științe din Cernăuți. — Seminarul Matematic Cernăuți și Str. Paris, 14. București 3.
127	1934, Dec. 19	NICULESCU IOAN RADU. Comandor de Marină (în rezervă). — Profesor (particular) de Matematici și Fizică. — Str. Puțul de Piatră, 8. București 3.
128	1922, Mart. 1	ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Științe din București. Director al Institutului Superior de Educație Fizică. Director al Școalei de Statistică. — Str. Rozelor, 9. București 6.
129	1927, Ian. 28	ORĂNESCU O. Inginer-Șef cl. I. Diplomat al Școalei Politehnice din București, Secția Electro-Mecanică. — Șef de Serviciu la Navigațiunea Fluvială Română, Galați. — Str. Bolintineanu, 2. Galați.
130	1913, Oct. 7	ORĂȘANU D. CEZAR. Inginer, Diplomat al Școalei Naționale de Poduri și Șosele. Inginer Cadastral Școala Politehnică. Inginer Hotarnic și Operator Topometru. Licențiat în Matematici.—Conferențiar titular la Școala Politehnică „Regele Carol II" din București la cursul de Construcții Generale. Profesor suplinitor la cursul de Topografie și Geodezie. — Str. Sfinții-Voievozi, 9 București 2.

131	1910, Mai 21	ORĂŞANU GR. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Gh. Lazăr" din Bucureşti. — Str. Popa Nan, 19. Bucureşti 4.
132	1914, Dec. 20	PANAITESCU SC. General de Divizie în retragere. — Conferenţiar Universitar. Membru corespondent al Academiei Române.—Str. Călăraşi, 9. Iaşi.
133	1929, Ian. 31	PANTAZI ALEXANDRU. Doctor în Matematici. Actuar-Expert. Redactor Statistic.—Profesor la Şcoala de Statistică. Asistent Universitar. Inspector actuar la Ministerul de Industrie şi Comerţ.— Str. Al. Lahovary, 9. Bucureşti 3. (Telefon 3-4305).
134	1932, Aug. 24	PÂRVU AUREL. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat în Matematici. — Inginer C. F. R.— Str. Edgar Quinet, 5. Bucureşti 1. (Telefon 4-6329).
135	1920, Oct. 28	PHILIPIDE M. Inginer. — Director General al Societăţii Anonime Române de Navigaţie pe Dunăre S. R. D. — Str. Radu-Vodă, 25. Bucureşti 5.
136	1936, Febr. 27	POPESCU N. CORNELIU. Licenţiat în Matematici.—Profesor Titular de Matematici la Liceul Comercial de băeţi din Giurgiu — Str. Bateriilor, 56. Giurgiu.
137	1922, Aug. 31	POPESCU ION. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele.— Director la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Str. Popa Savu, 12 A. Bucureşti 2.
138	1935, Apr. 10	POPESCU VICTOR. Inginer Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti. Asistent Şcoala Politehnică „Regele Carol II". — Str. Argentina, 44. Bucureşti 3.
139	1934, Dec. 19	POPESCU-BOTOŞANI G. Inginer la Subsecretariatul de Stat al Aerului Uzinele I. A. R. Braşov. — Str. General Berthelot, 65. Bucureşti 1.
140	1928, Mai 9	POPOVICIU TIBERIU. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar.— Seminarul de Matematici. Cernăuţi.
141	1931, Mart. 11	POPP N. Lt.-Comandor. Inginer. Subsecretariatul de Stat al Aerul lui. — Str. Alecu Russo, 7. Bucureşti.
142	1927, Mai 11	POPP TRAIAN. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Seminaru-Pedagogic Universitar şi la Co egiul Naţional „Sf. Sava". — Parcul Delavrancea. Aleea D, 2. Bucureşti 2.
143	1929, Ian. 31	PORTOCALĂ MIHAIL. Inginer-Antreprenor.—B-dul Basarab (Alee), 9. Bucureşti 2.
144	1930, Aug. 31	POTOPEANU GHEORGHE. Colonel. — Comandantul Regimentului 2 Artilerie. — Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 6.
145	1935, Apr. 10	PRAPORGESCU N. Licenţiat în Matematici.—Director general al Casei generale de pensiuni.—Str. Aviator Sănătescu, 28. Bucureşti 2.
146	1925, Febr. 11	PROTOPOPESCU GRIGORE. Colonel de Artilerie. — Str. Ana Davila, 25. Bucureşti 6.
147	1927, Mai 11	RACLIŞ RODOLPHE. Doctor în Ştiinţele Matematice dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Licenţiat în Ştiinţele Fizice dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. — Inginer Diplomat al Şcolii Superioare de Electricitate din Paris. — Directorul Institutului Matematic Român. Profesor Bucureşti. — Aleea Vulpache, 21 (Parcul Filipescu). Bucureşti 3. (Telefon 2-2444).

148	1920, Aug. 15	REVICI TEOFIL. Inginer S. N. P. S. — Inginer-Şef în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. Gr. Cantacuzino, 59. Bucureşti 2.
149	1933, Febr. 22	ROŞU AL. AL. Licenţiat în Matematici şi Drept dela Universitatea din Bucureşti. — Controlor financiar. — Str. Inginer Giulini, 9. Bucureşti 6.
150	1914, Dec. 20	ROŞU V. Inginer Inspector General. — Directorul Serviciului Hidraulic. — Calea Victoriei, 2. Bucureşti 1.
151	1929, Aug. 28	SĂLĂGEANU AUREL. Inginer. — Director tehnic în Direcţiunea Generală a Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului. — Şos. Viilor, 7. Bucureşti 6
152	1904, Sept. 1	SALIGNY M. Inginer Inspector General. — Subdirectorul Serviciului Hidraulic, Ministerul Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor. — B-dul Elisabeta, 27. Bucureşti 2.
153	1920, Ian. 10	SĂPUNARU S. GH. Inginer de Poduri şi Şosele. — Director General al Societăţii „Clădirea Românească". — Str. Pia Brătianu, 5. (Parcul Ioanid). Bucureşti 3.
154	1929, Aug. 28	SARIAN MIHAI. Inginer. — Referent la Direcţiunea Atelierelor C. F. R. Griviţa. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Columb, 7. Bucureşti 3.
155	1935, Aug. 22	SCHILERU-DILI C. ION. Inginer-Mecanic-Electrician. — Conferenţiar la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Directorul Şcoalelor P. T. T. — Palatul P. T. T. — Timişoara.
156	1920, Aug. 15	ŞERBĂNESCU GH. VICTOR. Inginer. — Inginer la Consiliul tehnic Superior. — Str. Paleologu, 3. Bucureşti 4.
157	1928, Aug. 29	SERGESCU BARBU. Inginer dela Şcoala de Mine din Paris. Licenţiat în Matematici. Licenţiat în Drept. — Inginer la Societatea „Steaua Română". Str. Lahovary, 12. Câmpina.
158	1919, Sept. 12	SERGESCU PETRE. Doctor în Matematici. Licenţiat în Filosofie. — Profesor la Universitatea din Cluj. Membru al Academiei Internaţionale de Istoria Ştiinţei (Paris), al Academiei Masaryk (Praga). Corespondent al Societăţii de Ştiinţe din Varşovia şi al Societăţii Regale de Ştiinţe din Liège. Laureat al Academiei de Ştiinţe din Paris şi al Academiei Române. — Str. Berde, 3. Cluj.
159	1921, Febr. 5	SFINŢESCU I. CINCINAT. Inginer Inspector General. — Profesor la Academia de Arhitectură. Director General Tehnic la Municipiul Bucureşti. — Str. Barbu Delavrancea, 43. Bucureşti 2.
160	1934, Mai 2	SIMIONESCU D. GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — Str. C. A. Rosetti, 46. Bucureşti 1.
161	1910, Aug. 3	SMĂNŢÂNESCU AUREL. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Inginer Inspector General în Corpul Tehnic al Statului. Subdirector General la Direcţia Generală a Drumurilor. — Str. Sf. Ştefan, 23. Bucureşti 4.
162	1933, Aug. 31	STAMATESCU I. GH. Inginer — Subdirector Direcţia Controlului C. F. R. — Str. G-ral Lahovary, 87. Bucureşti 3. (Telefon 2-3575).
163	1923, Iulie 4	STAMATESCU I. Profesor la Liceul Mateiu Basarab şi Seminarul Pedagogic Universitar. — Str. Toamnei, 47. Bucureşti 3.

164	19.0, Ian. 10	STAN D. Inginer.—Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Inginer la Soc. Anonimă Română de Telefoane — Aleea Mântuleasa, 1. Bucureşti 4.
165	1934, Mai 2	STOICA V. DUMITRU. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. - Directorul Societăţii de locuinţe ieftine Bucureşti.—Str. Veronica Micle, 2. Bucureşti 2.
166	1936, Aug. 25	STOICESCU T. T. Licenţiat în Matematici.— Profesor la Liceul din Dorohoi. — Dorohoi.
167	1927, Mai 11	TĂNĂSESCU A. General. — Inspectorul G-ral Tehnic al Armatei.— Str. Gr. Cantacuzino, 54. Bucureşti 2.
168	1928, Mai 9	TĂNĂSESCU A. TUDOR. Inginer. Licenţiat în Matematici.—Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Str. Salvator, 37. Bucureşti 6.
169	1900, Noem. 1	TEODOREANU V. Pensionar. — Str. Zlataust, 7. Iaşi.
170	1934, Mai 2	TEDORESCU C. C. Inginer-Şef. — Profesor şi Rector al Şcoalei Politehnice din Timişoara.
171	1911, Mai 18	TEODORESCU V. N. Inginer Inspector General.—Fost Ministru.— Str. Paris, 53. Bucureşti 1.
172	1910, Mai 21	THIERRIN H. G. Licenţiat în Matematici. — Directorul Institutului „Schewitz-Thierrin".—Str. Scaune, 33. Bucureşti 1.
173	1921, Aug. 31	ŢINO O. Doctor în Matematici. — Profasor la Şcoala Politehnică din Timişoara.—Str. Ismail, 16. Bucureşti 4.
174	1929, Oct. 30	TIŢEICA GABRIELA. Licenţiată în Matematici. Inginer.—Asistentă la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti.—Str. Dionisie, 80. Bucureşti 3.
175	1895, Noem. 1	ŢIŢEICA GH. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Secretar General al Academiei Române. Profesor la Facultatea de Ştiinţe şi la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Profesor agreat la Sorbona.—Str. Dionisie, 80. Bucureşti 3.
176	1936, Febr. 27	TOMESCU ST. IOAN. Inginer.—Intrarea Geneva, 4. Bucureşti.
177	1919, Sept. 12	ULESCU AL. Inginer. — Directorul Uzinelor I. A. R. — Str. M. Eminescu, 4. Braşov.
178	1935, Noem. 5	VÂLCOVICI V. Doctor în Ştiinţele Matematice.—Profesor de Mecanică la Universitatea din Bucureşti.—Str. Londra, 44. Bucureşti 3.
179	1914, Dec. 20	VARDALA I. Inginer Inspector General. Diplomat al Şcoalei Centrale de Arte şi Manufacturi din Paris. — Director General al Administraţiei Comerciale a Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe Apă. — Str. Wilson. 13 etaj 4. Bucureşti 1.
180	1927, Mai 11	VASILACHE I. Inginer-Şef. — Profesor şi Subdirector al Şcoalei Superioare de Arte şi Meserii din Bucureşti. — Str. Polizu, 11. Bucureşti 2.
181	1923, Mart. 26	VASILESCU GR. Inginer.—Inginer-Şef. Doctor al Academiei de Inalte Studii Comerciale şi Industriale din Bucureşti.—Subdirector la Serv. Maritim Român. Asistent şi Profesor suplinitor la Catedra de Navigaţie interioară şi maritimă dela Şcoala Politehnică din Bucureşti.—Str. Lt. Aviator Drossu, 4. (Parcul Domeniilor), Bucureşti 2.
182	1920, Ian. 10	VASILESCU C. I. Inginer-Şef.—Str. Aviator Ştefan Protopopescu, 36. Bucureşti 2.

183	1932, Apr. 20	VASILIU GH. DAN. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti.—Inginer la Monitorul Oficial.—B-dul Schitu Măgureanu, 47. Bucureşti 1. (Telefon 3-6332).
184	1933, Febr. 22	VASILIU GH. Inginer de mine şi geodez. — Antreprenor autorizat de Direcţia Cadastrului pentru Geodezie, Cadastru şi Comasare. Asistent supl. la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Cartierul Grant C. F. R. Str. D, 51. Bucureşti 2.
185	1925, Aug. 26	VASILIU M. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Director în Ministerul Industriei şi Comerţului. — Str. Vaselor, 70. Bucureşti 4.
186	1936, Febr. 27	VICIU A. A. Licenţiat în Matematici.— Profesor la Liceul Militar din Tg.-Mureş.— Str. Aug. Tr. Laurian, 7. Tg.-Mureş.
187	1933, Febr. 22	WOINAROSKY R. Licenţiat în Matematici.—Str. Manu Cavafu, 16. Bucureşti 5.
188	1924, Ian. 30	ZAMFIRESCU C. GRIGORE. Inginer, Diplomat S. N. P. S. Bucureşti 1920 şi E. S. A. Paris 1921.—Proprietarul fabricei de avioane „SET".— Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — B-dul Ferdinand, 168. Bucureşti 4. (Telefon 2-3666 domiciliu, 2-5074 birou).
189	1920, Sept. 28	ZAPAN GH. Doctor în Filosofie dela Universitatea din Berlin. — Conferenţiar la Facultatea de Litere şi Filosofie din Bucureşti Str. Maior Ene, 12. (O. N. E. F). Bucureşti 6.
190	1921, Mai 4	ZAPAN GRIGORE. Lt.-Comandor Aviator. Inginer diplomat al Şcoalei Superioare de Aeronautică şi Construcţii Mecanice (E. S. A.) din Paris. — Ofiţer de ordonanţă-Adjutant al A. S. R. Principelui Nicolae. — Casa „Gazeta Matematică". Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2. (Telefon 4-3929).
191	1925, Aug. 26	ZLATCU ST. C. Inginer-mecanic dela Şcoala Politehnică din Zürich.— Antreprenor. — B-dul Elisabeta, 57. Bucureşti 2.

†

MEMBRII DECEDAŢI *)

	Data admiterii	Data morţii
1. ALEXANDRESCU T. I.	1928 Mai 9	1930 Sept. 5
2. DORDEA TR.	1928 Ianuarie 26	1930 Apr. 30
3. MIREA N. ŞT.	1909 Iunie 1	1932 Ian. 15
4. NĂSTURAŞ D.	1909 Noemvrie 9	1930
5. PATRICIU G. TITUS	1911 Decemvrie 17	1931 Ian. 5
6. ROCO M.	1895 Sept. 15 (fondator)	1931 Ian. 5

*) Aci sunt trecuţi în ordinea alfabetică numai redactorii şi membrii decedaţi în ultimii 7 ani şi cari au stat la „*Gazeta Matematică*" până la sfârşitul vieţii lor.

ASUPRA UNEI DESCOMPUNERI A PUTERILOR NEPERECHI*)

Să facem un *Triunghiu al lui* PASCAL echilateral răsturnat ABC. La stânga lui AC punem un triunghiu de nule DEF, reprezentând C_m^{m+n} şi C_0^m. Mai la stânga putem aşeza triunghiul combinărilor negative C_{-m}^n. Partea aceasta o voiu desvolta altă dată; aci indic numai posibilitatea acestei extensiuni.

F				E	C						
0	0	0	0	0	1						
	0	0	0	0	1	8	. . . . .				C_m^7
0	0	0	0	1	7	26	. . . . .				. .
	0	0	0	1	6	21	56	. . . . .			C_m^5
0	0	0	1	5	15	35	70	. . . . .			. .
	0	0	1	4	10	20	35	56	. . . . .		C_m^3
0	0	1	3	6	10	15	21	28	. . . . .		. .
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	. . . .	C_m^1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	. . .	C_m^0
D	A							B			

Vom numi *bază* numărul care se ridică la o putere. Iată câteva descompuneri ale puterilor bazelor 3, 4, 5.

$$3^3 = 27 = 3 \times 1 + 4 \times 6 + 1 \times 0$$
$$3^5 = 243 = 3 \times 1 + 4 \times 30 + 1 \times 120$$
$$3^7 = 2187 = 3 \times 1 + 4 \times 126 + 1 \times 1680$$
$$4^3 = 64 = 4 \times 1 + 10 \times 6 + 6 \times 0 + 1 \times 0$$
$$4^5 = 1024 = 4 \times 1 + 10 \times 30 + 6 \times 120 + 1 \times 0$$
$$4^7 = 16384 = 4 \times 1 + 10 \times 126 + 6 \times 1680 + 1 \times 5040$$
$$5^3 = 125 = 5 \times 1 + 20 \times 6 + 21 \times 0 + 8 \times 0$$
$$5^5 = 3125 = 5 \times 1 + 20 \times 30 + 21 \times 120 + 8 \times 0$$
$$5^7 = 78125 = 5 \times 1 + 20 \times 126 + 21 \times 1680 + 8 \times 5040.$$

*) Reproducerea nepermisă fără voia autorului.

La toate aceste exemple bazele sunt luate pe linia C_m^1. Primul factor al fiecărui produs este dat de linia verticală care porneşte dela bază în sus: 3, 4, 1; 4, 10, 6, 1; 5, 20, 21, 8;.

Al doilea factor al fiecărui produs nu depinde de bază; din contră, el este o constantă pentru acelaşi exponent. Pentru un exponent $(2n-1)$ avem n constante. Să arătăm cum se pot găsi aceste constante.

Observăm că pentru exponentul 7 constantele sunt 1, 126, 1680, 5040 şi că ele sunt divizibile respectiv prin factorialele

$$1!=1\ ,\ 3!=1\times2\times3=6\ ;\ 5!=1\times2\times3\times4\times5=120\ ;$$

$$7!=1\times2\times3\times4\times5\times6\times7=5040$$

şi dau câturile respective 1, 21, 14, 1. La formarea directă a acestor câturi am ajuns prin o cercetare empirică.

Să considerăm şirul patratelor naturale:

$$1^2\ ,\ 2^2\ ,\ 3^2\ ,\ 4^2\ ,\ 5^2\ ,\ \ldots\ ,m^2\ .$$

Cu aceste patrate formăm nişte numere ${}_pE_q$ în felul următor: Luăm din şir primele p patrate şi cu ele facem combinări cu repetiţie câte q. Facem produsul numerelor din fiecare combinare şi sumăm aceste produse. Astfel:

$${}_3E_2=1^2\times1^2\times1^2+1^2\times1^2\times2^2+1^2\times2^2\times2^2+2^2\times2^2\times2^2=85$$

$${}_2E_3=1^2\times1^2+1^2\times2^2+1^2\times3^2+2^2\times2^2+2^2\times3^2+3^2\times3^2=147$$

$${}_1E_4=1^2+2^2+3^2+4^2=30.$$

Pentru un exponent $(2n-1)$ numerele ${}_pE_q$, pentru care $(p+q)=n$, sunt câturile de care am vorbit mai sus. Astfel pentru exponentul 7, la care $n=4$, avem:

$${}_3E_1=1^2\times1^2\times1^2=1$$

$${}_2E_2=1^2\times1^2+1^2\times2^2+2^2\times2^2=21$$

$${}_1E_3=1^2+2^2+3^2=14.$$

Punem ca valoare extremă ${}_0E_n=1$.

Procedeul se poate verifica şi pentru alţi exponenţi.

Din cele ce preced scoatem formula generală a descompunerii unei puteri nepereche:

$$x^{2n-1} = C^{1}_{x \cdot (n-1)}E_1 \cdot 1! + C^{3}_{x+1 \cdot (n-2)}E_2 \cdot 3! + \ldots$$
$$+ C^{2m-1}_{x+m-1 \cdot (n-m)}E_m \cdot (2m-1)! + \ldots + C^{2n-1}_{x+n-1 \cdot 0}E_n \cdot$$

Această formulă a mai fost dată în *Gazeta Matematică* în August 1927, pag. 443.

In studiul de mai sus apar, cum se vede, cam enigmatic patratele numerelor întregi. Observaţiunea următoare poate lămureşte întru câtva chestiunea. Să considerăm expresiunea:

$$[(x-n+1)(x-n+2)\ldots(x-1)\,x\,(x+1)\ldots(x+n-2)(x+n-1)].$$

Ca de aci să putem scoate pe x^{2n-1} putem înmulţi cu factorii:

$$x^2/(x^2-1)\ ,\ x^2/(x^2-2^2)\ ,\ \ldots\ x^2/[x^2-(n-1)^2].$$

Fiecare factor este mai mare ca 1, şi deci rezultatul va fi superior produsului dela care am plecat. Deci diferenţa lor finală e aceeaşi.

(Va urma). LEONESCU.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“ DIN 1937

Adunarea generală a Societăţii *Gazeta Matematică* a hotărît, în şedinţa dela 25 August a. c. ţinerea unui concurs de matematici în cursul anului 1937 între elevii liceelor, civile şi militare, din ţară şi între elevii anului preparator al Şcoalei Politehnice «Regele Carol II».

Concursul va avea loc după Paşti înainte de reînceperea cursurilor, în Bucureşti, unde se va da examen înscris şi oral, dacă Societatea va dispune de mijloace de a aduce candidaţii; dacă vor lipsi aceste mijloace, concursul se va ţine într'o duminică din luna Mai, în diferite centre din ţară, dându-se numai teze.

Deciziunea în această privinţă se va publica în numărul din Februarie 1937.

Fiecare candidat este obligat să se înscrie *la două din materiile clasei sale,* urmând a da, la fiecare, teză, iar în cazul ţinerii concursului în Bucureşti, şi oral.

Pentru unitatea pregătirii, se va publica în numărul din Octomvrie al *Gazetei Matematice* un program, conținând materia pe care candidatul unei anume clase va trebui să o pregătească pentru obiectul la care e înscris.

Sub nici un motiv candidatul nu va fi scuzat de nepregătirea unor capitole trecute în programul clasei sale, pentru obiectul ales.

Cererile de înscriere se vor trimite direct de candidați Societății Gazeta Matematică, Calea Griviței, 158. București 2, în plicuri recomandate până cel mai târziu la 31 Decemvrie 1936.

Nu se primesc cereri trimise de părinți, corespondenți, profesori sau școli.

Cererile vor arăta neapărat, numerotate și în ordinea arătată aci, următoarele date:

1. Numele și pronumele, scrise clar.

2. Clasa sau anul pregătitor în care urmează candidatul. Pentru cei pregătiți în particular se va arăta școala la care a urmat anul precedent sau în care a depus examenul de fine de an pentru clasa precedentă.

3. Adresa în timpul școalei și în timpul vacanței Paștilor, pentru a se putea face comunicările și înștiințările necesare.

4. Dacă dispune de mijloace de a veni în București, dacă are unde fi găzduit și întreținut aci în timpul concursului, sau dacă unul din aceste mijloace ar urma să fie procurat de Societatea *Gazeta Matematică.*

Dacă are nevoie de bani pentru drum, va indica și gara de unde va lua trenul pentru a veni în București și gara la care se întoarce după concurs.

5. Cele două materii la care se înscrie.

6. Activitatea sa la *Gazeta Matematică, Suplimentul cu exerciții al Gazetei Matematice,* sau la alte reviste din țară și străinătate.

Candidații înscriși la concurs, dacă din diferite motive nu se mai pot prezenta, sunt obligați să anunțe din timp.

Părăsirea sălilor de concurs înscris este interzisă înainte de predarea tezelor.

Se atrage atențiunea că toate condițiunile, pentru înscriere și ținerea concursului, trebuesc respectate cu toată exactitatea inerentă științelor matematice.

In numărul 6 din Februarie 1937 al *Gazetei Matematice* se va publica modul de ținere al concursului, localitatea, orele de prezentare și numele candidaților admiși la concurs.

Numărul celor admiși va depinde de sacrificiile materiale ce se vor cere societății *Gazeta Matematică,* pentru transportul, găzduirea și întreținerea candidaților și de pregătirea pe care aceștia vor arăta-o în cererile ce vor face.

Candidații reușiți la concurs vor primi ulterior diplome, recompense, premii sau mențiuni. Primul care va reuși la concurs, dintre elevii anului preparator de pe lângă Școala Politehnică «Regele Carol II» din București, va primi premiul «ANGHEL SALIGNY» (de 1000 lei) oferit de un membru al Societății noastre, iar primul reușit dintre toți candidații va primi premiul «LT.-COL. G. TĂNĂSESCU» în cărți, în conformitate cu înștiințarea făcută în acest număr la articolul: *Premii, donațiuni și alte dispoziții ale fondurilor Gazetei Matematice.*

Comisiunea examinatoare se va compune din membrii Societății *Gazeta Matematică,* cari nu vor avea rude printre candidații admiși la concurs.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII.

PREMII, DONAȚII ȘI ALTE DISPOZIȚII ALE FONDURILOR SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ"

Pentru răspândirea gustului pentru științele matematice și îndrumarea spre cercetări originale relative la această ramură de știință, în afară de publicarea fără întrerupere a *„Gazetei Matematice"* și ținerea anuală de concursuri, Societatea mai acordă premii și încurajări pentru lucrări originale și tipărește în *„Biblioteca Gazetei Matematice"* și în *„Biblioteca Tehnică a Gazetei Matematice"*; cărți privitoare la matematicile pure sau aplicate, la filosofia sau istoria lor și alte publicațiuni cu caracter matematic.

In acest scop, Societatea primește, spre administrare, fonduri cu destinațiuni anumite, arătate de către donatori, sau creează asemenea fonduri, pe care le administrează potrivit Regulamentelor lor speciale și statutelor Societății.

1. Din venitul fondului «INGINER H. CAPRIEL», se acordă, din doi în doi ani, un premiu pentru lucrări de matematici superioare pure sau aplicate. Chestiunile propuse se publică în numărul din luna Mai al *Gazetei Matematice.*

Pentru chestiunile propuse în anul 1935, neprimindu-se lucrări până la 1 Mai 1936, acest premiu nu s'a putut acorda, mărind astfel fondul.

In luna Mai 1937, se vor publica chestiunile pentru premiul următor.

2. Venitul fondului «ANGHEL SALIGNY» şi alte sume, servesc pentru publicarea de cărţi tehnice din *Biblioteca Tehnică a Gazetei Matematice.*

Manuscrisele se adresează delegaţiei Societăţii. Nu se iau în considerare decât lucrările complete de matematici aplicate sau cu cuprins tehnic în legătură cu aceste ştiinţe.

Regulamentul acestui fond determină şi drepturile autorului.

3. Premiul «VASILE CONTA» se acordă pentru recompensarea celei mai bune lucrări originale de filosofia matematicilor, adusă la cunoştinţa Societăţii în cursul fiecărui an până la 1 Iulie. Premiul constă în totalitatea venitului fondului cumulat până la data acordării.

Autorii trebue să fie români şi să-şi fi făcut studiile secundare în ţară.

Raportul Comisiunii, aleasă în acest scop de către Adunarea Generală a Societăţii, se publică în numărul din Noemvrie al *Gazetei Matematice.*

Pentru anul 1935 — 1936, s'au acordat premii Domnilor N. O. ZAHARIA şi inginer AL. STOENESCU, în şedinţa dela 7 Noemvrie 1935 a Adunării Generale a Societăţii.

4. «Premiul pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare» se acordă, din venitul fondului donat de către D-l General SCARLAT PANAITESCU, celei mai bune lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare, publicată sau trimisă în manuscris Societăţii în cursul anului expirat.

Autorii publicaţiilor prezentate trebue să fie români, sau să-şi fi făcut cultura matematică în ţară.

Premiul este indivizibil şi se acordă neapărat în fiecare an. Raportul Comisiunii, aleasă în acest scop de către Adunarea Generală a Societăţii, se publică în numărul din Octomvrie al *Gazetei Matematice.*

Pentru anul 1934 — 1935, premiul a fost acordat Revistei *„Aeronautica"*.

5. Pentru a cinsti memoria marelui profesor şi reformator ai învăţământului, SPIRU HARET, primul român doctor în ştiinţele matematice, Societatea *Gazeta Matematică* a constituit un fond denumit «SPIRU HARET», alimentat prin subscripţie publică deschisă în permanenţă.

Venitul acestui fond serveşte pentru cumpărarea de cărţi de matematici pure şi aplicate, aparate sau modele necesare învăţământului matematic, care se donează bibliotecilor şcolare dela şcolile secundare sau corespondenţilor meritoşi, elevi ai acestor şcoli şi se distribue între începutul anului şcolar şi vacanţa Crăciunului.

Pentru anul 1934 — 1935, s'au donat «Liceului Samuil Vulcan» din Beiuş: Volumul XXXIX al *Gazetei Matematice* şi *Culegere de Probleme de Algebră* de A. G. IOACHIMESCU, din *Biblioteca Gazetei Matematice*.

Potrivit hotărîrii Adunării Generale dela 25 August 1936, pentru anul 1935 — 1936, donaţia se va face *Liceului de fete din Târgovişte*.

6. Din venitul fondului «LT.-COLONEL GH. A. TĂNĂSESCU», înfiinţat prin legatul decedatului AL. TĂNĂSESCU, în memoria fiului său, se cumpără cărţi de matematici celui clasificat întâiul la concursurile anuale ale *Gazetei Matematice*.

In anul 1935 — 1936, s'au cumpărat, din acest venit, cărţi, care s'au donat D-lui ION A. ILIE, elev în clasa V-a la «Liceul Militar Mănăstirea Dealu», clasificat întâiul la concursul din acest an al *Gazetei Matematice*.

7. Pentru a cinsti memoria inginerului V. CRISTESCU, membru fondator al *Gazetei Matematice*, în jurul căreia a animat şi activat intens şi neîntrerupt peste 33 ani, s'a constituit, prin donaţia D-lor GHEORGHE NICULESCU, MIRON NICULESCU şi ALEXANDRU NICULESCU, fondul denumit «V. CRISTESCU», din al cărui venit se acordă un premiu indivizibil anual, autorului celui mai bun articol, referitor la geometria triunghiului sau la trigonometrie, dintre cele publicate în *Gazeta Matematică* în ultimul volum apărut; autorul articolului va fi elev de liceu, de şcoală militară, de şcoală politehnică sau student de facultate.

Fondul se poate mări atât de către donatori, cât şi de către alte persoane.

Premiul se cumulează până la acordarea lui.

Raportul Comisiei, anume aleasă pentru acordarea acestui premiu, se publică în No. 10 al *Gazetei Matematice,* care apare în luna naşterii decedatului inginer VASILE CRISTESCU.

8. In *„Biblioteca Gazetei Matematice"*, s'au tipărit în acest an, cu ajutorul *„Fondului Publicaţiilor"* : *„Lecţiuni de Algebră Superioară"* pentru clasa VIII-a ştiinţifică, de N. ABRAMESCU şi *„Culegere de Probleme de Trigonometrie"*, partea I, Goniometrie, de V. CRISTESCU, revăzută şi adăogită de către GH. T. GHEORGHIU.

COMISIUNEA PENTRU CONTROLUL FONDURILOR
SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ"
Ing. D. V. STOICA şi Ing. D. STAN.

NOTE MATEMATICE

1. *O problemă de aritmetică.* D-l I. DOBROVICI (Bârlad) a enunţat problema următoare [1]) :

Produsul a nouă numere întregi consecutive nu poate fi un cub perfect.

Produsul

$$P = (x-4)(x-3)(x-2)(x-1)\,x\,(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

se poate pune sub următoarele 2 forme

$$P = (x^3 - 10x)^3 - (27x^5 - 180x^3 - 576x)$$

$$P = (x^3 - 10x - 1)^3 + 3x^6 - 27x^5 - 60x^4 + 177x^3 + 300x^2 + 30x + 576.$$

Ori valoarea numerică a lui

$$27x^5 - 180x^3 - 576x$$

este pozitivă când $x > 10$.

De asemeni valoarea numerică a lui

$$3x^6 - 27x^5 - 60x^4 + 177x^3 + 300x^2 + 30x + 576$$

este pozitivă îndată ce x este superior lui 10.

1) *Journal de Mathématiques élémentaires,* XXVII — 1902/3, pag. 68, problema 5425. Această revistă încă nu a publicat soluţia problemei propusă de D-l I. DOBROVICI.

Avem deci

$$(x^3 - 10x - 1)^3 < P < (x^3 - 10x)^3$$

pentru toate valorile lui x superioare lui 10, şi, pentru toate aceste valori ale lui x, produsul P nu este deci niciodată cub perfect.

Pe de altă parte, nu se obţine niciun cub perfect făcând în P, succesiv $x = 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

Deci proprietatea este demonstrată.

V. THÉBAULT
(Le Mans, Franţa).

2. *Acum o sută de ani în lumea matematică.* Date culese în biblioteca Seminarului Matematic din Iaşi din publicaţiile timpului. (Urmare).

3. *Matematica românească.* E dela sine înţeles că nu se poate vorbi de matematică românească acum 100 de ani, în înţelesul de creaţie originală. De asemenea matematică nu se va putea vorbi până în acest secol. Totuşi, putem semnala ca un câştig imens pentru cultura noastră ştiinţifică, apariţia părţii întâi a Elementelor de Matematică a agăi G. ASACHI — mădulari Academiei de Roma —. Cartea lui ASACHI este una din primele cărţi româneşti de matematici.

Să dăm cuvântul autorului care are de spus lucruri de seamă:

«Dorind a da tinerimei patriei înlesnire de a cultiva îndeobştie această ştiinţă (matematica), încă la 1814, pe când dela învăţături era excluză (înstrăinată) limba patriei, eu cel întâi am paradosit în public românește Matematică şi anume: Geometria teoretică şi practică spre informarea Inginerilor civili... Iar acuma spre îndemănarea tinerimei am socotit a da la lumină o compilaţie în scurt de cunoştinţele Matematice..., fericindu-mă dacă prin această lucrare vor putea spori temelnicele conoştinţe matematice, şi luminarea tinerimei, care este ţinta tuturor dorinţelor mele».

3. *Un sistem diofantian.*

Iată o soluţie—pe care o cred completă—a sistemului diofantian studiat de D-l A. GLODEN în «G. M» XLI — 478.

Ecuaţia:

$$b^4 + c^4 + d^4 = 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2$$

se scrie:

$$d^4 - 2(b^2 + c^2)d^2 + (b^2 - c^2)^2 = 0$$

adică o ecuație bipatrată în d care conduce la:

$$d = \pm (b \pm c),$$

relație care evidențiază de ce restricția D-lui A. GLODEN face să se piardă o parte din soluțiile sistemului.

In aceste condițiuni prima ecuație dela pagina citată devine:

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm bc,$$

care este un caz particular al ecuației omogene de gr. II rezolvată de GAUSS și astfel fiind, avem soluțiile:

$$a = -m(p^2 \pm pq + q^2) \quad ; \quad b = m(q^2 - 2q)$$

$$c = m(q^2 - p^2) \quad ; \quad d = \pm m(q^2 \pm q^2 - 2q \mp p^2),$$

la care trebue să mai adăogăm că valorile lui $b, c, d,$ sunt circular permutabile, p și q fiind întregi.

HAR. P. IONESCU.

4. *Notă asupra triunghiurilor isologice.* Fie triunghiul t, de laturi d_1, d_2, d_3 ca element de referință; dintr'un punct m arbitrar, din planul lui, se duc dreptele $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ înclinate în același sens și unghiu φ pe laturile corespunzătoare și se iau pe ele, trei puncte arbitrare, formând triunghiul (t'), de laturi d'_1, d'_2, d'_3. Dreptele (δ), fiind concurente în (t'), avem satisfăcută o relație de forma

$$\Pi \frac{\sin(\delta_1, d'_2)}{\sin(\delta_1, d'_3)} = 1$$

sau $\sigma(d', \delta) = 1$. Dacă se duc din vârfurile triunghiului (t), dreptele $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3$ înclinate sub același unghiu φ, dar în sens opus, pe laturile triunghiului (t'), avem evident verificate relațiile unghiulare $(\delta'_i, d_j,) = (d'_i, \delta_j)$, deci $\sigma(d', \sigma) = \sigma(d, \delta')$ de unde urmează că și *dreptele* (δ') *sunt concurente în* m'.

(t) și (t') sunt triunghiuri isologice de centre m și m'.

* * *

Din relația unghiulară menționată, avem mai general

$$\lambda(\delta, d') = \lambda(\delta', d) ,$$

λ fiind o combinație de linie trigonometrică arbitrară:

$$\Pi \frac{\text{lin}(\delta_1, \delta'_2)}{\text{lin}(\delta_1, \delta'_3)} .$$

Deci dacă $\lambda(\delta, d') = 1$, $\lambda(d, \delta') = 1$. Când linia e diferită de sinus — în care caz relația e evident satisfăcută — condiția precedentă caracterizează cubica formată din dreapta dela infinit d_∞ și din cercul (c) circumscris triunghiului. Însă m și m' descriu simultan pe d_∞ ; rămâne: *dacă m' este pe cercul circumscris triunghiului (t), m este pe cercul circumscris triunghiului (t').*

Dacă $\lambda(\delta, d') = \lambda(d, \delta') = -1$ se poate enunța de asemenea: *(t) și (t') fiind două triunghiuri isologice cu centrele în m și m', dacă m este pe cubica* DARBOUX *a triunghiului (t'), m' este pe cubica* DARBOUX *a triunghiului (t).*

N. N. MIHĂILEANU.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Vol. CXXI. Fasc. III. Martie 1936. Buenos-Aires. Asupra numărului complex dual, de J. C. VIGNAUX. Asupra derivatei areolare și simetrice a funcțiunilor de o variabilă complexă duală, de J. C. VIGNAUX și MISCHA COTLAR.

Idem. Vol. CXXI. Fasc. V. Mai 1936. Buenos-Aires. Sistemele de inecuațiuni lineare și aplicațiunile lor la studiul corpurilor convexe, de FRANCISCO LA MENZA.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XLII. No. 4. Aprilie 1936. Menasha, Wisconsin. Ecuații diferențiale lineare de ordin infinita de R. D. CARMICHAEL. O condiție necesară pentru aproximarea funcțiilor raționale, de J. L. WALSH. Asocierea ecuațiilor algebrice cu ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale, de J. A. GREENWOOD. O teoremă de teoria sumabilității, de J. D. HILL. Transformarea grupului fuxian, de P. K. REES. Ecuația $2^x - 3^y = d$, de AARON HERSCHFELD. Câteva teoreme în spațiul abstract,

de R. E. A. C. PALEY. Asupra univalentei sumei lui CAESARO la funcţiunile univalente, de M. S. ROBERTSON. O formulă de recurenţă pentru soluţiile polinomiale ale unei ecuaţii cu derivate parţiale, de C. C. MACDUFFEE. O caracterizare a sistemelor nule în spaţiul proectiv, de RICHARD BRAUER. Un complex de reprezentări al funcţiilor de variabilă reală, de W. M. WHYBURN. Reducerea funcţiilor BOOLEAN, de J. C. C. MACKINSEY. Asupra generalizării lungimii şi ariei, de J. F. RANDOLPH. Asupra transformării seriilor duble, de H. J. HAMILTON. Asupra extinderii a două puncte oarecari la funcţiile integrale de tip exponenţial, de I. J. SCHOENBERG.

Idem. Vol. XLII. No. 5. Mai 1936. Menasha, Wisconsin. Congresul din Februarie dela New-York, de J. R. KLINE. WILLIAM ELWOOD BYERLY-in memoriam, de J. L. COOLDIGE. DAVID CLINTON GILLESPIE-in memoriam, de W. A. HURWITZ.

The Mathematical Gazette. Vol. XX. No. 239. Iulie 1936. London. Sume de puteri inverse, de A. LODGE. Fizica sportului, de G. T. WALKER. Ecuaţii numerice cu coeficienţi complecşi, de E. H. NEVILLE. O diviziune focală determinată de trei conice, de E. H. NEVILLE. Asupra teoremei lui PETERSEN-MORLEY, de J. A. TODD. Asupra unei teoreme de ridicarea curbelor plane, de C. BELL. Notaţia vectorială, de G. WINDRED. Asupra punctului general al lui FRÈGIER, de A. A. KRISHNASWAMI AYYANGAR.

Pitagora. Anul I. No. 8—9. Iunie-Iulie 1936. Craiova. Impărţirea unui polinom printr'un produs de n factori binomiali, de G. G. CONSTANTINESCU. Asupra ariei triunghiului, de P. BOLDESCU. Asupra unor identităţi, de LT. C. D. IONESCU-ŢIU.

INGINER C. C. TEODORESCU şi INGINER M. STAMATIU. Recherches sur la résistance aux efforts mécaniques du sel gemme roumain. Les résultats de l'utilisation des haveuses pour l'abatage du sel gemme à la saline Slănic. *(Congrès international des mines, de la métallurgie et de la géologie appliquée* — Paris 1935).

INGINER C. C. TEODORESCU. La réception des rails et l'application pratique des résultats obtenus. *(3-émè journée internationale du rail,* Budapest 1935).

A. MYLLER. *Curs de Geometrie Analitică* pentru elevii clasei a VIII-a, secţia ştiinţifică. Editura Seminarului matematic, Iaşi.

Cunoscutul Profesor A. MYLLER de la Universitatea din Iaşi a avut fericita idee să-şi adapteze cursul de Geometrie analitică pe care-l predă studenţilor secţiunei matematice, la cerinţele programului de liceu. Rezultatul operaţiunii este minunat. Căci cartea d-lui MYLLER, fără să depăşească cu o liniuţă măcar limita de înţelegere a unui elev de clasa VIII-a, îi oferă acestuia un material aşezat solid pe o linie fundamentală bine chibzuită.

D-l MYLLER pune ca scop principal al studiului geometriei analitice, în cadrul programului de liceu, cercetarea proprietăţilor conicelor. Felul acesta de a vedea lucrurile împrumutat din vechea gândire grecească, este extrem de simpatic şi foarte accesibil la didactică.

Natural că manualul începe cu noţiuni elementare, despre coordonate, despre punct, despre înţelesul unei relaţiuni între coordonate, pentru a trece la studiul amănunţit al liniei drepte. Dar se vede din toată făptura cărţii că scopul studiului nu este linia dreaptă care prin banalizarea ei în liceu ar prezinta poate o deziluzie mânuitorului acestui nou instrument ce se chiamă geometria analitică. Ci altul este tărâmul pe care se exercită forţa calculului aplicat la Geometrie: tărâmul proprietăţilor cercului şi mai cu seamă ale parabolei, elipsei, iperbolei.

Programul ar putea reproşa D-lui MYLLER că partea rezervată conicelor îl întrece. Atât mai rău pentru el! Pentru că proprietăţile parabolei, elipsei şi iperbolei expuse clar şi substanţial în cele 50 de pagini (50 din 166) se citesc uşor, cu plăcere şi dau un înţeles geometriei analitice. Poate că de acest lucru va ţine seama cel ce va revizui programul în viitor.

Ca formă, D. MYLLER reuşeşte să găsească totdeauna cea mai nimerită şi cea mai simplă expresie pentru orice idee, cât de pretenţioasă ar fi ea. Iar proprietăţile abstracte şi noţiunile noui sunt susţinute de numeroase exemple concrete numerice care nu mai îngădue nici un fel de îndoială.

Surprinzător de plăcută apariţia notelor istorice în corpul cărţii. Elevii clasei a opta pot intra astfel, cel puţin într'un compartiment al vieţii vechilor elini, făcând cunoştinţă, de pildă, cu „Cele trei probleme mari de Geometrie ale Antichităţii", *duplicarea cubului, trisecţia unghiului* şi *cuadratura cercului*.

Inainte de a încheia această scurtă recenzie, fie-mi permis să menţionez nivelul moral pe care se situiază cartea şi autorul ei, prin destinaţia beneficiului: totul trebue să revină seminarului de matematici din Iaşi, care din lipsă de mijloace, îşi vede biblioteca — frumoasa-i bibliotecă — ameninţată cu descompletarea.

Acest pericol l'a hotărît pe autor să scrie o carte de învăţământ de liceu.

Îi suntem recunoscători pericolului că a dat naştere unei cărţi folositoare, iar ei îi urăm să-l poată înlătura. Ceeace s'ar cuveni, judecând după calitatea cărţii.

V. VÂLCOVICI.

CERERI

260. Cine mi-ar putea procura *«Culegerea de probleme de aritmetică, geometrie, algebră şi trigonometrie»* de I. IONESCU, G. ŢIŢEICA, V. CRISTESCU şi A. G. IOACHIMESCU?

D. D. MATEI
(Liceul Internat, Iaşi).

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii

C. A. LAISANT. Figuration graphique de quelques nombres combinatoires. Paris 1893.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

CRISTOFORO ALASIA. Sviluppo di una serie. Livorno 1914.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2354. *Să se găsească un număr de trei cifre astfel ca diferența dintre el și răsturnatul său să fie un număr format cu aceleași cifre ca ale numărului dat.*

E. GEORGESCU.

Soluție dată de D-l MIRCEA A. NEGREA (Brăila). Fie $N = abc$ numărul cerut. Conform enunțului trebuește ca

(1) $abc - cba = 99(a - c) = acb,\ bac,\ bca,\ cab$ sau cba

unde am lăsat de o parte cazul când diferența ar fi egală chiar cu numărul dela care am plecat, caz evident imposibil.

Avem deci de studiat cinci cazuri.

1°. $99(a - c) = 100a + 10c + b$, sau $a + b + 109c = 0$ egalitate imposibilă deoarece numerele a, b, c sunt toate pozitive sau nule, afară de a care nu poate fi nul.

2°. $99(a - c) = 100b + 10a + c$ sau $89a = 100(b + c)$ egalitate care ne spune că a trebue să se dividă cu 100 (b, c sunt întregi) ceea ce este imposibil căci a este un număr pozitiv mai mic decât 10.

3°. $99(a - c) = 100b + 10c + a$ sau (2) $98a = 100b + 109c$. Din (1) se vede însă că numărul bca trebue să se dividă cu 11, adică trebue să avem

(3) $a + b = c$ sau (4) $a + b = c + 11$.

Relațiile (2) și (3) dau: $19b + a = 0$, egalitate care nu poate exista; iar (2) și (4) dau: $a = 109 - 19b$ care nu dă pentru a valori pozitive și mai mici decât 10.

4^0. $99(a-c) = 100c + 10a + b$ sau (5) $b = 89a - 199c$. Cum însă, pe acelaşi motiv ca la cazul precedent,

$$b + c = a \quad \text{sau} \quad b + c = a + 11$$

care combinate cu (5) dau

$$4a = 9c \quad \text{sau} \quad 8a - 18c = 1.$$

Prima dă: $a = 9$, $c = 4$ şi deci $b = 5$, iar $N = 954$. A doua nu poate exista în numere întregi, deoarece prima parte este divizibilă cu 2, iar a doua nu.

5^0. $99(a-c) = 100c + 10b + a$ sau $98a = 199c + 10b$. Dar

$$a + c = b \quad \text{sau} \quad a + c = b + 11,$$

care combinate dau

$$8a = 19c \quad \text{sau} \quad 8a + 10 = 9c$$

egalităţi imposibile în numere întregi pozitive şi mai mici ca 10.

Problema admite deci singura soluţie $N = 954$. Intr'adevăr

$$954 - 459 = 495.$$

GH. TH. GH.

PROBLEMA 2598. *Să se demonstreze că distanţa dela ortocentru la mijlocul laturei celei mai mari a unui triunghiu este mai mare ca celelalte două distanţe similare.*

I. SCHOENBERG.

Soluţie dată de D-nul MIRCEA A. NEGREA (Brăila). Fie $a > b > c$ şi: A_1 piciorul înălţimei scoborîtă din A ; A' mijlocul laturei BC ; H ortocentrul triunghiului. Cum

$$HA_1 = 2R \cos B \cos C \quad , \quad BA_1 = c \cos B,$$

din triunghiul dreptunghic HA_1A' scoatem

$$\overline{HA'}^2 = \overline{HA_1}^2 + \overline{A_1A'}^2 = 4R^2 \cos^2 B \cos^2 C + \left(\frac{a}{2} - c \cos B\right)^2,$$

unde înlocuind laturile în funcție de unghiuri și de raza cercului circumscris, găsim

$$\overline{HA'}^2 = R^2 [4 \cos^2 B \cos^2 C + (\sin A - 2 \sin C \cos B)^2],$$

care se mai poate scrie, făcând toate calculele,

$$\overline{HA'}^2 = R^2 (4 - 4 \sin^2 B + \sin^2 A - 4 \sin A \sin C \cos B).$$

Revenind acum la laturi, avem

$$\overline{HA'}^2 = R^2 \left(4 - \frac{b^2}{R^2} + \frac{a^2}{4R^2} - 4 \frac{a}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$$

sau încă

$$\overline{HA'}^2 = 4R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$$

și la fel se calculează celelalte distanțe similare. Ținând seamă de ipotezele făcute asupra laturilor rezultă imediat că

$$\overline{HA'}^2 > \overline{HB'}^2 > \overline{HC'}^2$$

și cum aceste segmente sunt toate trei pozitive, găsim inegalitățile care rezolvă problema:

$$\overline{HA'} > \overline{HB'} > \overline{HC'}.$$

GH. TH. GH.

Observație. 1°. *O soluție geometrică.* In aceleași condiții, dacă A', B', C' sunt mijloacele laturilor ABC; iar P este intersecția înălțimei coborîtă din C pe A'B', avem:

(1) $$\overline{PA'} > \overline{PB'},$$

căci $\overline{PA'}$ și $\overline{PB'}$ sunt proecțiile segmentelor $\overline{A'C}$ și $\overline{B'C}$ pe $\overline{A'B'}$, iar

$\overline{A'C} > \overline{B'C}$ ($\frac{1}{2}\overline{AC} < \frac{1}{2}\overline{BC}$). Cum avem:

$$\overline{HA'}^2 = \overline{HP}^2 + \overline{PA'}^2 \quad ; \quad \overline{HB'}^2 = \overline{HP}^2 + \overline{PB'}^2$$

și în virtutea lui (1) se are:

$$\overline{HA'} > \overline{HB'}.$$

Analog

$$\overline{HB'} > \overline{HC'}.$$

q. e. d.

2°. Am dat această soluție după o indicație a D-lui N. N. ALDEA.

H. P. I.

PROBLEMA 2701. *Să se găsească două numere ştiind că diferenţa lor e de forma* $M13+3$ *şi câtul lor este un multiplu de 5.*

I. MARIAN.

Fie A, B cele două numere.

(1) $$A - B = 13m + 3$$

(2) $$\frac{A}{B} = 5n.$$

Rezolvând sistemul găsim:

$$A = \frac{5n\,(13m+3)}{5n-1}\ ,\quad B = \frac{13m+3}{5n-1}\ .$$

Au rezolvat problema D-nii: I. T. BÂRSU, B. M. BARBĂLATT, N. I. CIORĂNESCU, M. G. DUMITRESCU, I. B. FLORESCU, M. GÂŢAN, C. I. GEORGESCU, P. KATZ, A. T. NICOLAU, I. NATHANSOHN, I. T. POPOVICI, A. TAUBER, I. C. VASILIU şi M. VASILIU.

C. I. B.

PROBLEMA 3593. *Se cere cubul* **dmszu** *în care* **ms** *este cubul lui* **d**, *iar* **(d + u)** *şi* **(s + z)** *sunt numere prime consecutive.*

I. I. ILIUŢĂ-DĂBULENI.

Soluţie. Cum $d^3 = ms$ avem:

$$d = 1\,;2\,;3\,;4 \quad \therefore \quad ms = 01\,;08\,;27\,;64,$$

iar numărul căutat este de forma:

$$101zu \ ; \ 208zu \ ; \ 327zu \ ; \ 464zu.$$

1. Extrăgând rădăcina cubică din $101zu$ vedem că prima cifră a rădăcinii este *2*, iar din $21 : (2^2 \times 3)$ reiese că a doua cifră este *1*, deci:

$$21^3 = 9261.$$

2. Pentru $208zu$ prima cifră a rădăcinei cubice este tot *2*, iar din $128 : (2^2 \times 3)$ reiese că a doua cifră poate fi: *6*; *7*; *8*; *9*, însă cum $(d + u)$ trebue să fie prim, convin numai *7* şi *9* deci:

$$27^3 = 19683 \quad ; \quad 29^3 = 24389.$$

3. Pentru $327zu$ prima cifră a rădăcinei cubice este *3*, iar din $57 : (3^2 \times 3)$ reiese că a doua cifră a rădăcinei cubice poate fi: *1*; *2*, însă *1* nu convine căci $d + u = 3 + 1 = 4$, aşa că avem:

$$32^3 = 32768.$$

4. Pentru $464zu$ prima cifră a rădăcinei cubice este *3*, iar din $194 : (3^2 \times 3)$ reiese că a doua cifră poate fi: *4*; *5*; *6*; *7*, dar cum $d + u$ este prim convine numai *7* deci:

$$37^3 = 50653.$$

Căutând acum pentru care dintre cele cinci numere de mai sus $d + u$ şi $s + z$ sunt două numere prime consecutive găsim că numai

$$32^3 = 32768$$

este soluţia problemei.

Observaţiuni. 1°. Au dat soluţiuni diferite considerând $d = 1, 2, 3, 4$ D-nii: IOAN ŞT. I. GEORGESCU, C. D. IONESCU-ŢIU, IOAN CR. MOCĂNESCU.

2°. Au considerat numai cazurile $d = 3; 4$ D-nii: N. N. ALDEA, ALEX. ARSENE, GH. I. BALABAN, CONST. ŞT. C. FELIX, I. MURĂROIU.

3°. Din 100 soluţiuni primite ceilalţi 92 de rezolvitori, ale căror nume au fost anunţate pe copertă, nu merită să fie menţionate.

H. P. I.

PROBLEMA 3639. *Să se demonstreze că*

$$\lim_{m=\infty} \left\{ m \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m - me \right\} = -\frac{e}{2}$$

$$\lim_{m=\infty} \left\{ m^2 \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m - m^2 e + \frac{me}{2} \right\} = \frac{11e}{24}$$

$$\lim_{m=\infty} \left\{ m^3 \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m - m^3 e + \frac{m^2 e}{2} - \frac{11me}{24} \right\} = -\frac{21e}{48}$$

e *fiind baza logaritmilor neperieni.*

D. V. IONESCU.

Soluție. Pornim dela formula

$$\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = m\log\left(1+\frac{1}{m}\right) = m\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2m^2}+\frac{1}{3m^3}-\frac{1}{4m^4}+\frac{\alpha}{m^5}\right)$$

unde α este finit pentru $m=\infty$.

Avem deci

$$\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1-\frac{1}{2m}+\frac{1}{3m^2}-\frac{1}{4m^3}+\frac{\alpha}{m^4}$$

sau

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e\,.\,e^{-\frac{1}{2m}}\,e^{\frac{1}{3m^2}}\,.\,e^{-\frac{1}{4m^3}}\,.\,e^{\frac{\alpha}{m^4}}\,.$$

Insă

$$e^{-\frac{1}{2m}} = 1-\frac{1}{2m}+\frac{1}{8m^2}-\frac{1}{48m^3}+\dots$$

$$e^{\frac{1}{3m^2}} = 1+\frac{1}{3m^2}+\dots$$

$$e^{-\frac{1}{4m^3}} = 1-\frac{1}{4m^3}+\dots$$

$$e^{\frac{\alpha}{m^4}} = 1+\dots$$

Facem produsul acestor serii mărginindu-ne numai la termenii în

$$\frac{1}{m}\,,\ \frac{1}{m^2}\,,\ \frac{1}{m^3}\,.$$

Vom avea

$$e^{-\frac{1}{2m}}\,e^{\frac{1}{3m^2}}\,e^{-\frac{1}{4m^3}}\,e^{\frac{\alpha}{m^4}} = 1-\frac{1}{2m}+\frac{11}{24m^2}-\frac{21}{48m^3}+\frac{\beta}{m^4}$$

unde β este finit pentru $m=\infty$.

Rezultă atunci că vom avea

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e\left(1-\frac{1}{2m}+\frac{11}{24m^2}-\frac{21}{48m^3}+\frac{\beta}{m^4}\right).$$

Din această formulă deducem succesiv

$$m\left(1+\frac{1}{m}\right)^m - me = e\left(-\frac{1}{2}+\frac{11}{24m}-\frac{21}{48m^2}+\frac{\beta}{m^3}\right)$$

$$m^2\left(1+\frac{1}{m}\right)^m - m^2e+\frac{me}{2} = e\left(\frac{11}{24}-\frac{21}{48m}+\frac{\beta}{m^2}\right)$$

$$m^3\left(1+\frac{1}{m}\right)^m - m^3e+\frac{m^2e}{2}-\frac{11me}{24} = e\left(-\frac{21}{48}+\frac{\beta}{m}\right).$$

Făcând în aceste formule pe m să tindă către ∞, găsim că limitele membrilor întâi sunt

$$-\frac{e}{2}, \frac{11e}{24}, \frac{21e}{48},$$

adică ceeace trebuia demonstrat.

Au rezolvat problema D-nii: G. G. CONSTANTINESCU, ŞTEFAN E. OLTEANU, GEORGE SILAŞ.

PROBLEMA 4190. *Să se studieze funcţiunea*

$$y = 2(x+2) - 3\log\frac{x-1}{x+1},$$

şi din studiul acestei funcţiuni să se deducă inegalitatea

$$e^x \geqslant 3e^2\sqrt[3]{3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} \qquad (x \geqslant 1).$$

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluţie dată de D-nii: MIRCEA A. NEGREA, HARALAMB P. IONESCU-BISS, MARIUS MARGULIUS, ALEXEI ARŞAVSCHI, NICULAE PATRAULEA, EMILIAN I. MAREŞ, GRIGORE MARTEŞ, PANAIT C. MAZILU, EMILIAN MEREUŢĂ, ŞTEFAN OLTEANU, N. N. ALDEA şi IOAN CURCHI.

Pentru ca funcţiunea să fie reală trebue ca

$$\frac{x-1}{x+1} > 0,$$

adică x să fie exterior intervalului $(-1, +1)$. Derivata funcţiunei este

$$y' = 2\frac{x^2-4}{x^2-1},$$

care se anulează pentru valorile $x=-2$ şi $x=+2$. Pentru prima, funcţiunea este maximă, iar pentru a doua, minimă şi anume

$$y_M = -3\log 3 \quad , \quad y_m = 8+3\log 3.$$

Cum pentru $x=\pm\infty$ valoarea fracţiei de sub semnul logaritm este 1, avem

$$y_{p.\,x=+\infty} = +\infty \quad , \quad y_{p.\,x=-\infty} = -\infty.$$

Pentru $x=1$ fracţia se anulează şi deci: $y=+\infty$, iar pentru $x=-1$ fracţia devine infinită şi deci: $y=-\infty$.

Tabloul variaţiei funcţiunei este

x	$-\infty$		-2		-1		$+1$		$+2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$				$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-3\log 3$	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	$8+3\log 3$	$\nearrow$	$+\infty$

Graficul se face cu uşurinţă. Curba are trei asimptote: dreptele de ecuaţii

$$x=-1 \quad , \quad x=+1 \quad , \quad y=2(x+2).$$

Consecinţă. Pentru $x \geqslant 1$ vom avea

$$2(x+2) - 3\log\frac{x-1}{x+1} \geqslant 8+3\log 3,$$

de oarece valoarea din dreapta este minimul funcţiunei. Sau

$$2(x-2) \geqslant 3\log\frac{x-1}{x-1} + 3\log 3$$

$$\therefore \quad x-2 \geqslant \log\sqrt{\left(3\frac{x-1}{x+1}\right)^3}$$

şi cum funcţiunea exponenţială este crescătoare

$$e^{x-2} \geqslant 3\sqrt{3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3} \qquad (x \geqslant 1)$$

care este tocmai inegalitatea din enunţ.

Tot aşa, pentru $x \leqslant -1$ vom avea

$$2(x+2) - 3 \log \frac{x-1}{x+1} \leqslant -3 \log 3.$$

Să arătăm că această inegalitate nu duce la ceva nou.

Punem:

$$x = -x'.$$

Atunci: $x' \geqslant 1$

şi

$$-2(x'-2) - 3 \log \frac{-x'-1}{-x'+1} \leqslant -3 \log 3,$$

sau

$$-2(x'-2) + 3 \log \frac{x'-1}{x'+1} \leqslant -3 \log 3,$$

şi schimbând semnul

$$2(x'-2) - 3 \log \frac{x'-1}{x'+1} \geqslant 3 \log 3,$$

adică am revenit la primul caz.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4428. *Dacă înlocuim literele cu cifre, cuvântul* **patrat** *poate reprezenta un patrat?*

I. IONESCU.

Fie P patratul căutat în condiţiunile problemei, adică de a fi de şase cifre, având identice a doua cu a cincea şi a treia cu ultima, socotite dela stânga spre dreapta. Valoarea lui P va fi:

$$P = 100000\,p + 1001\,(10\,a + t) + 100\,r,$$

$$\therefore P = \mathfrak{M}9 + p + r + 2(a+t) = \mathfrak{M}7 + 2(r-p)$$

$$= \mathfrak{M}11 + (r-p) = \mathfrak{M}13 + 4(p-r).$$

Dar P fiind un patrat nu putem avea de cât:

$$P = \mathfrak{M}9 + 0, 1, 4 = \mathfrak{M}7 + 0, 1, 2, 4 = \mathfrak{M}11 + 0, 1, 3, 4, 5, 9$$
$$= \mathfrak{M}13 + 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12.$$

Se cunosc ultimele cifre cu care se poate termina un patrat. (A se vedea *Gazeta Matematică,* Anul XXXV, pag. 134). Alegem o grupă de patru cifre pentru *trat,* astfel ca grupa să înceapă şi să se termine cu o aceeaşi cifră *t.* Scriem la stânga acestui grup cifra *a* a zecilor şi formăm grupa *atrat.* La stânga lui scriem o cifră semnificativă *p* aşa ca pe rând ea să satisfacă condiţiunea ca P să fie patrat. Dacă nu se poate trecem la alt grup. Altfel extragem rădăcina lui P format şi, dacă ea este exactă, fără rest, avem o soluţie a problemei. In cazul contrariu luăm o altă grupă şi procedăm la fel.

Astfel o grupă *trat* admisibilă este 1016. Ea ne dă grupa *atrat* = 16016. Aceasta este $\mathfrak{M}9 + 5$. Ca P să fie $\mathfrak{M}9 + 0, 1, 4$ ar trebui să luăm $p = 4, 5, 8$. Atunci $2(r - p) = 2(0 - p) = -2p$ este $-8, -10, -16$, adică resturile lui P prin 7 ar fi 6, 4, 5. Numai al doilea este admisibil. Deci $p = 5$; adică $(r - p) = -5$. Deci restul împărţirii lui P prin 11 este 6, inadmisibil. Trecem deci la altă grupă.

Procedând în modul acesta se găsesc numai soluţiile:

$$201601 = 449^2;\ 204304 = 452^2;\ 301401 = 549^2;\ 304704 = 552^2.$$

I. I.

Singurul corespondent care a căutat să elimine din încercările de extrageri de rădăcini a fost D-l MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU (Liceul Fraţii Buzeşti, Craiova). D-sa însă a pierdut a doua soluţie de mai sus. Ceilalţi corespondenţi au căutat soluţiile în table de patrate.

Au dat exact cele patru soluţiuni D-nii: D. P. ROGER, V. SIARA, G. VASILACHE, A. I. CORNĂŢEANU, I. G. BOGDAN.

Au dat soluţiile de mai sus, şi încă altele presupunând că unele din literele *a, p, r, t* ar putea fi egale D-nii: D. ST. MIHALCEA, V. G. BOGZA, A. C. JIPA, I. E. LĂZĂRESCU, C. I. POTESCU, V. N. BUCUR, V. D. D. ENĂŞESCU, I. I. BUZINCU, P. P. COJOCARU, I. STREDER, A. IOANEI V. ROMULUS, E. IORDACHE, D. C. I. CĂLIN, D. G. DUMBRĂVESCU.

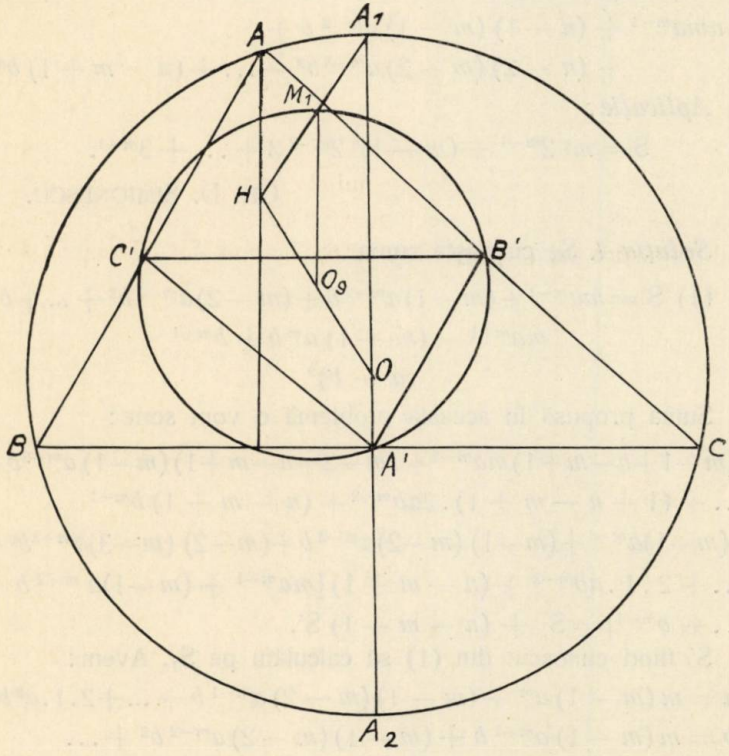
D-l G. G. CARDARA a dat altă interpretare enunţului. D-sa a înlocuit fiecare literă cu rangul ei în alfabet şi a găsit numărul 1612118121, care nu e patrat.

PROBLEMA 4469. *Fie* A', B', C' *mijloacele laturilor triunghiului* A, B, C *şi* A_1, B_1, C_1 *punctele unde bisectoarele exterioare întâlnesc cercul circumscris lui. Dacă* M_1, M_2, M_3 *sunt mijloacele segmentelor* A_1H, B_1H, C_1H, *să se arate că dreptele* $A'M_1$, $B'M_2$, $C'M_3$ *sunt concurente.*

TH. GH. COCEA.

Soluţie dată de D-l A. D. STOICA (Lic. Marele Voevod Mihai, Bucureşti).

Fie O_9 centrul cercului celor 9 puncte al triunghiului ABC. Cercurile O, O_9 sunt omotetice, raportul de omotetie fiind 1/2, iar centrul de omotetie fiind H. Rezultă că punctele M_1, M_2, M_3 se găsesc pe O_9.



A_1 fiind mijlocul arcului BAC, se găseşte pe mediatricea OA'. Cum O_9 şi M_1 sunt mijloacele lui OH şi A_1H urmează că M_1O_9 este paralelă cu $A'A_1$ deci perpendiculară pe C'B'. De aici, M_1 este

mijlocul arcului $C'M_1B'$ în cercul O_9, deci $A'M_1$ este bisectoarea interioară a unghiului A' în triunghiul A'B'C'. Dreptele $A'M_1$, $B'M_2$, $C'M_3$ se întâlnesc deci în centrul cercului înscris triunghiului A'B'C'.

Soluții foarte bune pe alte căi, dela D-nii: V. CSEKE (Student, Cluj). LEBĂDĂ D. (Lic. Militar, Iași), NIȚESCU C. GH. (Lic. Gh. Barițiu, Cluj) și I. I. ȚIȚEICA (Buzău).

D-l A. D. STOICA demonstrează pe aceeași cale că dacă A_2, B_2, C_2 sunt punctele unde bisectoarele interioare ale triunghiului ABC întâlnesc cercul O, iar N_1, N_2, N_3 sunt mijloacele segmentelor A_2H, B_2H, C_2H, grupele de drepte ($A'M_1$, $B'N_2$, $C'N_3$), ($B'M_2$, $C'N_3$, $A'N_1$), ($C'M_3$, $A'N_1$, $B'N_2$) sunt concurente în centrele I'_a, I'_b, I'_c ale cercurilor exînscrise triunghiului A'B'C'.

PROBLEMA 4505. *Să se calculeze suma:*

$$S = nma^{m-1} + (n-1)(m-1)a^{m-2}b + \\ + (n-2)(m-2)a^{m-3}b^2 + \ldots + (n-m+1)b^{m-1}.$$

Aplicație:

$$S = m^2 2^{m-1} + (m-1)^2 2^{m-2} 3 + \ldots + 3^{m-1}.$$

GH. D. SIMIONESCU.

Soluția I. Se cunoaște suma:

$$(1)\quad S' = ma^{m-1} + (m-1)a^{m-2}b + (m-2)a^{m-3}b^2 + \ldots + b^{m-1} \\ = \frac{ma^{m+1} - (m+1)a^m b + b^{m+1}}{(a-b)^2}.$$

Suma propusă în această problemă o vom scrie:

$$S = (m-1+n-m+1)ma^{m-1} + (m-2+n-m+1)(m-1)a^{m-2}b + \ldots \\ \ldots + (1+n-m+1).2ab^{m-2} + (n-m+1)b^{m-1} \\ = m(m-1)a^{m-1} + (m-1)(m-2)a^{m-2}b + (m-2)(m-3)a^{m-3}b^2 + \ldots \\ \ldots + 2.1.ab^{m-2} + (n-m+1)[ma^{m-1} + (m-1)a^{m-2}b + \ldots \\ \ldots + b^{m-1}] = S_1 + (n-m+1)S'.$$

S' fiind cunoscut din (1) să calculăm pe S_1. Avem:

$$S_1 . a = m(m-1)a^m + (m-1)(m-2)a^{m-1}b + \ldots + 2.1.a^2b^{m-2}$$

$$S_1 . b = m(m-1)a^{m-1}b + (m-1)(m-2)a^{m-2}b^2 + \ldots \\ \ldots + 3.2.a^2b^{m-2}2 + a.b^{m-1}$$

$$\therefore S_1(b-a) = -m(m-1)a^m + 2ab[(m-1)a^{m-2} + (m-2)a^{m-3}b + \ldots \\ \ldots + b^{m-2}.$$

Insă toată paranteza mare e o sumă de forma (1) în care se înlocueşte m prin $(m-1)$. Aşa dar:

$$S_1(b-a) = -m(m-1)a^m + 2ab\frac{(m-1)a^m - ma^{m-1}b + b^m}{(a-b)^2}.$$

Inlocuind acum pe S_1 şi S' obţinem:

$$S = \frac{(m-1)a^m}{a-b} - 2ab\frac{(m-1)a^m - ma^{m-1}b + b^m}{(a-b)^3} + (n-m+1)\frac{ma^{m+1} - (m+1)a^m b + b^{m+1}}{(a-b)^2}$$

şi după ce facem toate calculele:

$$S = \frac{nma^{m+2} - (2nm+n+m-1)a^{m+1}b + (n-m-1)ab^{m+1} + (n+1)(m+1)a^m b^2 - (n-m+1)b^{m+2}}{(a-b)^3}.$$

Aplicaţie. Pentru $n = m$, $a = 2$, $b = 3$ obţinem:

$$S = 5 \cdot 3^{m+1} - 2^m(m^2 + 6m + 15).$$

Soluţia II dată de D-l D. MAVRODIN (student).
Suma dată o putem scrie:

$$(1)\quad S = \sum_{i=1}^{m}(m+1-i)(n+1-i)a^{m-i}b^{i-1} = (m+1)(n+1)S_1 - (m+n+2)S_2 + S_3$$

unde am notat:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{m} a^{m-i}b^{i-1}\ ;\ S_2 = \sum_{i=1}^{m} ia^{m-i}b^{i-1}\ ;\ S_3 = \sum_{i=1}^{m} i^2 a^{m-i}b^{i-1}.$$

Dar se ştie că $S_1 = \frac{a^m - b^m}{a-b}$ şi se observă că:

$$S_2 = \frac{d}{db}(bS_1) = \frac{a^{m+1} - (m+1)ab^m + mb^{m+1}}{(a-b)^2}$$

$$S_3 = \frac{d}{db}(bS_2) = \frac{a^{m+2} + a^{m+1}b - (m+1)^2a^2b^m + (2m^2+2m-1)ab^{m+1} - m^2b^{m+2}}{(a-b)^3}.$$

Inlocuind expresiile lui S_1, S_2, S_3 în (1) şi făcând calculele găsim pentru S expresia dată la soluţia I.

Soluţia III dată de D-l GRIGORE MARTEŞ (şcoala navală).

Inmulţind cu *da* ambii membri şi integrând obţinem:

$$\int S\,da = na^m + (n-1)a^{m-1}b + (n-2)a^{m-2}b^2 + \ldots + (n-m+1)b^{m-1}a$$

$$= b^m\left[n\left(\frac{a}{b}\right)^m + (n-1)\left(\frac{a}{b}\right)^{m-1} + \ldots + (n-m+1)\frac{a}{b}\right]$$

$$= b^m\left[nx^m + (n-1)x^{m-1} + \ldots + (n-m+1)x\right] = b^m E$$

unde s'a notat paranteza cu E, iar $\frac{a}{b} = x$.

Să considerăm identitatea:

$$x^m y^n + x^{m-1}y^{n-1} + \ldots + xy^{n-m+1} = \frac{x^{m+1}y^{n+1} - xy^{n-m+1}}{xy-1}.$$

Dacă derivăm această identitate în raport cu y şi facem apoi $y = 1$ partea I devine E, aşa încât vom avea:

$$E = \frac{nx^{m+2} - (n+1)x^{m+1} - (n-m)x^2 + (n-m+1)x}{(x-1)^2}.$$

Inlocuind aci pe $x = \frac{a}{b}$ obţinem:

$$\int S\,da = b^m E = \frac{na^{m+2} - (n+1)a^{n+1}b - (n-m)a^2b^m + (n-m+1)ab^{m+1}}{(a-b)^2}$$

de unde prin derivare în raport cu a găsim expresia lui S dată la prima soluţie.

Observaţii. 1°. D-l D. MAVRODIN observă că polinomul dela numărătorul lui S e divizibil cu $(a-b)^3$ oricare ar fi m întreg şi pozitiv.

2°. Din aplicaţia dată se vede că în cazuri numerice, mai ales când a şi b sunt consecutivi, expresia se pune sub formă mai simplă.

Notă. După redijarea problemei s'au primit încă două soluţiuni dela D-l M. AMĂRĂŞTEANU dintre care prima greşită, iar a doua principial foarte bună dar calculul n'a fost dus până la sfârşit.

PROBLEMA 4535. *Să se găsească trei numere întregi consecutive ale căror patrate să aibă ca sumă un număr de forma* **aa... a.**

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-l I. I. ŢIŢEICA (Lic. Militar «N. Filipescu»). Dacă n este un număr întreg, va trebui

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 3n^2 + 2 = aa\ldots a$$

$$\therefore \qquad n^2 = \frac{aa\ldots a - 2}{3} \cdot \qquad (1)$$

Se vede că $a \neq mult.\ 3$. Dând lui a în (1) valorile succesive ale cifrelor nedivizibile cu 3 dela 1 la 9, şi luând pentru $aa\ldots a - 2$ atâtea cifre încât acest număr să se împartă exact cu 3, se formează următorul tabel, uşor de citit:

a	$aa\ldots a - 2$	n^2
1	$\underbrace{11\ldots109}_{3m}$	$\underbrace{37037\ldots03703}_{3m-1}$
2	$\underbrace{22\ldots220}_{3m}$	$\underbrace{74074\ldots0740}_{3m-1}$
4	$\underbrace{44\ldots442}_{3m}$	$\underbrace{148148\ldots14814}_{3m}$
5	$\underbrace{55\ldots553}_{3m}$	$\underbrace{185185\ldots1851}_{3m}$
7	$\underbrace{77\ldots775}_{3m}$	$\underbrace{259259\ldots25925}_{3m}$
8	$\underbrace{88\ldots886}_{3m}$	$\underbrace{296296\ldots2962}_{3m}$

unde indicele arată numărul de cifre al părţii subliniate.

Din coloana lui n^2 se vede că numai forma

$$n^2 = 259259\ldots25925 \qquad (2)$$

poate fi acceptabilă, căci pentru celelalte forme, ultimele 2 cifre nu sunt terminaţiuni de patrate perfecte.

Forma (2) se mai poate scrie

$$n^2 = \underbrace{259259\ldots259}_{3m} \times 4 \times 25 + 25 = 25\left[4 \times \underbrace{259259\ldots259}_{3m} + 1\right].$$

Pentru ca membrul al doilea să fie patrat perfect este necesar şi suficient ca

$$N = 4 \times \underbrace{259259\ldots259}_{3m} + 1$$

să fie patrat perfect, ceeace nu poate avea loc decât pentru $m = 0$, căci pentru alte valori N se termină cu 7. Pentru $m = 0$ avem

$$n^2 = 25$$

de unde soluţia

$$4^2 + 5^2 + 6^2 = 77.$$

Au rezolvat problema pe alte căi dând soluţia exactă D-nii: M. AMĂRĂŞTEANU (Craiova), D. CERCELARU (Craiova) şi S-lt. M. GRUMĂZESCU.

PROBLEMA 4544. *Notaţiile fiind cele obişnuite, să se stabilească relaţia:*

$$\left[\frac{r_a - r_b}{\sin\frac{A-B}{2}}\right]^2 + \left[\frac{r_b - r_c}{\sin\frac{B-C}{2}}\right]^2 + \left[\frac{r_c - r_a}{\sin\frac{C-A}{2}}\right]^2 = 8R\,(4R + r).$$

M. VELEA.

Soluţie dată de D-nii: TUDOR STOICESCU, V. BOGZA (Roman), CĂLIN I. C. DIMITRIU şi I. STREDER (lic. Mil. Iaşi).

Pornim dela relaţiile cunoscute:

$$r_a = 4R \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\ldots \text{ etc.}$$

Rezultă:

$$r_a - r_b = 4R \cos\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\right)$$

$$\therefore \quad r_a - r_b = 4R \sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2} .$$

Ţinând seama şi de relaţia:

$$\Sigma \cos^2\frac{A}{2} = 2 + \frac{r}{2R}$$

partea I din relaţia propusă devine:

$$\Sigma\left[\frac{r_a - r_b}{\sin\frac{A-B}{2}}\right]^2 = 16R^2 \Sigma \cos^2\frac{A}{2} = 8R(4R + r)$$

q. e d.

Soluţie dată de D-nii: GR. MARTEŞ şi CĂLIN I. C. DIMITRIU.

Ne vom folosi de formulele cunoscute:

$$r_a = \frac{S}{p-a} \text{ etc...}, \sin\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{c}\cos\frac{C}{2} = \frac{a-b}{c}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \text{ etc.}$$

$$\Sigma a^2 = 2p^2 - 8Rr - 2r^2 \quad ; \quad abc = 4Rpr.$$

Avem:

$$\Sigma\left[\frac{r_a - r_b}{\sin\frac{A-B}{2}}\right]^2 = \Sigma\left[\frac{\frac{S}{p-a} - \frac{S}{p-b}}{\sin\frac{A-B}{2}}\right]^2$$

$$= \Sigma \frac{(a-b)^2 S^2 c^2 ab}{(p-a)^2 (p-b)^2 (a-b)^2 p(p-c)}$$

$$= abc \Sigma \frac{c}{(p-a)(p-b)} = pabc \frac{\Sigma a(p-a)}{S^2}$$

$$= pabc \frac{2p^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{S^2} = \frac{2prabc(4R + r)}{S^2} = 8R(4R + r).$$

G. D. S.

PROBLEMA 4604. *Ştiind că* **a, b, c** *sunt cifre de parităţi consecutive, se cere să se arate dacă într'un sistem de numeraţie oarecare un număr de patru cifre de forma* **aabb** *poate fi patratul unui număr de două cifre de forma* **cc.**

V. THÉBAULT.

Să considerăm cazul mai general când cifrele a, b, c sunt în progresie aritmetică de raţie r.

Insemnând cu x baza de numeraţie în care numărul de 4 cifre $aabb$ este patratul numărului de 2 cifre cc, avem

$$ax^3 + ax^2 + bx + b = (cx + c)^2 = c^2 (x + 1)^2$$

sau simplificând cu $x + 1 \neq 0$, găsim

$$a(x^2 - 1) + a + b = c^2 (x + 1) \qquad (1)$$

care, pentru a avea loc în numere întregi, arată că $a + b$ trebue să se dividă prin $x + 1$ şi cum a şi b sunt mai mici ca x, rezultă

$$a + b = x + 1. \qquad (2)$$

Ducând pe (2) în (1) se găseşte:

$$a(x - 1) = c^2 - 1. \qquad (3)$$

Reciproc plecând dela (2) şi (3) se găseşte (1). Am ajuns astfel la concluzia: *pentru ca* **aabb** *să fie patratul lui* **cc** *în sistemul* **x** *este necesar şi suficient ca între numerele* **a, b, c, x** *să existe relaţiunile (2) şi (3).*

Impunem acum condiţia ca a, b, c să fie în *progresie aritmetică de raţie* r. După ordinea de mărime ale celor 3 cifre, se deosebesc 6 cazuri diferite.

Cazul 1^0. $b < a < c$ cu $b = a - r$, $c = a + r$ care duse în (2) şi (3) dau

(4) $x = 2a - r - 1$ şi $a^2 - (3r + 2)a - r^2 + 1 = 0$. (5)

Cazul 2^0. $c < a < b$, care conduce la

$x = 2a + r - 1$ şi $a^2 + (3r - 2)a - r^2 + 1 = 0$.

Cazul 3^0. $a < b < c$, conduce la

$x = 2a + r - 1$ şi $a^2 - (3r + 2)a - 4r^2 + 1 = 0$

Cazul 4^0. $c < b < a$, conduce la

$$x = 2a - r - 1 \quad \text{şi} \quad a^2 + (3r - 2)\,a - 4r^2 + 1 = 0.$$

Cazul 5^0. $a < c < b$, care duce la

$$x = 2a + 2r - 1 \quad \text{şi} \quad a^2 - 2a - r^2 + 1 = 0. \tag{6}$$ (7)

Cazul 6^0. $b < c < a$ conduce la

$$x = 2a - 2r - 1 \quad \text{şi} \quad a^2 - 2a - r^2 + 1 = 0.$$

Problema se rezolvă căutând soluţii întregi pentru a din ecuaţiile în a dela fiecare caz, care împreună cu x să dea soluţii întregi pentru c din (3). Vom expune numai cercetările pentru cazurile 1^0 şi 5^0, care dau soluţii. Cercetările se fac la fel şi la celelalte cazuri, care însă nu dau soluţii.

Cazul 1^0. Pentru ca (5) să dea soluţii întregi pentru a, trebue ca

$$(3r + 2)^2 + 4r^2 - 4 = y^2$$

$$\therefore \qquad 13r^2 + 12r = y^2 = r^2t^2 \tag{8}$$

y şi t fiind numere întregi pozitive, iar $r \neq 0$.

Din (8), după simplificarea cu r rezultă

$$13r + 12 = r\,t^2 \tag{9}$$

care arată că r trebue să fie între divizorii lui 12, adică între numerele 1, 2, 3, 4, 6, 12. Ducând aceste valori în (9) se găsesc următoarele sisteme de valori admisibile pentru r şi t:

$$r = 1 \text{ cu } t = 5 \quad \text{şi} \quad r = 4 \text{ cu } t = 4.$$

Ducând aceste valori în (8), (5), (4), (3), (2) găsim

$$r = 1\ ;\ a = 5\ ;\ x = 8\ ;\ b = 4\ ;\ c = 6$$

şi

$$r = 4\ ;\ a = 15\ ;\ x = 25\ ;\ b = 11\ ;\ c = 19$$

deci concluzia: Când $\div\ b\,.\,a\,.\,c$, avem 2 soluţiuni şi anume:

$$\overline{5}\ \overline{5}\ \overline{4}\ \overline{4} = (\overline{6}\ \overline{6})^2 \quad \text{în baza 8}$$

$$\overline{15}\ \overline{15}\ \overline{11}\ \overline{11} = (\overline{19}\ \overline{19})^2 \quad \text{în baza 25}$$

Cazul 5^0. Ecuaţia (7) dă

$$a = r + 1$$

care conduce la

$$x = 4r + 1 \quad ; \quad b = 3r + 1 \quad ; \quad c = 2r + 1$$

deci, *oricare ar fi* $\mathbf{r} > 0$, *în baza de numeraţie* $\mathbf{4r + 1}$ *avem*

$$\overline{r+1}\ \ \overline{r+1}\ \ \overline{3r+1}\ \ \overline{3r+1} = \overline{(2r+1}\ \ \overline{2r+1)^2}.$$

Exemple:

$r = 1$, $\overline{2}\ \overline{2}\ \overline{4}\ \overline{4} = \overline{(3}\ \overline{3)^2}$ în baza 5

$r = 2$, $\overline{3}\ \overline{3}\ \overline{7}\ \overline{7} = \overline{(5}\ \overline{5)^2}$ în baza 9

$r = 3$, $\overline{4}\ \overline{4}\ \overline{10}\ \overline{10} = \overline{(7}\ \overline{7)^2}$ în baza 13

. . . . . .

Problema generală are 2 soluţii în cazul 2^0 şi o infinitate de soluţii în cazul 5^0.

Este de observat că în cazul 5^0 *numerele* **a, c, b, x** *formează o progresie aritmetică de raţie* **r** *şi anume*

$$\div\ a.\ c.\ b.\ x.$$

G-L GH. BUICLIU.

Notă. 1^0. D-l M. L. A. NEGREA (Brăila) a rezolvat foarte bine problema, în cazul enunţului găsind soluţia

$$3377 = 55^2 \text{ în baza } 9.$$

2^0. D-şoara ALEXANDRA AL. VASILESCU (Lic. Carmen Sylva Timişoara) a rezolvat problema parţial stabilind numai ecuaţiile de gradul II care dau baza şi arătând că acele ecuaţii au rădăcini reale.

3^0. D-l V. THÉBAULT a propus în *Mathesis* o problemă analoagă cerând ca cifrele *a, b, c* să fie consecutive.

Soluţia acelei probleme s'a dat la pag. 106, Vol. L al acelei reviste. Soluţiile găsite sunt prima dela cazul 1^0 şi prima dela cazul 5^0 studiate mai sus.

4^0. D-l D. D. MATEI a găsit soluţia exactă.

5^0. Asupra numerelor *aabb*, patrate de *cc*, se poate consulta şi nota dela pag. 54 *Revista Matematică din Timişoara* Vol. XVI.

6^0. Pentru rezolvarea problemei am stabilit ecuaţia în *a*. Se ajunge la acelaşi rezultat stabilind ecuaţiile corespunzătoare în *b, c* sau *x*.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4646. *Să se arate că dacă avem.*

$$a+b+c+d=0$$

avem şi:

$$6\,\Sigma a^5 = 5\,\Sigma a^2 \,.\, \Sigma a^3$$

$$6\,\Sigma a^7 = 7\,\Sigma a^3\,(\Sigma a^4 + 2abcd).$$

MAIOR I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-nii: PETRE P. COJOCARU (cl. VII Lic. Militar Iaşi), I. A. MERBL, ŞT. MOISOVICI (cl. VIII Col. Carol I) şi MIRCEA L. A. NEGREA (Brăila).

Considerând cantităţile *a, b, c, d* drept rădăcinile unei ecuaţii de gradul patru, de forma:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Şi dacă:

$$S_\alpha = a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha + d^\alpha$$

atunci aplicând formulele lui NEWTON pentru S_2, S_3, S_4, S_5 şi S_7, găsim că:

$$6\,\Sigma a^5 = 5\,\Sigma a^2 \,.\, \Sigma a^3 = 30p\,.\,r$$

$$6\,\Sigma a^7 = 7\,\Sigma a^3\,(\Sigma a^4 + 2abcd) = 42p\,(q - r^2).$$

Soluţie dată de D-nii: EUGEN MARCOVICI (Lic. Naţional Iaşi) şi M. F. AMĂRĂŞTEANU (Craiova).

Prin calcul direct obţinem:

$$\Sigma a^2 = 2[(a+b)^2 - (ab+cd)]$$

$$\Sigma a^3 = 3\,(a+b)\,(cd-ab)$$

$$\Sigma a^5 = 5\,(a+b)\,(cd-ab)\,[(a+b)^2 - (cd+ab)].$$

Prin urmare:

$$6\,\Sigma a^5 = 5\,\Sigma a^2\,\Sigma a^3.$$

De asemenea:

$$\Sigma a^4 = 2[(a+b)^4 - 2(a+b)^2(cd+ab) + a^2b^2 + c^2d^2]$$

$$\Sigma a^7 = 7\,(a+b)^5\,(cd-ab) - 14\,(a+b)^3\,(cd+ab)\,(cd-ab) + 7\,(a+b)\,(c^3d^3 - a^3b^3).$$

Şi deci:

$$6 \Sigma a^7 = 7 \Sigma a^3 (\Sigma a^4 + 2abcd).$$

Observaţiuni. 1. Domnul MOISOVICI ŞT. arată că o problemă analoagă a fost publicată de D-l profesor CRĂCIUNESCU în R. M. T. Nr. 5, pag. 75, Anul VIII.

2. In *«Théorie des Nombre»* par E. LUCAS pag. 123 avem:

$$\Sigma A = 0$$

$$\Sigma A^2 = 4 \Sigma a^2$$

$$\Sigma A^3 = 24abc$$

$$\Sigma A^4 = 4 \Sigma a^4 + 24 \Sigma a^2 b^2$$

$$\Sigma A^5 = 80abc \cdot \Sigma a^2$$

$$\Sigma A^7 = 56abc (3 \Sigma a^4 + 10 \Sigma a^2 b^2)$$

$$ABCD = \Sigma a^4 - 2 \Sigma a^2 b^2$$

unde

$$A = a - b - c \quad ; \quad B = b - c - a$$

$$C = c - a - b \quad ; \quad D = a + b + c.$$

Făcând diverse combinaţiuni, convenabile, găsim relaţiunile din problemă.

I. L.

EXERCIŢII

1. Notaţiile fiind cele referitoare la un triunghiu oarecare, să se demonstreze relaţia:

$$r_a r_b \sin\frac{C}{2} \sin\frac{A-B}{2} + r_b r_c \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B-C}{2} + r_c r_a \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C-A}{2} = 0.$$

TUDOR STOICESCU.

R. Dau factor comun pe $r_a r_b r_c$ şi am:

$$\Sigma r_a r_b \sin\frac{C}{2} \sin\frac{A-B}{2} = r_a r_b r_c \Sigma \frac{\sin\frac{C}{2} \sin\frac{A-B}{2}}{r_c}$$

$$= r_a r_b r_c \Sigma \frac{\sin\frac{C}{2} \sin\frac{A-B}{2}}{p \operatorname{tg}\frac{C}{2}} = \frac{r_a r_b r_c}{p} \Sigma \sin\frac{A-B}{2} \cos\frac{C}{2}$$

$$= \frac{r_a r_b r_c}{p} \Sigma \sin\frac{A-B}{2} \sin\frac{A+B}{2} = \frac{r_a r_b r_c}{2p} \Sigma [\cos B - \cos A] = 0.$$

2. In orice triunghiu:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{4}+\operatorname{tg}\frac{B}{4}+\operatorname{tg}\frac{C}{4}+\sum\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}=\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}+1.$$

SUB-LOCOT. IOAN C. SAVIN.

R. Se porneşte dela egalitatea:

$$\frac{A+B+C}{4}=45^0.$$

De unde:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{4}+\frac{B}{4}+\frac{C}{4}\right)=\operatorname{tg}45^0=1.$$

Care se mai poate scrie:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{4}+\operatorname{tg}\frac{B}{4}+\operatorname{tg}\frac{C}{4}-\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}}{1-\left(\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}+\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}+\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}\right)}=1.$$

De unde:

$$\sum\operatorname{tg}\frac{A}{4}+\sum\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}=1+\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}\ .$$

Q. E. D.

3. Notaţiile fiind cele relative la un triunghiu, să se demonstreze identitatea:

$$\frac{\left[\frac{a-b}{r_c}\right]^7+\left[\frac{b-c}{r_a}\right]^7+\left[\frac{c-a}{r_b}\right]^7}{\left[\frac{a-b}{r_c}\right]^4+\left[\frac{b-c}{r_a}\right]^4+\left[\frac{c-a}{r_b}\right]^4}=7\cdot\frac{R^2}{p^2}\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}.$$

TUDOR STOICESCU.

R. Voi arăta întâi că $\sum\frac{a-b}{r_c}=0$;

în adevăr,

$$a-b=4R\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2},\ \text{iar}\ \frac{a-b}{r_c}=\frac{4R}{p}\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

prin înlocuirea lui r_c prin $p\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ deci

$$\frac{a-b}{r_c}=\frac{4R}{p}\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{4R}{p}\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}=\frac{2R}{p}(\cos B-\cos A)$$

adică:

$$\sum\frac{a-b}{r_c}=\frac{2R}{p}\sum(\cos B-\cos A)=0.$$

Din identitatea cunoscută:

$$2(x^7 + y^7 + z^7) = 7xyz(x^4 + y^4 + z^4)$$

care are loc pentru $x + y + z = 0$ (Calcul algebric, TRAIAN LALESCU pag. 15) deduc relaţia de sus punând

$$x = \frac{a-b}{r_c}, \quad y = \frac{b-c}{r_a}, \quad z = \frac{c-a}{r_b}$$

şi ţinând seamă că:

$$\frac{a-b}{r_c} \cdot \frac{b-c}{r_a} \cdot \frac{c-a}{r_b} = \frac{8R^3}{p^3}(\cos B - \cos A)(\cos C - \cos B)(\cos A - \cos C)$$

$$= \frac{8R^3 r}{s^2} \sin\frac{A-B}{2} \sin\frac{B-C}{2} \sin\frac{C-A}{2} \cdot \frac{r}{4a} = \frac{2R^2}{p^2} \sin\frac{A-B}{2} \sin\frac{B-C}{2} \sin\frac{C-A}{2}.$$

PROBLEME PROPUSE

4708*). Să se rezolve ecuaţiunea:

$$\cos 5x - 5\cos 3x = m.$$

Discuţie. GH. POPESCU-BOTOŞANI.

4711. Care triunghiuri se pot desface în două triunghiuri asemenea printr'o tăietură rectilinie dusă prin unul din vârfuri?

I. IONESCU.

4712. Să se formeze un patrat de şapte cifre scriind odată cifra 3 şi de câte două ori pe fiecare din cifrele 0, 8 şi 9.

G-L GH. BUICLIU.

4713. Să se demonstreze că dacă a şi b sunt două numere prime între ele, expresiunea

$$(a^6 + b^6 - 1)(a^6 + b^6 - 2)$$

se împarte exact cu 252. P. SERGESCU.

4714. Perpendicularele ridicate în A pe laturile AB, AC ale triunghiului ABC întâlnesc dreapta BC în C', B'.

Să se arate că paralelele duse prin B' şi C' respectiv la AB şi AC se întâlnesc pe înălţimea vârfului A.

C. IONESCU-BUJOR.

*) Problema 4708 din „G. M" — XLI — 648 se anulează şi se înlocueşte cu prezenta.

4715. Trei cercuri O_a, O_b, O_c se taie două câte două în C, C'; A, A'; B, B'. Dreptele ce unesc centrele cercurilor ABC, A'BC, AB'C, ABC' respectiv cu centrele cercurilor A'B'C', AB'C', A'BC', A'B'C sunt concurente.

ADRIAN C. GHEORGHIU.

4716. Se consideră ecuațiunile:

$$x^2 + ax + b = 0 \; ; \; x^2 + px + q = 0.$$

1°. Să se formeze ecuațiunea care are drept rădăcini:

$$X_1 = x'_1 x'_2 + x'_1 x''_2 \; ; \; X_2 = x'_1 x''_2 + x''_1 x'_2$$

unde x'_1, x''_1 sunt rădăcinile primei ecuațiuni, iar x'_2, x''_2 sunt rădăcinile ecuațiunii a doua.

2°. Dacă ecuațiunea rezultantă are rădăcinile reale, ce putem spune despre ecuațiunile date?

GH. D. SIMIONESCU.

4717. Să se rezolve sistemul

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + \ldots + x_p + \ldots + x_n + 1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + \ldots + px_p + \ldots + nx_n + n + 1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + 2^{n-1} \cdot x_2 + \ldots + p^{n-1} x_p + \ldots + n^{n-1} x_n + (n+1)^{n-1} = 0 \end{array}\right.$$

în raport cu necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

TH. ANGHELUȚĂ.

4718. Intr'un triunghiu oarecare avem relația:

$$\cos B + \sin B \operatorname{cotg} \frac{A}{2} = \frac{\cos B + \cos C - \sin B - \sin C}{1 - \sin A - \cos A}.$$

LT. C. IONESCU-ȚIU.

4719. a, b, c și A, B, C fiind laturile și unghiurile unui triunghiu, iar φ un unghiu arbitrar, să se verifice relațiunile:

$$a^2 \cos 2\varphi + b^2 \cos 2(C + \varphi) + c^2 \cos 2(B - \varphi) + 2bc \cos(B - C - 2\varphi) - 2ab \cos(C + 2\varphi) - 2ca \cos(B - 2\varphi) = 0$$

$$a^2 \sin 2\varphi + b^2 \sin 2(C + \varphi) - c^2 \sin 2(B - \varphi) - 2bc \sin(B - C - 2\varphi) - 2ab \sin(C + 2\varphi) + 2ca \sin(B - 2\varphi) = 0.$$

N. N. MIHĂILEANU.

4720. Fie ABC un triunghiu variabil astfel că vârfurile sale se află respectiv pe trei cercuri date O_1, O_2, O_3.

1°. Să se demonstreze că centrul de greutate G al triunghiului ABC se află în interiorul unui cerc O, ce se va determina.

2°. Să se construiască triunghiul ABC, atunci când se dă G pe cercul O.

3°. Unui punct G din interiorul lui O îi corespund o infinitate de triunghiuri ABC. Punctul G fiind dat, să se construiască unul din triunghiurile ABC corespunzătoare.

ULPIU M. FLORESCU.

4721. 1°. Se dă o conică (C) tangentă în origine la axa OX. Se consideră pe conica (C) punctele variabile M_1 şi M_2, astfel ca dreptele OM_1 şi OM_2 să fie egal înclinate pe normala în O la conica (C).

2°. Să se arate, că dreapta M_1M_2 taie tangenta în O într'un punct fix T, care este polul normalei în O în raport cu conica (C).

3°. Să se arate că, dacă M_1 şi M_2 tind către O, dreapta ce uneşte O cu mijlocul lui M_1M_2 are o poziţie determinată (D) şi să se afle ecuaţia dreptei (D).

4°. Să se arate, că mijlocul dreptei M_1M_2 descrie o conică (C'), ce trece prin T, prin centrul C al conicei (C), care e tangentă în O la (D), normală în T la TO, cu centrul C' în mijlocul lui TC.

N. ABRAMESCU.

4722. Cam cât valorează o oră din timpul nostru pentru o furnică?

GH. ZAPAN.

ERATA. I. La problema Nr. 3300 rândul 5, publicată în Vol. XXX, pag. 360, se va citi *dinamometru* în loc de *diametru* cum din eroare s'a publicat.

O. OR.

II. In Nr. 12 „G. M". — XLI se vor face următoarele rectificări:

1°. Pag. 625 ultimul rând se va scrie $f^m(2x)$ în loc de $f^m(2m)$.

2°. Pag. 626 în rândul al şeaselea se va scrie $f^n(x)$ în loc de f^n.

3°. Pag. 630 în enunţul problemei 4349 se va scrie $mn(m^2+n^2)x$ şi $pq(p^2+q^2)x$ în loc de $mn(m^2+n^2)$ şi $pq(p^2+q^2)$.

4°. Exponentul din rândul al cincilea de jos se va introduce în paranteză.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Alexiu I. (4603, A); *Amărăşteanu F. M.* (4466, 701); *Bodnărescu M. Horia* (4676, 78, 701, C); *Călinescu Aurelian* (4556, 79, 94, 95, 624, 44, 58, 59, 62, 64, 68, 69, 74, N); *Eckstein Virgil* (4587, 605, 67, 76, 79, 91, 95, 702, 05); *Florescu Victor* (4471, 557, 73, 83, 99, 606, 26, 37, 58, 68, 76, 79, 84, 91, 99); *Gloden A.* (4570, 659, 69, 70); *Grumăzescu Mircea* (4524, 35, 658, 59, 64, 69, 76, 78, 81); *Marcovici Eugen* (4573); *Matei D. D.* (4604); *Negrea A. Mircea Leonte* (4665, 71, 84, 91, 701, 05, 07, 10); *Popescu C. I.* (4580); *Sacter O. D.* (4157, 288, 465, 546, 65, 70, 73, 85, 99, 600, 37, 46, 58, 61, 62, 65, 67, 74, 81, 89, 91, 702); *Postelnicescu C. M.* (4306, 418, E); *Săndulache Const.* (4587, 654, 76, 78, 700); *Vasilescu Al. Alexandra* (4572, 80, 610, 63, 65, 68, 76, 77, 79, 82, 89, 705, 10); *Vasilescu-Stabu Al. Mircea* (4572, 80, 610, 63, 65, 68, 76, 77, 79, 82, 89, 701, 05).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie. Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa :

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN**

C. 42206

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLII

NUMĂRUL 2. — OCTOMVRIE 1936

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SUMARUL

1. Congresul internațional al matematicienilor . . . . . *G. Țițeica.*
2. Tipografia „Gazeta Matematică" . . *G-l Gh. Buicliu.*
3. Probleme asupra patratelor . . . . *V. Thébault.*
4. „Geometria neeuclidiană" . . . . . *Marin Gh. Dumitrescu.*
5. Proprietăți ale pseudo-rombului . . *Iulian Alexiu.*
6. Raportul Comisiunii pentru acordarea premiului „General Sc. Panaitescu".
7. Note Matematice: 5 — 9.
8. Chestiuni de examen.
9. Bibliografie.
10. Cereri.
11. Diverse.
12. Probleme rezolvate: 1858, 2640, 2661, 3630, 4091, 4483, 4546, 4580, 4610, 4627, 4632.
13. Exerciții: 4.
14. Probleme propuse: 4723 — 4734.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1936

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer-Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela „*Gazeta Matematică*" în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1936 şi nerezolvate sunt enumărate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4713, 15, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela «*Gazeta Matematică*» cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	220	260	80
5— 8 „	375	425	100
9—16 „	620	700	160
Coperta	120	160	80

A apărut

CULEGERE DE PROBLEME DE TRIGONOMETRIE

PARTEA I (Goniometrie)

DE

V. CRISTESCU

EDIȚIA II-a REVĂZUTĂ ȘI ADĂOGITĂ

DE

GH. TH. GHEORGHIU

Prețul: 95 lei

DE VÂNZARE LA LIBRĂRII. SE POATE COMANDA ȘI LA GAZETA MATEMATICĂ, BUC. CALEA GRIVIȚEI Nr. 158, TRIMIȚÂNDU-SE COSTUL DE 95 LEI PLUS 15 LEI PENTRU TRANSPORT SAU CONTRA RAMBURS

CONGRESUL INTERNAȚIONAL AL MATEMATICIANILOR

Oslo, 13 — 18 Iulie, 1936

Congresele internaționale ale matematicianilor se țin acum regulat din patru în patru ani. Anul acesta, în urma hotărîrii luate la Zürich în 1932, congresul s'a ținut în capitala Norvegiei, la Oslo, iar în 1940, dacă nu se va ivi nici o piedică, după propunerea matematicianilor americani, prin glasul autorizat al D-lui L. P. EISENHART, cunoscutul geometru dela Universitatea din Princeton, Congresul se va ține în Statele Unite.

Congresul dela Oslo a fost caracterizat prin lipsa totală a matematicianilor italiani și ruși, prin numărul mare al matematicianilor americani și, proporțional vorbind, al celor români și prin insigna dată congresiștilor, în același timp simplă și ingenioasă: o integrală dealungul unei curbe închise.

1. In ziua de Luni 13 Iulie, la ora 8 p. m. a fost o recepție dată de Rectorul Universității în Aulă. A fost ocazie bună de a se revedea matematicianii diferitelor țări sau de a face cunoștințe noui. Am avut astfel fericita împrejurare de a face cunoștința colaboratorului nostru neobosit D-l THÉBAULT, care m'a însărcinat să aduc membrilor *Gazetei* salutările sale călduroase, precum și a altor matematiciani din alte țări, mai ales din specialitatea mea.

Intrând în Aulă, pentru această recepție, am văzut la intrare, în partea stângă, coroana pe care *Gazeta Matematică* a depus-o prin regretatul nostru coleg, inginerul ST. N. MIREA, la monumentul genialului matematician norvegian ABEL. E singurul semn de admirație care se păstrează cu cinste, aș putea zice cu sfințenie, în Aula Universității din Oslo.

In ziua de 14 Iulie, la ora 9 a. m. s'a ținut ședința solemnă de deschidere a Congresului, în fața Regelui și a Prințului moștenitor. S'a ales biroul. E de ajuns să spun că președintele Congresului a fost ales D-l C. STOERMER. Comisiunea însărcinată să aleagă pe matematicianul, căruia să i se dea *medalia Fields,* a proclamat prin președintele său, D-l CARTAN, profesor la Sorbona, pe D-l AHLFORS, tânărul și vestitul geometru finlandez, ca matematicianul cel mai meritos dintre tineri. D-l CARATHEODORY, profesor la

München, a arătat într'un raport amănunțit meritele deosebite ale D-lui AHLFORS.

In aceeași zi, la ora $5^1/_2$ p. m., Regele a primit la Palat pe congresiști.

Pentru ca să merg până la capăt cu acest capitol al festivităților, le voiu continua la rând. Miercuri, 15 Iulie, la ora 9 a. m., s'a făcut prezintarea bustului marelui matematician norvegian SOPHUS LIE. Cu această împrejurare D-l CARTAN, cel mai strălucit urmaș al lui SOPHUS LIE în aplicarea teoriei grupurilor, a ținut o conferință interesantă: *Câteva priviri despre rolul teoriei grupurilor lui* SOPHUS LIE *în desvoltarea geometriei moderne.* Seara banchet dat de orașul Oslo congresiștilor.

Joi, la 16 Iulie, ora 4 p. m., congresiștii au făcut, până la miezul nopții, o admirabilă excursie în fiordul din fața portului Oslo. Au luat parte, pe lângă congresiști, Prințul moștenitor, Președinte de onoare al Congresului și Prințesa moștenitoare.

Țin să adaug că Vineri 17 Iulie, Ministrul României la Oslo, D-l JURAȘCU, a avut minunata idee să invite la prânz pe toți Românii cari au luat parte la Congres, împreună cu patru din cei mai reprezentativi membri ai Comitetului norvegian cari au organizat Congresul.

In fine, membrii congresului au putut să-și aleagă din vreme, prin societăți organizatoare, excursii interesante pe care să le facă în Norvegia.

2. Lucrările propriu zise ale Congresului au fost împărțite în două categorii, conferințe și comunicări. Numărul membrilor a fost așa de mare, peste 500, și foarte mulți dintre ei aveau nu numai rezultate însemnate de comunicat, ci priviri generale asupra metodelor noui create sau generalizate de ei, încât se poate spune că Congresul a fost peste măsură de încărcat și de-abia în cele din urmă momente s'au putut termina toate conferințele și comunicările. Dimineața era hotărîtă pentru conferințe, mai multe deodată, după amiazi pentru comunicări. Comunicările au fost împărțite pe specialități în secțiuni: *Secțiunea I* (Aritmetica și teoria numerelor), *Secțiunea II* (Algebra și Analiza), *Secțiunea III* (Geometria), *Secțiunea IV* (Calculul probabilităților), *Secțiunea V* (Mecanica și Fizica matematică), *Secțiunea VI* (Idrostatică, Idrodinamică, Aerodinamică, Elasticitate), *Secțiunea VII* (Istoria matematicelor), *Secțiunea VIII* (Invățământul matematicelor).

Comunicările pe secțiuni au fost așa de numeroase, iar unele așa de desvoltate, încât a fost nevoie ca unele secțiuni să fie despărțite în două și chiar trei subsecțiuni. Secțiunea de Analiză a fost despărțită în trei subsecțiuni, iar cea de Geometrie în două.

Cei opt Români cari au luat parte la Congres, unii dintre ei având delegație oficială din partea Ministerului de Instrucție, Academiei Române sau a Facultății de științe (cel care scrie aceste rânduri le-a avut onorific pe câte trei), au făcut toți comunicări: D-l R. BĂDESCU în secția II_a, D-l D. BARBILIAN în secția III_b, D-l O. ONICESCU în secția IV, D-l A. PANTAZI în secția III_b, D-l N. RACLIȘ în secția II_b, D-l S. STOILOV în secția III_a, subsemnatul în secțiile III_b și VIII și D-l V. VÂLCOVICI în secția VI. Precum se vede, delegația română a reprezintat bine știința românească. Cel care scrie aceste rânduri a avut dealtfel cinstea de a fi desemnat să prezideze cea mai interesantă ședință a secțiunei III_b.

Trebue să adaug că pe lângă lucrările oficiale ale Congresului, însemnătatea acestei Adunări internaționale stă mai mult în convorbirile dintre matematicianii de aceeași specialitate, pe care-i frământă aceleași probleme și, nu strică s'o spun, cari urmăresc aceleași idealuri. In aceste convorbiri se împărtășesc dela unul la altul probleme noui, metode interesante, preocupări înalte, care servesc și unuia și altuia ca îndemn prețios de a păstra firul lucrărilor, amenințat necontenit de a se rupe sub apăsarea vremilor neprielnice.

De aceea, în ziua de Sâmbătă 18 Iulie, când s'a ținut ședința de închidere a Congresului, era între toți o atmosferă de bună prietenie și de mare părere de rău pentru o așa de grabnică despărțire.

Iată, pe scurt, o ochire repede fără amănunte care, de sigur, ar fi fost interesante, asupra desfășurării Congresului dela Oslo.

G. ȚIȚEICA.

TIPOGRAFIA „GAZETA MATEMATICĂ“

„Chestiunea localului propriu, chestiunea tipografiei proprii ne-a ocupat numai ca deziderat îndepărtat“, scria D-l I. IONESCU în Septemvrie 1926 la pag. 22, Vol. XXXI din *Gazeta Matematică* în articolul intitulat *„Localul societății Gazeta Matematică“*.

Unul din cele două deziderate s'a înfăptuit. Avem localul nostru. Tipografie însă nu avem şi ne trebue.

Ne trebue tipografie proprie pentru a termina cu starea nomadă de până acum, când revista noastră s'a tipărit în 7 tipografii [1]), cu cel puţin tot atâtea feluri de caractere.

Ne trebue o tipografie proprie pentru a ne statornici definitiv o literă şi semnele noastre speciale şi pentru a avea în imediata apropiere probele de corectat. Azi se fac încă kilometri pentru a ajunge la o corectură sau pentru a primi o corectură.

Ne trebue o tipografie proprie pentru a putea reduce din costul imprimatului revistei *Gazeta Matematică* şi a *Suplimentului cu exerciţii,* care cu toate sforţările diferitelor tipografii şi mai ales cu toată bună voinţa *Monitorului Oficial* şi a *Imprimeriilor Statului,* apasă încă greu asupra cheltuelilor societăţii. Se ştie şi o repetăm că revista *Gazeta Matematică* se imprimă în majoritate din cotizaţiile membrilor societăţii, căci abonamentele nu acopăr nici pe departe cheltuelile de tipar. Şi cu toate acestea, cine e la curent cu preţul cărţilor, poate aprecia cu uşurinţă sacrificiul ce se face când se oferă abonaţilor cu 200 lei un volum de peste 600 pagini, cu literă matematică îngrijită, cu figuri costisitoare şi cu hârtie de cea mai bună calitate.

Ne trebue tipografie pentru a înlesni tipărirea şi retipărirea cărţilor din Biblioteca *Gazeta Matematică,* cu un preţ mai convenabil şi pentru a ajuta tipărirea lucrărilor de matematici ale membrilor societăţii noastre.

Nu voim o tipografie în genul marilor institute de arte grafice pentru a face afaceri comerciale, pentru a concura pe piaţă sau a lua parte la diferitele licitaţii.

---

1) La *Tipografia Curţei Regale,* F. GÖBL, Volumele I, II, III, IV, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIX, XX, XXI şi XXVII.

La *Stabilimentele grafice,* I. V. SOCECŬ, Vol. V.

La *Tipografia Cooperativă,* GH. I. NICOLAEVICI, Vol. XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII şi XXII.

La *Tipografia* H. GOLDNER, Iaşi, Vol. XXIII.

La *Tipografia Universală,* IANCU IONESCU, Buc. Vol. XXIV şi XXV.

La *Imprimeria Fabricelor de Chibrituri şi Timbre,* Vol. XXVIII, XXIX, XXX, XXXI, XXXII, XXXIII şi XXXIV.

La *Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului,* Vol. XXXV şi următoarele.

Nu acesta e dezideratul nostru. Noi dorim strictul necesar pentru nevoile noastre şi *numai pentru nevoile noastre:* Una sau două maşini mici, cutiile cu literile speciale şi câţi-va lucrători, poate cel mult 5. Atât şi numai atât.

Dar şi *atât,* cere mijloace materiale şi pe acelea nu le avem încă.

Scriitorul acestor rânduri, imitând pilde anterioare, şi pentru a păşi de la deziderat spre înfăptuire a propus problema unei tipografii proprii în adunarea generală din 20 Februarie 1935 şi a subscris o pietricică la temelia acestei tipografii. Exemplul a fost urmat curând prin o donaţie mai masivă de 9300 lei din partea colegului nostru de peste ocean, D-l B. I. BAIDAFF, căruia îi adresez recunoscătoare mulţumiri.

Începutul promite. Acum ne adresăm pe această cale şi facem un stăruitor apel la foştii şi actualii corespondenţi şi cititori ai *Gazetei Matematice* şi tuturor iubitorilor de matematici şi-i rugăm să contribue cu obolul lor la înfăptuirea Tipografiei *Gazeta Matematică* în spiritul şi în dimensiunile expuse în articolul de faţă.

Orice donaţie se poate înmâna unuia din membrii societăţii sau se va adresa pe adresa *Societatea „Gazeta Matematică“,* Calea Griviţei 158, cu menţiunea «subscripţie pentru tipografia *Gazeta Matematică*».

Cunoscând entusiasmul stârnit de *Gazeta Matematică* acum 42 de ani, întreţinut şi crescând de atunci încoace, sperăm că apelul de faţă, care urmăreşte crearea unei noi pârghii pentru dezvoltarea ştiinţelor matematice, va avea răsunetul dorit şi că în curând vom putea scrie un articol începând cu cuvintele *„azi când avem tipografia Gazeta Matematică...“*

G-L GH. BUICLIU.

PROBLEME ASUPRA PATRATELOR

1°. Ne propunem să căutăm sistemele de numeraţie în care un număr N format din $n > 1$ cifra a, urmate de n cifre b, este patratul unui număr format din n cifre c.

Intr'un sistem de numeraţie B, în care a, b, c sunt mai mici decât B,

$$N = aa\ldots abb\ldots b = \underbrace{11\ldots11}_{n} \times a\underbrace{00\ldots00}_{n}b$$

$$\therefore\quad N = (B^{n-1} + B^{n-2} + \ldots + B + 1)(aB^n + b) = (cc\ldots cc)^2$$

sau

$$(1)\quad N = (B^{n-1} + B^{n-2} + \ldots + B + 1)(aB^n + b) = c^2(B^{n-1} + B^{n-2} + \ldots + B)^2.$$

Factorul $(B^{n-1} + B^{n-2} + \ldots + B + 1)$ neputând fi nul, rezultă

$$(2)\quad aB^n + b = c^2(B^{n-1} + B^{n-2} + \ldots + B + 1).$$

Cum

$$(3)\quad aB^n + b = a(B-1)(B^{n-1} + B^{n-2} + \ldots + B + 1) + a + b$$

vom avea

$$(4)\quad a(B-1)(B^{n-1} + B^{n-2} + \ldots + B + 1) + a + b = c^2(B^{n-1} + B^{n-2} + \ldots + B + 1).$$

De aici urmează că $B^{n-1} + B^{n-2} + \ldots + B + 1$ trebue să dividă pe $a+b$ şi deoarece $a \leqslant B-1$, $b \leqslant B-1$ sau $a+b \leqslant 2(B-1)$ nu putem avea decât $n = 2$.

Am arătat [1]), că există o infinitate de sisteme de numeraţie în care un număr N de 4 cifre de forma *aabb* este patratul unui număr de 2 cifre *cc*.

Rezultă din cele ce preced că *nu există nici un sistem de numeraţie în care un număr* N *de* 2n *cifre de forma* **aa... abb... b** *să fie patratul unui număr de* **n** *cifre de forma* **cc...c**, *când* $\mathbf{n > 2}$.

2°. Când $a = b$, numărul N este de $2n$ cifre egale. Pentru ca într'un sistem de numeraţie să existe un patrat de $2n$ cifre egale trebue ca $n = 1$ sau $n = 2$ şi atunci există o infinitate de sisteme [2]).

Dacă

$$n = 1\ ,\ N = aa = a(B+1) = c^2.$$

---

1) Sphinx, 1935 — 99.

2) Sphinx, 1935 — 99.

Este suficient, pentru aceasta, ca produsul $a\ (B+1)$ să fie patrat perfect.

Exemple. $a=4\ ,\ B=8\ ,\ N=44=6^2$.

Dacă $n=2\ ,\ B=2a-1\ ,\ c^2=(a-1)^2+a^2<B^2$.

Primele valori ale lui a sunt

$$a=4,\ 21,\ 120,\ 697,\ 4060,\ldots$$

pentru care

$$B=7,\ 41,\ 239,\ 1393,\ 8119,\ldots$$

$$c=5,\ 29,\ 169,\ 185,\ 5741.$$

Exemple. $B=7\ ,\ N=4444=(55)^2$

$B=41\ ,\ N=\overline{21}\,\overline{21}\,\overline{21}\,\overline{21}$ *) $=(\overline{29}\,\overline{29})^2$.

Observaţie. Toate aceste numere

$$N=c^2(B+1)^2=[(a-1)^2+a^2].4a^2=[2a(a-1)]^2+(2a^2)^2$$

sunt egale cu suma patratelor a 2 numere întregi.

3⁰. Intr'un sistem de numeraţie B, dacă un număr N format din 3 cifre egale $a<B$, este patratul unui număr de 2 cifre cc, avem:

$$N=aaa=a(B^2+B+1)=aB(B+1)+a=(cc)^2=c^2(B+1)^2.$$

Ca această ecuaţie să fie verificată în numere întregi trebue ca $B+1$ să împartă pe a ceea ce este imposibil căci $a<B+1$.

Acelaşi raţionament aplicat la un număr de 5 cifre

$$N=aaaaa=(ccc)^2$$

arată că

$$N=a(B^4+B^3+B^2+B+1)=c^2(B^2+B+1)^2$$

$$(1)\quad N=aB^2(B^2+B+1)+a(B+1)=c^2(B^2+B+1)^2$$

deci B^2+B+1 trebue să dividă pe $a(B+1)$ a cărui valoare maximă fiind $(B-1)(B+1)=B^2-1$, nu se poate divide prin B^2+B+1.

Nu există deci patrate de 5 cifre de forma considerată.

In definitiv, *nu există patrate de* n *cifre* egale *decât pentru* $\mathbf{n=2}$ *sau* $\mathbf{n=4}$.

V. THÉBAULT
(Le Mans, Franţa).

*) $\overline{21}$ însemnează o cifră în sistemul B.

„GEOMETRIA NEEUCLIDIANĂ“

— Cu prilejul centenarului —

Știut este că la baza geometriei noastre uzuale stau de secole principiile datorite genialului geometru grec EUCLID.

Faimoasele sale «propoziții» satisfac, fără contrazicere, practica vieții noastre imediate; dar nicicând spiritul omenesc nu a fost caracterizat prin «staticism» și de aceea — în curgerea vremurilor — «dinamismul» său în mod natural a ajuns să se întrebe ce-ar rezulta dacă vreuna din «propozițiile» lui EUCLID n'ar fi adevărată sau ar fi înlocuită cu alta mai generală. Cu alte cuvinte, se căuta existența unei noi geometrii — diferită sau mai generală decât cea a lui EUCLID — o geometrie Neeuclidiană.

Fără a mai pomeni aci de nenumăratele încercări de a clădi o nouă geometrie, încercări ce datează din secolul I a. Chr. și până în secolul al XVIII-a, putem spune că sunt doar 100 de ani de când geometria Neeuclidiană își făcu apariția în cercul matematicienilor deși «duhul» ei plutea de mult în spiritul unora dintre geometrii.

Genezele noii geometrii fură încercările de «demonstrare» ale postulatului lui EUCLID «că printr'un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă la acea dreaptă și numai una singură».

În această privință, prima încercare demnă de a fi amintită este aceea a iesuitului SACCHERI (1667 — 1733) care, în opera sa capitală «EUCLIDES ab omni noevo vindecatus», căută demonstrarea postulatului raționând astfel: presupunem că postulatul nu este adevărat și să tragem de aci toate consecințele logice. Dacă nu cădem peste nici o contradicție logică, urmează că postulatul nu e indispensabil în geometrie și deci nu poate fi demonstrat. Dar dacă ajungem la o contradicție logică, aceasta înseamnă că presupunerea noastră a fost absurdă, postulatul e necesar și deci poate fi demonstrat.

În cursul deducțiilor sale logice SACCHERI a crezut că a dat peste o contradicție și că a demonstrat deci postulatul. In realitate ideea lui a fost bună dar a aplicat-o greșit, căci cea dintâi alternativă are loc; nu se întâlnește nici o contradicție logică oricât de mult s'ar trage consecințe din negarea postulatului lui EUCLID. Ca

atare, se poate clădi o geometrie fără acest postulat, o geometrie «Neeuclidiană».

Din punct de vedere pur speculativ şi metafizic SACCHERI este cât se poate de aproape de ideile care vor fi exprimate abia peste 100 de ani de marele geometru rus LOBATCHEWSKY.

Moartea lui SACCHERI (1733) la două luni abia după publicarea operei sale capitale — apărută într'un număr restrâns de exemplare — aşternu un văl de uitare peste opera geometrului italian, până când E. BELTRAMI cu celebrul său articol «Un precursore italiano di LEGENDRE e di LOBATCHEWSKY» (Atti di Lincei) o scoase din uitare, redându-i toată prioritatea cuvenită.

Teoria paralelelor preocupă rând pe rând pe marii geometri ai timpurilor, GAUSS, LEGENDRE,... oprindu-ne tocmai la LOBATCHEWSKY a cărui operă geometrică, de o importanţă covârşitoare în evoluţia geometriei Neeuclidiene, o putem numi, fără exagerare, «eroică» deoarece el fu complet izolat în toate cercetările sale, iar opera sa nu primi nici o încurajare, sub nici o formă, dela nimeni.

NICOLAE-IVAN-LOBATCHEWSKY se născu în 1793 la Nijni-Novogorod, celebru prin târgurile sale. Tatăl său, care era arhitect, muri în 1797 lăsându-şi familia — soţia şi cei doi copii — într'o situaţie destul de critică. Curând după moartea tatălui se stabiliră cu toţii la Kazan unde tânărul IVAN îşi făcu toate studiile, izbutind ca la vârsta de numai 21 de ani să cucerească titlu de «profesor» la Universitatea al cărei eminent student fusese.

Atras dintr'un început de frumuseţile geometriei, căreia îi închină toată activitatea sa, spiritul său nu întârzie mult spre a da la iveală lucrări geniale.

Astfel în 1829 publică în «Mesagerul Universităţii din Kazan» memoriul intitulat «Asupra principiilor geometriei» care poate fi privit ca prima lucrare expunând noile concepţii. Din 1835 el începu publicarea în ruseşte a marelui său tratat «Noile principii ale geometriei cu privire asupra teoriei paralelelor» urmat curând de un altul mai concis «Cercetări geometrice asupra teoriei paralelelor».

Numai că, din nenorocire, lucrările sale nu stârniră nici un interes în Rusia; însăşi profesorul său BARTELS, căruia geometrul rus îi adresase primele sale publicaţiuni şi care îl considera ca primul şi cel mai extraordinar student pe care îl avusese Universitatea din Kazan, privea concepţiile sale, după, spusele astronomului OTTO

STRUVE, ca «foarte ingenioase», însă deloc de natură să facă să progreseze ştiinţa. In 1855, deşi orb, el dicta sub numele de «Pan-geometrie», expunerea completă a concepţiilor sale, expunere ce apăru atât în limba rusă cât şi cea franceză. Un an mai târziu (1856) LOBATCHEWSKY muri fără să fi reuşit să-şi facă cel puţin cunoscute concepţiile sale.

Din fericire, pe vremea aceea trăia în Franţa ca profesor al Facultăţii de Ştiinţe din Bordeaux un savant în toată accepţia cuvântului, GUILLAUME JULES HOUËL. Dotat cu o cultură multilaterală, spirit plin de entusiasm, HOUËL contribui ca nimeni altul la difuzarea geometriei Neeuclidiene.

Pasionat de cercetările geometrice, HOUËL ajunsese la convingerea fermă a imposibilităţii demonstrării «postulatului», convingere ce şi-o expune în celebra «Notă asupra imposibilităţii unei demonstraţiuni a postulatului lui EUCLID». In 1863 HOUËL publică o «Incercare a unei expuneri raţionale a principiilor fundamentale ale geometriei» care avu un adânc răsunet în rândurile matematicienilor.

O întâmplare fericită făcu ca prin 1865 Facultatea de Ştiinţe din Bordeaux să numere printre studenţii săi pe un tânăr rus, POTOCKI, care semnală lui HOUËL, profesorul său, lucrările lui LOBATCHEWSKY.

Luând cunoştinţă de lucrările lui LOBATCHEWSKY, HOUËL avu momente de adâncă satisfacere constatând că ideile geniale ale geometrului rus confirmă într'un totul pe ale sale.

HOUËL cu entusiasmul său de neegalat şi cu autoritatea sa devine cel mai sincer adept al genialului geometru rus.

Cu aceeaşi pasiune HOUËL îmbrăţişă deasemenea lucrările geometrului ungur I. BOLYAI.

Trebue să notăm aici ziua de 3 Noembrie 1823 — dată epocală în analele geometriei — când tânărul BOLYAI — pe atunci ofiţer de geniu la Timişoara — comunica tatălui său, profesor de matematici la colegiul din Tg.-Mureş, că «a descoperit lucruri aşa de minunate încât el însăşi este profund mişcat».

Câţiva ani se scurseră până când BOLYAI putu să-şi publice rezultatele preocupărilor sale, apărute întâiu în 1829 şi apoi în 1831 sub titlul de «Ştiinţa Spaţiilor».

S'a pus întrebarea dacă BOLYAI şi LOBATCHEWSKY n'au ştiut unul de altul.

FRANZ SCHMIDT, arhitect în Timişoara, datorită căruia HOUËL şi odată cu el întreaga lume matematică a apusului, luă cunoştinţă de opera lui BOLYAI, într'o scrisoare adresată lui HOUËL la 8 Noembrie 1884 din Buda-Pesta, spune că el ştie că BOLYAI, ar fi comunicat conţinutul manuscrisului său despre «Ştiinţa Spaţiilor» lui LITTROW; ori acesta era cunoscut că ar fi fost la Kazan profesorul lui LOBATCHEWSKY. Se poate deci foarte bine ca LITTROW şi LOBATCHEWSKY să-şi fi împărtăşit părerile asupra operei lui BOLYAI, dar FRANZ SCHMIDT adaugă că nu a putut obţine nici o confirmare.

Descoperirile lui LOBATCHEWSKY şi BOLYAI nu dedeau decât unul din aspectele geometriei Neeuclidiene. Un alt aspect a rezultat din conferinţa inaugurală a lui RIEMANN «Asupra ipotezelor care servesc ca bază geometriei» citată în 1854 la Societatea filosofică din Göttingen, publicată însă numai în 1867 după moartea autorului şi cunoscută în lumea geometrilor tot datorită lui HOUËL.

Avem deci geometria sub trei aspecte: Euclidiană; Lobatchewskiană sau Bolyainiană şi Riemanniană; deosebirea între ele constând în aceea că în prima o geodezică nu are decât o paralelă dusă printr'un punct dat, pe când într'a doua sunt două şi nici una într'a treia: Sau ceea ce revine a spune că suma unghiurilor unui triunghiu geodezic este respectiv egală, inferioară sau superioară sumei a două unghiuri drepte.

An cu an lucrări importante şi numeroase au fost publicate de matematicienii din toate ţările pentru a elucida cât mai complet problema fundamentelor geometriei.

Din noianul acesta de nume, pe care pagini întregi de abia le-ar cuprinde, trebue să reţinem trei de-o excepţională importanţă: aceştia sunt belgienii DE TILLY şi MANSION şi apoi americanul G. BRUCE HALSTED. Ceilalţi geometri nu au făcut în mare parte decât să continue şi să desvolte opera acestor maeştri.

IOSEPH MARIE DE TILLY (1837—1906,) general în armata belgiană şi membru al Academiei Regale din Bruxelles, fu pasionat de tânăr pentru matematici şi în special pentru geometrie; astfel că reflectând asupra principiilor geometriei crezu mai întâi în posibilitatea unei demonstraţiuni a postulatului lui EUCLID; însă un drum nou şi cu totul personal relevat în «Studiile sale de mecanică abstractă» conducându-l la rezultate aproape identice cu acelea pe care avu surpriza de ale regăsi mai târziu în opera lui LOBATCHEWSKY,

îl convinse de importanţa ideilor geometrului pe care le îmbrăţişe cu toată căldura. Relaţiile sale cu HOUËL începute în 1870, din pur ştiinţifice, se transformară repede într'o prietenie indistructibilă care avu asupra lui DE TILLY o influenţă considerabilă. De aci izvorî faimoasa lucrare a lui DE TILLY «Incercări asupra principiilor fundamentale ale geometriei şi mecanicei», unde problema geometriei generale este abordată cu o siguranţă şi-o profunzime remarcabilă. Dar concepţia sa cea mai remarcabilă care îl apropie de CAUCHY fu bazată pe noţiunea primordială şi ireductibilă de «depărtare», adică de intervalul între două puncte şi pe relaţia generală care trebue să existe între intervalele a cinci puncte ale spaţiului omogen. Această relaţie era cunoscută dela LAGRANGE din 1773 pentru spaţiul euclidian, iar în 1873 SCHERING o formulase pentru celelalte două spaţii. In lucrarea sa «Essai de Géometrie analytique générale » DE TILLY reuşi să pună această relaţie sub forma unui determinant şi să arate că cele trei geometrii, adică a lui EUCLID, LOBATCHEWSKY-BOLYAI şi RIEMANN sunt cuprinse aci; prima fiind un caz limită al celorlalte două şi că acestea sunt singurele posibile. Aceste rezultate formidabile care plasară numele lui DE TILLY în fruntea marilor geometri, confirmau în modul cel mai strălucit ideile fondatorilor geometriei Neeuclidiene şi închideau definitiv drumul investigaţiilor inutile ale acelora care neconvinşi încă, credeau că vor putea demonstra existenţa paralelelor.

PAUL MANSION (1844 — 1919), membru al Academiei Regale Belgiene, profesor emerit al Universităţii din Gand, a lăsat un mare număr de memorii şi articole raportându-se la o mulţime de subiecte; e suficient să pomenim lucrările sale relative la «Metageometrie», asupra căreia dela 1889 şi până la 1914 a publicat aproape 50 de note sau memorii. Tot el, pentru a înlocui vechea revistă a lui CATALAN «Nouvelle Corespondance» creiă excelenta revistă «Mathesis». Suplimentele acestui periodic fură larg deschise tuturor adepţilor geometriei Neeuclidiene. Aci îşi publică MANSION, în 1895, lucrarea sa magistrală «Premiers principes de la Métagéometrie" urmată în 1897 de o metodă elementară «d'Exposition des principes de la géometrie non — Euclidienne» şi în 1898 de nota intitulată «Pour la géométrie non — Euclidienne».

Aşa că datorită acestei minunate reviste «Mathesis», răspândită printre matemcticienii întregii lumi, geometria Neeuclidiană făcu mulţi paşi înainte.

GEORGE BRUCE HALSTED este cel care a răspândit în Statele Unite ale Americei lucrările geometrilor vechiului continent, traducând pe SACCHERI, LOBATCHEWSKY, BOLYAI, POINCARÉ, etc. El însuşi, adânc pasionat de geometria Neeuclidiană, dete la iveală numeroase lucrări personale, printre care putem cita faimosul memoriu «Contribuţia geometriei Neeuclidiene la filosofie».

Desigur că mulţi se vor fi întrebat şi se mai întreabă încă: ce valoare are geometria Neeuclidiană? unde duce ea? la ce serveşte ea? când de două mii de ani — spun ei — geometria Euclidiană a răspuns tuturor necesităţilor.

Mai mult, când geometria Euclidiană — spun partizanii ei — ajunge încă să explice toate legile universului, la ce bun să studiem o nouă geometrie?

Natural, geometria Euclidiană precum şi mecanica lui NEWTON vor rămâne primele aproximaţiuni ale ultimelor teorii ale spaţiului şi ale mişcării materiei; dar când învăţaţii tratează chestiunea fundamentală a raportului dintre «ipoteză şi ştiinţă», nu prima, ci ultima aproximaţie contează pentru ei şi deci logic e să ne întrebăm dacă actualmente este absolut adevărat că geometria Euclidiană ajunge să explice toate fenomenele universului. Mai mult, în lumea noastră fizică rezultatele obţinute servindu-ne de una din geometrii diferă infinit de puţin de rezultatele pe care le-ar da celelalte două şi numai «comoditatea» este cea care ne împinge ca în practica vieţii să preferim geometria Euclidiană. Datorită însă unor consideraţiuni cu totul noi, se poate foarte bine ca o geometrie Neeuclidiană să aibă avantaje şi să devină necesară cel puţin în unele părţi ale universului nostru fizic; aceasta va fi o consecinţă neaşteptată a teoriilor fizice cele mai moderne şi ale genialelor concepţii ale lui EINSTEIN.

Se ştie că lumina are o masă, ea este grea; masă şi energie astăzi sunt sinonime. Experienţe precise şi extrem de delicate au arătat că o rază luminoasă izbind un obiect material exercită asupra lui o presiune care a fost măsurată şi care se poate compara cu aceea a unui proiectil sau mai exact rezultantei presiunilor unei serii de proiectile bombardând acest obiect.

De altă parte, se ştie că geodezica sau linia dreaptă a fizicenilor nu este identică aceleia a geometrilor şi experienţa a confirmat strălucit acest fapt fundamental pe care acum câţiva ani eram

departe de a-l presupune. Lumina nu se propagă în linie dreaptă decât în regiunile cereşti unde nu este gravitaţie, adică unde nu sunt mari mase atrăgătoare; însă într'un câmp unde se găsesc astfel de mase, traectoria sa este incurbată ca aceea pe care ar parcurge-o un obiect greu. Acestea sunt observaţiile eclipsei de soare din 29 Mai 1919, făcute la Sobral (Brazilia) şi în insulele portugheze Principe — care s'au precizat cu ajutorul deviaţiei stelelor de către soare, deviaţie a cărei mărime numerică s'a găsit că este exact aceleia prevăzute şi anunţate de EINSTEIN. Această incurbaţie va furniza un element de răspuns la această chestiune interesantă. Universul nostru fizic este el conform uneia din cele trei geometrii? şi căreia? Lumea reală corespunde geometriei clasice a lui EUCLID? Nu, a răspuns categoric EINSTEIN! Ea nu este Euclidiană decât în regiunile foarte depărtate de orice masă grea; este curbă în vecinătatea astrelor şi cu atât mai mult cu cât este mai aproape. Aşa că ţinând seama de rezultatele achiziţionate cu ocazia eclipsei din 1919 şi neputând utiliza din cauza condiţiunilor nefavorabile pe cele ale eclipsei din 1929, putem spune că geometria spaţiului curb a lui RIEMANN este aceea care ar părea a se adapta mai bine universului real.

Aşa dar geometria Neeuclidiană justifică, completează şi consolidează în modul cel mai strălucit opera admirabilă a lui EUCLID!

MARIN GH. DUMITRESCU
Licenţiat în Ştiinţele Matematice.

Bibliografie. — N. ABRAMESCU — „Introducere în studiul geometriilor neeuclidiene"; P. BARBARIU — „La geometrie non euclidiene." — CH. NORDMANN — Einstein şi Universul; P. SERGESCU — „Gândirea Matematică".

PROPRIETĂŢI ALE PSEUDO-ROMBULUI

In *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVIII, pag. 479, Domnul Prof. I. IONESCU a propus următoarea *problemă investigativă* (Nr. 4284).

„Să zicem pseudo-romb patrulaterului care are diagonalele perpendiculare pe mijlocul numai a uneia din ele. Să se dea proprietăţi ale acestei figuri".

În afară de proprietățile date în soluțiile dela pag. 333, Vol. XXXIX, mai putem da următoarele :

1. *Ducând paralele la diagonale prin vârfurile pseudo-rombului se obține un dreptunghiu de arie dublă cât aceea a pseudo-rombului* (fig. 1).

2. *Ducând drepte ce unesc mijloacele laturilor pseudo-rombului se obține un dreptunghiu cu aria cât jumătatea ariei pseudo-rombului.*

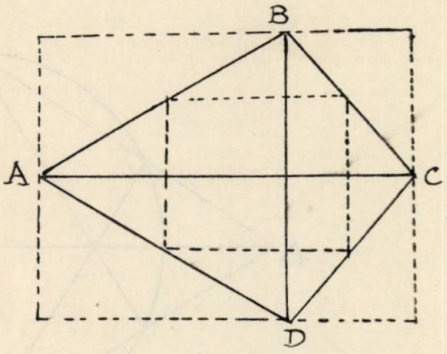


Fig. 1.

3. *Bisectoarele unghiurilor unui pseudo-romb sunt concurente* (fig. 2).

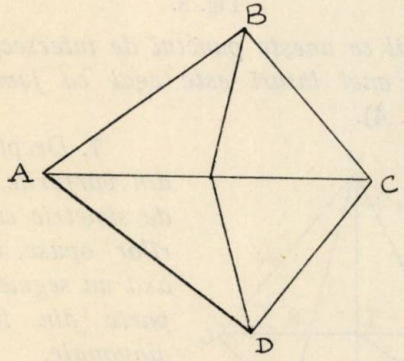


Fig. 2.

Fie A, B, C, D un pseudoromb în care diagonala AC este axă de simetrie. AC este bisectoarea unghiurilor A și C. Din cauza simetriei în raport cu AC, bisectoarele unghiurilor B și D se intersectează pe AC.

De aici se deduce :

4. *Pseudo-rombul admite un cerc înscris, cu centrul în punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor.*

5. *Picioarele înălțimilor coborîte din vârfurile ce nu aparțin axei de simetrie pe laturile opuse se găsesc pe un cerc cu*

centrul în intersecţia diagonalelor şi având acele vârfuri diametral opuse (fig. 3).

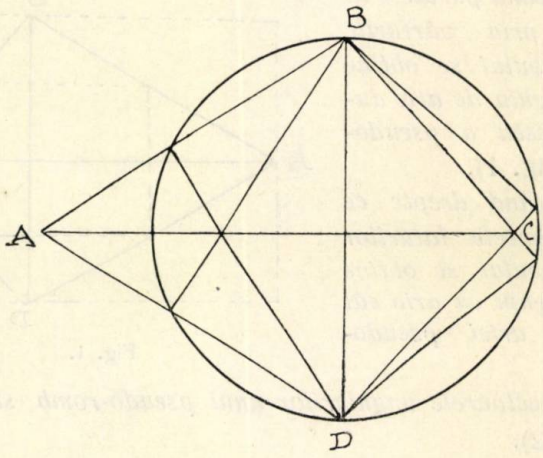


Fig. 3.

6. *Segmentul ce uneşte punctul de intersecţie al diagonalelor cu mijlocul unei laturi este egal cu jumătatea lungimii acelei laturi* (fig. 4).

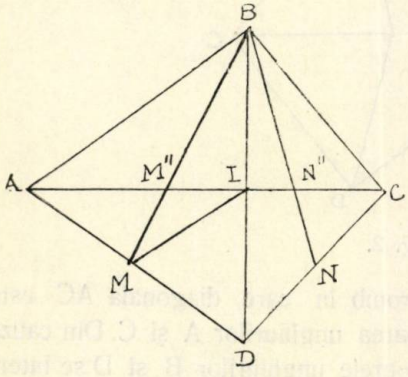


Fig. 4.

7. *Dreptele ce unesc unul din vârfurile din afara axei de simetrie cu mijlocul laturilor opuse, interceptează pe axă un segment egal cu a treia parte din lungimea acestei diagonale.*

Fie M, N mijloacele laturilor AD, DC; M'', N'' intersecţiile lui BM şi BN cu AC. BM şi AI sunt mediane în triunghiul ABD, iar BN şi CI în triunghiul CBD. Deci:

$$IM'' = \tfrac{1}{3}\,AI \quad ; \quad IN'' = \tfrac{1}{3}\,IC \ , \quad \therefore \quad M''N'' = \tfrac{1}{3}\,AC.$$

8. *Segmentul ce uneşte unul din vârfurile din afara axei cu mijlocul uneia din laturile opuse, este întâlnit de axă la o distanţă egală cu 2/3 din lungimea lui măsurată de la vârf.*

9. *Suma distanţelor dela un punct mobil ce se mişcă pe diagonala ce nu e axă la cele patru laturi ale pseudo-rombului, este constantă* (fig. 5).

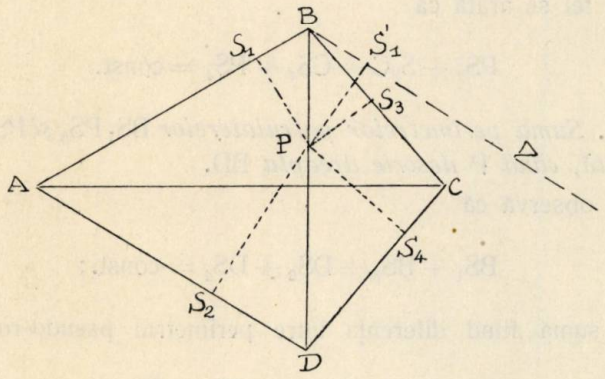


Fig. 5.

Fie P punctul mobil pe BD; fie PS_1, PS_2, PS_3, PS_4 distanţele dela P la AB, AD, BC, CD. Se duce BΔ paralel cu AD şi PS'_1 perpendicular pe BΔ. Avem:

$$\sphericalangle \Delta BD = \sphericalangle ADB = \sphericalangle ABD.$$

Deci BΔ şi AB sunt simetrice în raport cu BD; iar $PS_1 = PS'_1$. Rezultă că:

$$PS_1 + PS_2 = PS'_1 + PS_2 = S'_1 S_2 = \text{const.}$$

La fel:

$$PS_3 + PS_4 = \text{const.} \quad \therefore \quad PS_1 + PS_2 + PS_3 + PS_4 = \text{const.}$$

când P se mişcă pe BD.

10. *Perimetrele patrulaterelor* $AS_1 PS_2$ *şi* $PS_3 CS_4$ *sunt constante când* P *descrie dreapta* BD.

Intr'adevăr:

$$BS_1 + DS_2 = BS'_1 + S_2 D = \text{const.}$$

$$AS_1 + AS_2 = AB - BS_1 + AD - DS_2 = AB + AD - (BS_1 + DS_2) = \text{const.}$$

deoarece termenii acestei diferenţe sunt constanţi; deci

$$AS_1 + AS_2 = \text{const.}\ ;\ PS_1 + PS_2 = \text{const.}$$

de unde deducem:

$$AS_1 + PS_1 + PS_2 + AS_2 = \text{const.}$$

La fel se arată că

$$PS_3 + S_3C + CS_4 + PS_4 = \text{const.}$$

11. *Suma perimetrelor patrulaterelor* BS_1PS_3 *şi* PS_2DS_4 *este constantă, când* P *descrie dreapta* BD.

Se observă că

$$BS_1 + BS_3 + DS_2 + DS_4 = \text{const.};$$

această sumă fiind diferenţa între perimetrul pseudo-rombului şi

$$AS_1 + AS_2 + CS_3 + CS_4.$$

12. *Segmentele ce unesc mijloacele laturilor opuse ale unui pseudo-romb se intersectează într'un punct* G *de pe* AC, G *fiind mijlocul acelor segmente* (fig. 6).

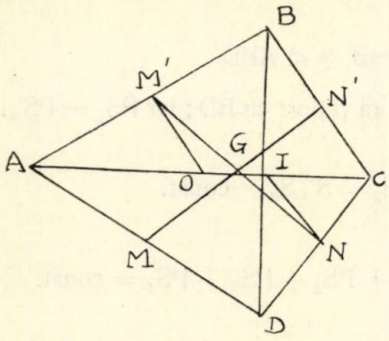


Fig. 6.

Într'adevăr: mijloacele M', M ale laturilor AB şi AD sunt simetrice în raport cu AC. La fel mijloacele N' şi N ale laturilor BC şi CD. Rezultă că G, intersecţia lui M'N cu MN' se găseşte pe AC.

Fie O mijlocul diagonalei AC.

Avem:

$M'O \parallel BC$; $BC \parallel IN$ $\therefore$ $M'O \parallel IN$

$$M'O = \tfrac{1}{2}BC \quad ; \quad IN = \tfrac{1}{2}BC \quad ; \quad M'O = IN.$$

Rezultă că figura M'ONI este un paralelogram în care M'N şi OI sunt diagonale. Deci:

$$M'G = GN' \quad ; \quad GO = GI.$$

La fel, se deduce $GM = GN'$.

13. *Unghiul format de bisectoarele unghiurilor obţinute prin prelungirea laturilor opuse ale pseudo-rombului este suplimentul unuia din unghiurile opuse diagonalei* AC (fig. 7).

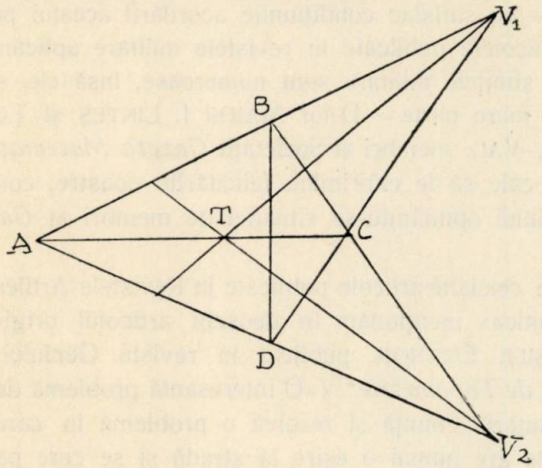


Fig. 7.

Fie V_1 şi V_2 intersecţiile laturilor AB, DC şi BC, AD; iar V_1T şi V_2T bisectoarele unghiurilor V_1 şi V_2. Pentru orice patrulater avem:

$$\sphericalangle V_1TV_2 = \tfrac{1}{2}(A + C).$$

În cazul pseudo-rombului observăm că:

$$\frac{A}{2} + \frac{C}{2} = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB = 180^0 - B = 180^0 - D$$

$$\sphericalangle V_1TV_2 = 180^0 - B = 180^0 - D.$$

IULIAN ALEXIU
(Licenţiat în matematici).

RAPORTUL COMISIUNEI
PENTRU
ACORDAREA PREMIULUI „GENERAL SC. PANAITESCU“
PE ANUL 1935 — 1936

Subsemnaţii membri ai comisiunei pentru decernarea premiului pentru lucrări de matematici, aplicate la ştiinţele militare, am constatat următoarele:

1. La redacţia *Gazetei Matematice* nu s'a primit nici un manuscris sau broşură, care să trateze un astfel de subiect.

2. Lucrările apărute de cari membrii comisiunei au putut avea cunoştinţă — nu satisfac condiţiunile acordării acestui premiu.

3. Articolele publicate în revistele militare aplicându-se matematicile la ştiinţele militare sunt numeroase, însă ele sunt datorite în cea mai mare parte — D-lor MAIOR I. LINTEŞ şi LOCOT. I. N. GEORGESCU-VAL, membri ai Societăţii *Gazeta Matematică,* şi ţinem pe această cale să le exprimăm felicitările noastre, condiţiile acordărei premiului opunându-se situaţiei de membri ai *Gazetei Matematice.*

Dintre celelalte articole publicate în Revistele Artileriei, Geniului şi «Aeronautica» menţionăm în deosebi articolul original al D-lui MAIOR VASILE EMANOIL publicat în revista Geniului şi intitulat *„Chestiuni de Topometrie"* («O interesantă problemă de parcelare») prin care autorul enunţă şi rezolvă o problemă în care se dă un poligon care are numai o eşire la stradă şi se cere parcelarea lui în anumite condiţiuni.

Considerăm însă că un astfel de articol deşi publicat într'o revistă militară nu ar putea corespunde în întregime spiritului în care s'a alcătuit premiul.

4. In aceste condiţiuni propunem ca pentru acest an premiul să fie acordat Revistei Geniului.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL „G-RAL SC. PANAITESCU"
GENERAL GH. BUICLIU,
COLONEL GH. LITEANU, ING. AL. BUNESCU.

Acest raport s'a citit şi aprobat în adunarea generală din 25 August 1936.

NOTE MATEMATICE

5. *O controversă.* Este vorba de *indicatorul* lui 1.

In *Arithmétique* par A. TARTINVILLE, la capitolul: *„Théorie des nombres"* pagina 202, se dă ca *evidentă* relaţiunea:

$$\varphi(1) = 0, \qquad (1)$$

în care $\varphi(n)$ indică *indicatorul* lui n. Pe baza acestei relaţiuni se enunţă mai târziu teorema:

A, B, C,..., N *fiind toţi divizorii unui număr* N, *dacă se adună numărul numerelor prime cu* A *şi inferioare lui, cu numărul numerelor prime cu* B *şi inferioare lui, etc., în fine cu numărul numerelor prime cu* n *şi inferioare lui, se obţine o sumă egală cu* (N — 1), *adică:*

$$\varphi(A) + \varphi(B) + \varphi(C) + \ldots + \varphi(N) = N - 1.$$

Pe de altă parte, D-l GABRIEL SUDAN, în cursul său de *„Algebra şi Teoria Numerelor"*, 1932 — 1933, Ediţia Facultăţii de Ştiinţe din Bucureşti, se spune:

„Indicatorul numărului 1 este **evident 1,** *adică* $\varphi(1) = 1$".

De aci enunţul următor dat de D-l SUDAN teoremei de mai sus:

„Suma indicatorilor tutulor divizorilor unui număr m *este* m".

Controversa aceasta ar trebui lămurită! Dacă ar fi să mă pronunţ asupra acestor două *evidenţe,* prima mi se pare mai *evidentă!*

G. SĂNDULACHE.

Pentru indicatorul unui număr definiţiunea cea mai obişnuită este următoarea:

„Indicatorul unui număr n *este numărul numerelor inferioare lui* n *şi coprime cu el".*

Pentru $n = 1$ nu există numere întregi inferioare lui n, aşa că, concluzia logică este că *1 nu poate avea indicator,* căci sub *1* nu există numere întregi. Zero nu este număr, el este negaţiunea numărului.

De unde a eşit atunci că indicatorul lui 1 este 0 pentru unii şi 1 pentru alţii?

Unii din partizanii lui $\varphi(1) = 0$ şi-au zis că dacă înaintea lui *1* în şirul natural al numerelor nu mai sunt numere întregi, având oarecare valoare, sunt zero numere şi deci nu există indicator pentru *1*, adică indicatorul este nul! Concluzia nu rezultă însă din premizele puse. Alţii însă pornesc dela relaţia evidentă pentru un număr prim p:

$$\varphi(p) = p - 1. \qquad (2)$$

Făcând aci $p = 1$ găsim $\varphi(1) = 0$. Dar acest raţionament presupune că *1* este un număr prim ca oricare alt număr prim p, ceeace nu este. El este *prim absolut* căci nu se împarte decât prin el însuşi, pe când celelalte se împart şi cu *1*. Numărul *1* se

împarte cu toate puterile lui, pe când aceasta nu se întâmplă cu oricare alt număr prim. Două numere prime egale nu sunt prime între ele, căci se divid cu *1* şi cu ele însăşi, pe când *1* este prim cu *1*, căci ele nu au decât pe *1* ca factor comun. Sunt apoi şi alte deosebiri între *1* şi toate celelalte numere prime. De aceea *1* nu se poate pune pe picior de egalitate cu toate numerele prime. Mai mult încă, sunt şi azi oameni cari se ocupă cu filosofia matematică şi care nici nu consideră pe *1* ca număr, ci izvorul numerelor. Sorgintea unui râu nu este râu, zic ei!

De unde a eşit acum că $\varphi(1) = 1$? Aceasta a eşit din o necesitate analoagă cu acea care a dus la egalitate $a^0 = 1$, care nu are nici un sens privind-o direct. Dacă însă voim să avem relaţiunea:

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

şi când $m = n$, atunci nu putem admite în calcule de cât $a^0 = 1$. Tot aşa, dacă p şi q sunt două numere prime oarecare, avem relaţia:

$$\varphi(pq) = \varphi(p) \times \varphi(q). \qquad (3)$$

Dacă aci facem $p = 1$ ne rămâne:

$$\varphi(q) = \varphi(1) \times \varphi(q)$$

de unde rezultă $\varphi(1) = 1$. Cu această *convenţiune*, formulele în care intervin indicatori se aplică şi numărului prim absolut *1*; altfel ele nu se aplică.

S'a căutat să se schimbe definiţia indicatorului aşa ca să iasă din definiţiune chiar, că $\varphi(1) = 1$. Astfel s'a propus a se înlocui în definiţiunea dată la început cuvântul *„inferioare“* cu *„nesuperioare“*. Aceeaşi definiţiune o dă şi EDOUARD LUCAS sub forma următoare:

„Se numeşte indicator al unui întreg positiv dat n, *numărul întregilor din şirul:*

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots, \quad n,$$

care sunt primi cu n *şi se notează această funcţiune de* n *cu* $\varphi(n)$*“ ... „Puisque le nombre 1 est premier à lui-même, son indicateur est 1“.*

Iar mai departe el spune:

„Dacă a reprezintă un număr prim, avem evident:

$$\varphi(a) = a - 1.,$$

şi se observă că formula nu ar fi inaplicabilă dacă am considera pe 1 ca un număr prim, pe când trebue neapărat să presupunem $\varphi(1) = 1$, *după cum se va vedea mai departe".*

H. LAURENT spune inperativ: «Nous ferons $\varphi(1) = 1$».

Mai adaog că pentru cei ce iau $\varphi(1) = 0$, egalitatea precedentă (3), făcând $p = 1$, dă $0 = \varphi(q)$ în care q ar fi un număr prim oarecare. Deci nici un număr prim nu ar avea numere inferioare lui şi prime cu el, ceeace este absurd!

Cred că dacă cineva nu s'a convins că trebue luat $\varphi(1) = 1$, trebue cel puţin să se dea învins!

I. IONESCU.

6. **Acum o sută de ani în lumea matematică.** *Date culese în biblioteca Seminarului Matematic din Iaşi din publicaţiile timpului.*

4. *„A doua metodă a lui* JACOBI*" pentru integrarea ecuaţiunilor cu derivate parţiale de ordinul I,* este comunicată de C. G. J. JACOBI profesorului ENKE, secretar al clasei matematice a academiei de ştiinţe din Berlin într'o scrisoare cu data de 29 Nov. 1836 (publicată în Journal f. die reine und angewandte Mathematik, t. 17 (1837) pp. 68-82. «Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen,»). Citäm (p. 79): ... este nevoie să se generalizeze metoda lui LAGRANGE pentru integrarea ecuaţiunilor cu derivate parţiale de ord. I cu trei variabile, la ecuaţii cu un număr oarecare de variabile. PFAFF, care considera că chestiunea este legată de dificultăţi insurmontabile, s'a văzut obligat, din această cauză, să renunţe de tot la acea metodă... Am reuşit să învinq dificultăţile care stăteau în calea generalizării metodei lui LAGRANGE şi prin aceasta să pun bazele unei teorii noui a ecuaţiilor cu derivate parţiale de ord. I cu un număr oarecare de variabile...».

Această metodă a lui JACOBI a mai fost după aceea perfecţionată şi generalizată de diferiţi matematicieni şi în special de MAYER şi LIE. Astăzi ea se studiază în tratatele clasice.

Mai menţionăm o notă a lui JACOBI publicată în «Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris» (T. III, pp. 59 — 61) şi care are oarecare legătură cu această chestiune: «Sur le mouvement d'un point et sur un cas particulier du problème des trois corps».

7. *Soluţiile întregi ale problemei 2701.* Soluţia dată acestei probleme, la pag. 34, XLII, se mărgineşte la a rezolva sistemul în A, B:

$$(1) \qquad A - B = 13m + 3 \; ; \; A = 5n \, . \, B$$

ceea ce este un simplu exerciţiu şi ceea ce nu cred că a fost în intenţia propunătorului problemei 2701. — Problema devine mai interesantă dacă se caută formele generale întregi ale numerelor A şi B, care verifică sistemul (1), din care se scoate

$$(2) \qquad A = \frac{5n\,(13m + 3)}{5n - 1} \quad \text{şi} \quad B = \frac{13m + 3}{5n - 1} \; ;$$

$5n$ şi $5n - 1$ fiind primi între ei, condiţia necesară şi suficientă ca A şi B să fie întregi este:

$$13m + 3 = k\,(5n - 1)$$

unde k este un întreg oarecare. — Problema revine deci la a rezolva în numere întregi ecuaţia:

$$(3) \qquad 5k \, . \, n - 13 \, . \, m = k + 3$$

în care m şi n sunt necunoscutele, iar k un întreg dat. — Din (3) se vede că trebue să avem $k \neq mult.\ 13$. Cu această restricţie, soluţiile întregi ale ecuaţiei (3) se află pe calea generală a rezolvării în numere întregi a ecuaţiei:

$$ax - by = c.$$

Fie

$$R_{i-1} = \frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}$$

penultima redusă a fracţiei $\frac{5k}{13}$, transformată în fracţie continuă.— Soluţiile întregi ale ecuaţiei (3) vor fi (a se vedea de exemplu *Cours d'Algèbre* par B. NIEWENGLOWSKI, 4-e ed. tome 1-er pag. 328):

$$n = (-1)^i \, (k + 3)\, Q_{i-1} + 5kt$$

$$m = (-1)^i \, (k + 3)\, Q_{i-1} + 13t$$

unde t este un întreg oarecare pozitiv sau negativ, iar $k \neq 13p$. Cu aceste valori, A şi B din (2) devin:

$$A = 5k\,[(-1)^i \, (k + 3)\, Q_{i-1} + 5kt]; \quad B = k$$

şi astfel problema ce ne-am pus, este complet rezolvată în numere întregi.

Pentru $k = 1$, avem soluţiile:

$$n = 13t - 20 \quad , \quad m = 5t - 8$$

$$A = 65t - 100 \quad ; \quad B = 1.$$

Se vede că B este independent de parametrul t.

Urmând demonstraţia precedentă cuvânt cu cuvânt, se poate rezolva problema 2701, pusă sub următoarea formă generală:

$$A \pm B = a \quad \text{şi} \quad A = b \, . \, B$$

în care a, b sunt numere întregi oarecare.

G-L GH. BUICLIU.

8. *Asupra problemei 4579.* Rezolvarea dată acestei probleme la pag. 639, Vol. XLI din «G. M.» este incompletă. In adevăr, se cer în enunţul acelei probleme trei numere în progresie aritmetică, scrise cu câte trei cifre diferite. Dăcă s_i , z_i , u_i , $(i = 1, 2, 3)$ sunt respectiv cifrele sutelor, zecilor şi unităţilor acelor numere, se ajunge în rezolvarea amintită la egalitatea:

$$(1) \quad 100(2s_2 - s_1 - s_3) + 10(2z_2 - z_1 - z_3) + (2u_2 - u_1 - u_3) = 0$$

din care se deduce:

$$(2) \quad 2s_2 = s_1 + s_3 \ , \ 2z_2 = z_1 + z_3 \ , \ 2u_2 = u_1 + u_3 \, .$$

Ori egalităţile (2) nu sunt o consecinţă *necesară* a egalităţii (1), ceea ce face ca soluţia dată problemei la locul amintit să fie *parţială*.

In adevăr, s_i , z_i , u_i , fiind numere de câte o cifră, din (1) rezultă în primul rând una din următoarele trei posibilităţi:

$$2u_2 = u_1 + u_3 \ , \ 2u_2 = 10 + u_1 + u_3 \ , \ 2u_2 = u_1 + u_3 - 10.$$

Să le examinăm pe rând.

a) $2u_2 = u_1 + u_3$. Egalitatea (1) cere, pe baza aceloraşi condiţiuni, una din posibilităţile:

$$2z_2 = z_1 + z_3 \ , \ 2z_2 = z_1 + z_3 + 10 \ , \ 2z_2 = z_1 + z_3 - 10$$

cărora le corespund respectiv:

$$2s_2 = s_1 + s_3 \ , \ 2s_2 = s_1 + s_3 - 1 \ , \ 2s_2 = s_1 + s_3 + 1.$$

b) $2u_2 = u_1 + u_3 + 10$. Egalitatea (1), conduce la unul din cazurile:

$$2z_2 = z_1 + z_3 - 1 \ , \ 2z_2 = z_1 + z_3 + 9 \ , \ 2z_2 = z_1 + z_3 - 11,$$

cărora le corespund respectiv:

$$2s_2 = s_1 + s_3 \ , \ 2s_2 = s_1 + s_3 - 1 \ , \ 2s_2 = s_1 + s_3 + 1.$$

c) $2u_2 = u_1 + u_3 - 10$. Egalitatea (1) conduce la unul din cazurile:

$$2z_2 = z_1 + z_3 + 1 \ , \ 2z_2 = z_1 + z_3 + 11 \ , \ 2z_2 = z_1 + z_3 - 9,$$

cărora le corespund respectiv

$$2s_2 = s_1 + s_3 \ , \ 2s_2 = s_1 + s_3 - 1 \ , \ 2s_2 = s_1 + s_3 + 1.$$

Iată în total $3 \times 3 = 9$ cazuri, din cari s'a examinat unul singur.

Este deci de aşteptat o soluţie completă a problemei.

M. G.

9. *Asupra unei proprietăţi a paralelogramului.*

Se cunoaşte proprietatea:

Intr'un paralelogram ABCD, fie M, N mijloacele laturilor DB, AB . CM, CN împart diagonala AD în 3 părţi egale.

Proprietatea admite reciprocă. In adevăr, însemnând cu P şi Q intersecţiile diagonalei AD cu CN şi CM, se vede din asemănarea triunghiurilor DQM, DPB că QM este paralel cu PB.

Din asemănarea triunghiurilor APN şi AQB, deducem că QB este paralel cu PN. CPBQ fiind paralelogram, BC şi PQ se taie în părţi egale.

Dar BC, împarte în 2 părţi egale şi segmentul AD, deci ABCD e paralelogram.

CRĂCIUNESCU I. MARCEL
Liceul Militar „N. Filipescu".

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ «REGELE CAROL II». BUCUREŞTI

Concurs de Admitere în Ciclul I

(15 Septemvrie — 5 Octomvrie 1936)

I. ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

1. Intr'un con circular drept, cu raza bazei de 3 m, iar înălţimea de 4 m., se înscrie un cilindru de înălţime x, iar în conul rămas, ce are ca bază, baza superioară a cilindrului, se'nscrie o sferă.

Să se studieze variaţia sumei volumelor cilindrului şi sferei astfel înscrise în conul dat, când înălţimea x variază şi să se determine valoarea lui x pentru care această sumă este maximă.

2. Se dă expresia:

$$E = \operatorname{tg}8\theta + 4\operatorname{tg}2\theta + 2(\operatorname{tg}\theta - \operatorname{cotg}\theta).$$

Să se exprime E cu ajutorul lui $x = \operatorname{tg}\theta - \operatorname{cotg}\theta$, fie $E = f(x)$ expresia astfel obţinută. Să se rezolve apoi ecuaţia $f(x) = 0$.

3. Să se discute ecuaţia:

$$L(1 + x^2) - 3e^{-x} = 0.$$

(L = logaritm neperian) şi să i se afle apoi rădăcinile cu o eroare $< \frac{1}{100}$.

II. GEOMETRIE ANALITICĂ

Se consideră, în plan, două axe rectangulare Ox şi Oy şi dreptele:

(1) $$y - x = 0$$

(2) $$y = +1.$$

Se cere:

1°. Să se determine dreapta:

(3) $$x = \lambda \qquad (\lambda > 0)$$

astfel ca aria (pozitivă) a triunghiului format de: (1), (2) şi (3) să fie $= +\frac{1}{2}$.

2°. După ce se va fi determinat numărul λ, să se scrie ecuaţia hiperbolei H care admite: pe (1) şi (2) ca asimptote, iar pe (3) ca tangentă.

3°. Să se verifice că axa Oy este şi ea tangentă la hiperbola (H).

III. GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ ŞI COMPLEMENTE DE GEOMETRIE

1. Cadrul interior al epurei : 270/450 mm.

Cadrul exterior al epurei : 330/510 mm.

Linia de pământ OX paralelă cu latura mare a cadrului şi la distanţa 160 mm de latura de jos a cadrului interior, iar O fiind pe latura din stânga a aceluiaşi cadru.

1°. Să se construiască punctul A (a, a'), din primul diedru, ştiind că *în epură :*

$$\sphericalangle aOX = 30^0 \ , \ \sphericalangle a'OX = 45^0,$$

iar suma depărtării (y) şi a cotei (z) ale punctului A este o lungime dată :

$$l = 90 \text{ mm}.$$

2°. Să se afle urma orizontală a planului care trece prin punctul A şi este paralel cu direcţiile (D_1) şi (D_2) definite astfel :

(D_1) este o frontală care face un unghiu de 60° cu direcţia OX, (D_2) este o direcţie ale cărei proiecţiuni (d', d) sunt paralele între ele şi fac cu linia de pământ unghiuri de 30° astfel că privind epura urma orizontală este situată la stânga şi urma verticală la dreapta.

3°. Se consideră doi cilindri (k_1) şi (k_2) definiţi astfel :

a) Cilindrul (k_1) are ca bază un cerc situat în planul orizontal de proiecţie cu centrul C_1 (240, 70, 0) şi raza $R_1 = 33$ mm, iar generatoarele lui sunt paralele cu dreapta (D_1) dela punctul 2°.

b) Cilindrul (k_2) are ca bază un cerc situat în planul orizontal de proiecţie cu centrul C_2 (310, 110, 0) şi Raza $R_2 = 44$ mm, iar generatoarele lui sunt paralele cu dreapta (D_2).

Se cere :

a) Să se deseneze intersecţia cilindrului (k_1) şi (k_2) reprezentând ansamblul celor două solide presupuse opace.

b) Se vor determina punctele remarcabile ale intersecţiei situate pe contururile aparente ale cilindrilor, punctele de cotă maximă şi minimă etc.

c) Se vor desena proiecţiile tangentei la curba de intersecţie în punctul de cotă egală cu 17 mm.

Epura se va trasa în tuş potrivit normelor.

Se va anexa o legendă explicativă.

2. Să se afle valoarea *unghiului solid*, definit de generatoarele unui con circular drept, cunoscând că raportul între înălţimea h a conului şi generatoarea sa G este egal cu $\frac{1}{3}$.

3. Pe o dreaptă orientată se consideră punctele A, B, C, respectiv de abscise a, b, c şi se cere să se determine ecuaţia care defineşte poziţia unui punct M de pe dreaptă, de abscisă x, astfel ca :

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = k \cdot \overline{MC}^2 \qquad (-\infty < k < +\infty)$$

Se va presupune apoi că :

$$a + b = 2kc \quad \text{şi} \quad ab = -kc^2$$

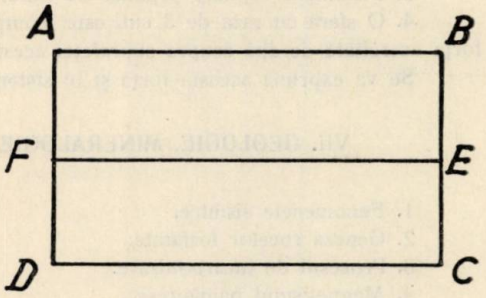
în această ipoteză, se cere să se determine valorile parametrului k pentru care punctul M este real.

IV. MECANICA

1. O placă dreptunghiulară ABCD, se compune din două plăci dreptunghiulare omogene şi egale, una ABEF de greutate specifică d_1 şi alta EFDC de greutate specială $d_2 = kd_1$, $k > 1$.

$$AB = EF = CD = a$$

$$BE = EC = \frac{b}{2} \cdot$$



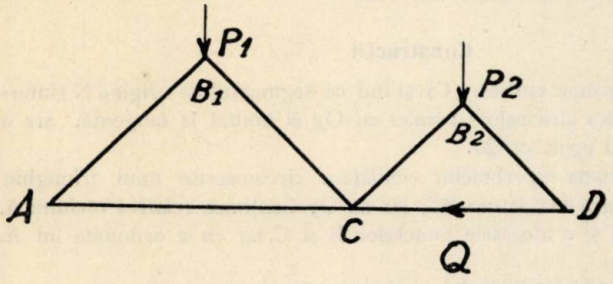
Placa e orizontală şi simplu rezemată în A şi B pe două picioare verticale. Să se spună de unde trebue sprijinită pe latura CD cu un al treilea picior tot vertical ca placa să nu se răstoarne.

Aplicaţie: $k = 2$.

2. Se dau într'un plan vertical, patru bare de greutăţi neglijabile două câte două egale,

$$AB_1 = B_1C \text{ şi } CB_2 = B_2D.$$

Barele sunt articulate în punctu fix A, între ele în B_1, C şi B_2, capetele C şi D pot aluneca fără frecare pe orizontala ACD. In B_1 şi B_2 sunt aplicate forţele verticale P_1 şi P_2, iar în D forţa orizontală Q. Se cere:



a) Poziţia de echilibru a sistemului (unghiurile $B_1AC = \alpha_1$ şi $B_2CD = \alpha_2$);

b) Reacţiunile din A, C şi D.

3. Pe un plan orizontal se reazemă un cub omogen de latură *a* şi greutate P. In afară de greutatea lui cubul este supus pe faţa superioară la o forţă orizontală H îndreptată după una din laturile acestei feţe. Să se spună care sunt condiţiile ca blocul considerat să rămână în echilibru, pe planul orizontal pe care se reazemă, sub acţiunea forţelor P şi H.

V. CHIMIE GENERALĂ

1. Să se descrie compuşii cu oxigenul a elementelor studiate ca metaloizi tetravalenţi şi compuşii cu halogenii a elementelor studiate ca metale monovalente.

2. Despre alcoolul etilic.

VI. FIZICA

1. Suprafaţa caustică în cazul reflexiunei şi refracţiunei.
2. Lichefacerea gazelor, coordonatele punctului critic, stări corespondente.
3. Fenomene capilare produse de tuburi.
4. O sferă cu raza de 3 cm. este complet afundată în apă. Care este forţa exercitată de apă asupra suprafeţei acestei sfere în sistemul C. G. S.? Se va exprima această forţă şi în sistemul mm. mgr. sec.

VII. GEOLOGIE, MINERALOGIE ŞI PETROGRAFIE

1. Fenomenele sismice.
2. Geneza rocelor fosfatate.
3. Procesul de incarbonizare.
4. Magnetismul pământesc.
5. Examinaţi dislocaţiile tangenţiale în secţiuni transversale.

(Toate chestiunile obligatorii. — Timpul acordat 4 ore).

ANUL I

(Sesiunea Septemvrie 1936)

GEOMETRIE ANALITICĂ

Construcţii

1. Să se determine curbele (C) ştiind că segmentul de origină N (intersecţia normalei cu axa absciselor) paralel cu Oy şi limitat la tangentă, are o lungime constantă şi egală cu $2a$.

2. Se cere ecuaţia hiperbolelor echilatere circumscrise unui triunghiu ABC. Se va lua ca axă Ox latura BC, iar ca Oy înălţimea relativă vârfului A. Se va însemna cu b şi c abscisele punctelor B şi C, iar cu a ordonata lui A.

ELECTROMECANICĂ, AVIAŢIE ŞI ARMAMENT

1. Să se construiască curba:

$$y = \frac{x^3 - x^2 + x - 2}{x - 1}$$

se va pune în evidenţă parabola asimptotă;

$$y = x^2 + 1$$

se va determina şi punctul de inflexiune al curbei.

2. Să se scrie ecuaţia unei sfere care trece prin punctele $P_1(x_1, y_1, z_1)$; $P_2(x_2, y_2, z_2)$ şi admite segmentul P_1P_2 ca diametru.

MINE

1. Se consideră curba:

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

şi se cere raza de curbură în punctul de abscisă $x = 0$.

2. Un triunghiu ABC are următoarele coordonate ale vârfurilor: $A(o, a)$; $B(b, o)$; $C(c, o)$.

Se cer coordonatele punctului de întâlnire al înălţimilor triunghiului dat.

(Toate chestiunile obligatorii. — Timpul acordat: 3 ore).

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Vol. CXXI. Fasc. VI. Iunie 1936. Buenos Aires. O relaţiune între expresiunile factoriale cu baze egale în grad, de JOSE BABINI.

Boletin Matematico. Anul IX. No. 4. Iunie 1936. Buenos Aires.

Funcţia $y = A\,|\,x - a|^0 + B\,|\,x - b|^0 + \ldots + |\,x - l\,|^0$

şi alte funcţii analoage, de B. I. BAIDAFF. Studiul unor tipuri de ecuaţiuni de congruenţe de M. O. GONZALEZ.

Idem. Anul IX. No. 5. Iulie 1936, Buenos Aires. Formule de reducere pentru integralele cuprinzând funcţii hiperbolice, de A. GLODEN. Studiul unor tipuri de ecuaţiuni de congruenţe, de M. O. GONZALEZ.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XLII. No. 6. Iunie 1936. Menasha. Inegalităţi lineare, de L. L. DINES. O remarcă asupra funcţiunilor, de M. S. ROBERTSON. O teoremă pentru ecuaţiile diferenţiale analoagă teoremei lui HILBERT-NETTO, de H. W. RAUDENBUSH. Asupra importanţei funcţiunilor lui GALERKIN şi PAPKOVITCH, de R. D. MINDLIN. Forma $wx + xy + yz + zu$, de E. T. BELL. Asupra corespondenţelor plane (2, 2), de L. H. CHAMBERS. Asupra mărimii coeficienţilor polinoamelor ciclotomice, de EMMA LEHMER. Iteraţia continuă la funcţiunile reale, de MORGAN WARD şi F. B. FULLER. Asupra teoremei de recurenţă a lui POINCARÉ, de CORNELIS-VISSER. Asupra zerurilor derivatei unei funcţii raţionale, de MORRIS-MORDEN. Asupra unor teoreme statistice de distribuţie, de SOLOMON KULLBAK. Asupra completării funcţiei lui LAMBERT, de EINAR HILLE şi OTTO SZÁSZ. Asupra derivatelor polinoamelor ortogonale, de H. L. KRALL. Normalele la un spaţiu V_n în hiperspaţiu, de NOLA L. ANDERSON şi LOUIS INGOLD. O caracterizare a mai multor limite din E_n dependinte numai de diminuarea corectivităţilor dimensionale ale complementului, de R. L. WILDER.

Idem. Vol. XLII. No. 7. Partea I. Iulie 1936. Menasha.

Idem. Vol. XLII. No. 7. Partea II. Iulie 1936. Menesha. Tabla de materie a volumelor XXXI-XL (1925—1934).

Buletinul Societăţii Politechnice. Anul L. No. 6. Iunie 1936.

Buletinul Institutului Român pentru Betoane Construcţii şi Drumuri. Anul I. No. 7 — 9. Iulie-Septemvrie 1936. Bucureşti.

Deutsche Matematik. Anul I. Fasc. II. Aprilie 1936. Leipzig. Evoluţia istorică a studiului transformării lineare şi sferice, de E. A. WEISS. Grupele de rotaţie limitate în spaţiul euclidian tridimensional, de LUDWIG BIEBERBACH. Funcţiuni ciclice pentru operaţiunile lineare înlănţuite şi polinoamele lui BERNOULLI generalizate, de F. KNOLL. Proprietăţile tăieturilor mulţimilor convexe în R_3, de GEORG AUMANN. Sistemul nul din R_5 interpretat în spaţiunul linear de HANS STEIDL. Asupra permutării grupelor lui GAUSS la o ecuaţie, de UDO WEGNER. Asupra noţiunii de omogenitate în algebra abstractă, de WERNER WEBER. Complexe lineare simetrice, de W. JUNG şi E. MELCHIOR.

Mathesis. Vol. I. No. 6—7. Iunie — Iulie 1936. Gembloux. Conicele în câmpul de involuţii eliptice de drepte, de PAUL DELENS. Asupra locului centrelor de curbură ale unei curbe strâmbe, de R. GOORMAGHTIGH. Studiul proectiv al ecuaţiei de gradul al patrulea, de M. LIOIS. Asupra valorilor medii relative, de JEAN LAGNEAU. Asupra unei teoreme a D-lui V. THÉBAULT, de AD. M. Suplimente oferite de D-l V. THÉBAULT: 1°. Asupra unei noi sfere asociată tetraedrului. 2°. Chestiuni de geometrie.

Spinx. Revue menssuelle des questions récréatives. Anul VI. No. 9. Septemvrie 1936.

OVIDIU N. ŢINO, M. THEOHARI, V. BĂDULESCU. Aritmetica pentru clasele I-a; II-a; III-a secundară. Ediţia I. Bucureşti 1936.

OVIDIU N. ŢINO, M. THEOHARI, V. BĂDULESCU. Geometria pentru clasele II-a; III-a; IV-a; V-a; VI-a secundară. Ediţia I. Bucureşti 1936.

OVIDIU N. ŢINO. Algebră elementară pentru clasa IV-a secundară. Ediţia I. Bucureşti 1936.

OVIDIU N. ŢINO, M. THEOHARI, V. BĂDULESCU. Algebră pentru clasa V-a secundară. Ediţia I. Bucureşti 1936.

OVIDIU N. ŢINO, M. TEOHARI, V. BĂDULESCU. Algebră pentru clasa VI-a secundară. Ediţia I. Bucureşti 1936.

OVIDIU N. ŢINO, M. THEOHARI, V. BĂDULESCU. Trigonometrie pentru clasa VI-a secundară. Ediţia I. Bucureşii 1936.

OVIDIU N. ŢINO, M. THEOHARI, V. BĂDULESCU. Algebră pentru clasa VII-a secundară, secţia ştiinţifică. Ediţia I. Bucureşti 1936.

OVIDIU N. ŢINO, M. THEOHARI, V. BĂDULESCU. Astronomie pentru clasa VII-a secundară. Ediţia I. Bucureşti 1936.

G. HOHEISEL. *Integralgleichungen.* Sammlung Göschen, Berlin-Leipzig, 1936.

Este al treilea volum, No. 1099, de acelaş autor după Gewöhliche Differentialgleichungen, No. 920, şi Partielle Differentialgleichungen No. 1003 ; apărut în Bibliothek zur Mathematik und Astronomie aus der Sammlung Göschen. După o introducere în care se dau noţiuni de Geometrie a spaţiilor funcţionale în două paragrafe: Spaţii lineare şi metrice, Coordonate şi sisteme ortogonale ; într'o expunere abstract-axiomatică : cuprinsul e împărţit în patru capitole în care noţiunile geometrice şi de teoria mulţimilor revin deseori pentru o concentrată şi clară prezentare. Aceste capitole sunt :

Cap. 1. Ecuaţii integrale lineare cu sâmbure oarecare cuprinzând Lema lui FREDHOLM, Sâmburi degenereţi, Sâmburi oarecari, Valori caracteristice, Rezolvanta, Determinanţii lui FREDHOLM. Metode practice de rezolvare.

Cap. 2. Sâmburele lui HERMITE cuprinzând : Propoziţie asupra rezolvărei, Valori caracteristice, Propoziţia asupra desvoltărei, Sâmburi iteraţi, Desvoltarea biliniară a sâmburilor nesimetrici.

Cap. 3. Sistemul ortogonal al funcţiunilor caracteristice

Cap. 4. Diferiţi sâmburi, cuprinzând : Sâmburi simetrizabili, Sâmburi impropriu singulari, Ecuaţia integrală VOLTERA-ABEL, Sâmburi propriu singulari.

Pe lângă exemplele care însoţesc diferite paragrafe, cartea se termină cu 14 probleme, parte teoretice, parte practice, toate cu schiţe de soluţii.

A. G.

I. IONESCU. ANDRÉ-MARIE AMPÈRE (1775—1836). (Extras din *Gazeta Matematică*). Bucureşti 1936.

ANDRÉ-MARIE AMPÈRE. (1775 — 1836). (Broşură tipărită de Institutul Naţional român pentru Studiul amenajării şi folosirii isvoarelor de energie I. R. E., cu ocaziunea comemorărilor făcute la Societatea Politechnică şi la Fundaţiunea Carol I). Bucureşti 1936.

AL. V. NICULESCU. *Une classe de courbes gauches.* (Extras din *Bulletin scientifique de l'École Politechnique de Timişoara*) Timişoara 1935.

AL. V. NICULESCU. *Courbes sphériques, courbes d'Enneper et de* M. TZITZÉICA (Extras din *Mathematica*). Cluj 1935.

AL. V. NICULESCU. *Courbes sphériques de* M. G. TZITZEICA. (Extras din *Mathematica*). Cluj 1936.

CERERI

Răspuns la Cererea No. 258.

Era chestiunea de a se da mijloace mnemotecnice pentru a putea scrie un număr mare de zecimale lui π. Francezii au nişte versuri cu care pot scrie 30 de cifre lui π. Iată aci o expresiune românească care ne permite să-i scriem 12 cifre :

Imi e greu a privi nepăsător un frumos număr ce-i ştiut dedemult

3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8

Numerele arată câte litere are fiecare cuvânt, sau grup de cuvinte legate între ele. Punând o virgulă după 3, avem scrisă valoarea lui π cu 11 zecimale.

M. H. BODNĂRESCU.

E de observat că cele două cuvinte alipite *«ce-i»* ar putea da loc la confuziuni, unii găsind că în loc de 3 ar trebui scris 21. Tot aşa unii ar putea scrie pe *«dedemult»* astfel: *de demult.* In asemenea chestiuni nu trebue să încapă interpretări şi confuziuni. Cererea rămâne la ordinea zilei până ce se va da o soluţie indiscutabilă!

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii

P. DECHALLES. Les éléments d'EUCLIDE expliquez d'une maniere nouvelle et très-facile, avec l'usage de chaque Proposition pour toutes les parties de Mathématiques par le P. DECHALLES de la Compagnie de Jesus. Nouvelle édition. Revûe, corrigée et augmentée par M. OZANAM, de l'Académie Royale des Sciences. Paris 1738.

Donată de D-l ERNEST TOPORĂSCU, Profesor.

L'Abbé E. GELIN. 450 Questions d'Arithmologie. Huy 1896.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

L'Abbè E. GELIN. Caractères de divisibilité. Namur 1909.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1858. *Să se găsească expresiunea generală a numerelor întregi şi pozitive* **a** *şi* **b** *astfel ca expresiunea* $\mathbf{a}^n \pm \mathbf{b}^n$ *să fie divizibilă cu suma* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

C. MITITELU.

I. *Expresiunea* $a^n + b^n$. 1^0. Dacă n este nepereche, această expresiune se divide cu $a + b$ oricare ar fi a şi b.

2^0. Fie $n = 2i$. Restul diviziunei lui $a^{2i} + b^{2i}$ prin $a + b$ este

$$(-b)^{2i} + (b)^{2i} = 2b^{2i}.$$

Problema revine la a găsi forma numerelor a şi b pentru care $2b^{2i}$ se divide prin $a+b$. Fie d c. m. m. c. d. al numerelor a şi b, m un număr întreg şi α, β două numere prime între ele aşa încât

$$2b^{2i} = m(a+b) \ , \ a = d\alpha \ , \ b = d\beta$$

$$(1) \qquad 2d^{2i-1}\,\beta^{2i} = m(\alpha+\beta).$$

Deoarece β este prim cu $\alpha+\beta$, (1) arată că $2d^{2i-1}$ trebue să se dividă prin $\alpha+\beta$. Numerele α şi β neputând fi simultan perechi, avem următoarele trei posibilităţi.

Intâi: $\alpha = 2p$, $\beta = 2q+1$, care duse în (1) dau succesiv

$$2d^{2i-1}(2q+1)^{2i} = m(2p+2q+1).$$

$$(2) \qquad d^{n-1} = \theta(2p+2q+1) = \lambda$$

$$m = 2\theta(2q+1)^n$$

$$(3) \qquad a = 2dp = 2p\sqrt[n-1]{\lambda} = 2p\sqrt[n-1]{\theta(2p+2q+1)}$$

$$(4) \qquad b = d(2q+1) = (2q+1)\sqrt[n-1]{\lambda} = (2q+1)\sqrt[n-1]{\theta(2p+2q+1)}.$$

Relaţiunile (3) şi (4) în care θ, $2p$ şi $2q+1$ sunt întregi arbitrari, dau expresiunile lui a şi b, iar (2) pe a lui d sau λ.

Relaţiunea (2) este totdeauna posibilă, căci totdeauna se găseşte un număr întreg pozitiv θ aşa încât produsul $\theta(2p+2q+1)$ să fie o putere de exponent $n-1 = 2i-1$.

De exemplu

$$n = 8 \ , \ p = 7 \ , \ q = 6 \ , \ 2p = 14 \ , \ 2q+1 = 13$$

$$a = 14\lambda^{\frac{1}{7}} \quad , \quad b = 13\lambda^{\frac{1}{7}}$$

$$\lambda = \theta(14+13) = 3^3\theta$$

$$\theta = m_1^7 \cdot m_2^7 \ldots m_s^7 \cdot 3^4$$

m_1, m_2, m_s fiind numere prime diferite de 3.

Cu acestea vom avea

$$a = m_1 \cdot m_2 \ldots m_s \cdot 3 \cdot 14$$

$$b = m_1 \cdot m_2 \ldots m_s \cdot 3 \cdot 13$$

şi $a^8 + b^8$ se divide prin $a+b$.

Al doilea: $\alpha = 2p + 1$, $\beta = 2q$ conduce la

$$2d^{n-1}(2q)^n = m(2p + 2q + 1)$$

$$d^{n-1} = \theta(2p + 2q + 1) = \lambda$$

$$m = 2\theta(2q)^n$$

$$(5) \qquad a = (2p + 1)\sqrt[n-1]{\lambda}\ ,\ b = 2q\sqrt[n-1]{\lambda}.$$

Al treilea: $\alpha = 2p + 1$, $\beta = 2q + 1$ conduce la

$$2d^{n-1}(2q + 1)^n = 2m(p + q + 1)$$

$$(6) \qquad d^{n-1}(2q + 1)^n = m(p + q + 1).$$

Cum $(2q + 1)$ şi $(p + q + 1)$ pot avea divizori comuni şi anume divizorii lui $p - q$ sau $q - p$, din (6) se scoate

$$(7) \qquad d^{n-1} = \frac{m(p + q + 1)}{(2q + 1)^n} = \lambda,$$

unde se poate determina ori când m aşa ca λ să fie întreg.

Ţinând seamă de (7) se deduce pentru a şi b:

$$a = (2p + 1)\sqrt[n-1]{\lambda}\ ,\ b = (2q + 1)\sqrt[n-1]{\lambda}.$$

II. *Expresiunea* $a^n - b^n$. 1°. Dacă n este pereche, această expresiune se divide totdeauna cu $a + b$.

2°. Dacă $n = 2i + 1$ restul diviziunei lui $a^n - b^n$ prin $a + b$ este

$$R = -2b^{2i+1}.$$

Se consideră numai valoarea absolută şi se caută ca şi la I, condiţiile ca R să se dividă cu $a + b$.

Se vede că problema revine la a înlocui în rezultatele dela I pe n prin $n + 1$ şi vom obţine 3 sisteme de expresiuni pentru a şi b analoage cu expresiunile (3), (4), (5) şi (6) dela I.

Notă. 1°. Soluţia precedentă este sugerată în parte de soluţia care a fost trimisă pe vremuri de D-l AL. BUNESCU, pe când era elev în clasa VII la liceul „Carol I" din Craiova.

2°. Au mai trimis soluţiuni parţiale D-nii: P. PANAITOPOL când era elev în cl. VII la liceul „Mihai Viteazul" Bucureşti; AL. PANTAZI, când era elev în cl. VII la Liceul „Petru Rareş" Piatra Neamţ şi AL. STOICA, când era elev în cl. VII la Liceul „Mihai Viteazul" Bucureşti.

3°. Se rezolvă pe aceeaşi cale şi se găsesc rezultate analoage când se caută expresiunile lui a şi b pentru care $a^n + b^n$ se divide prin $a - b$. Se vede că şi în acest caz $2b^n$ trebue să se dividă prin $a - b$.

G-L GH. B.

PROBLEMA 2640. *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^{2x} = (2x)^x .$$

Generalizare.

SORIN A. GOROVEI.

Să rezolvăm ecuaţia mai generală:

$$(ax)^{bx} = (bx)^{ax} .$$

Luând logaritmii în ambii membri; avem:

$$bx \lg a + bx \lg x = ax \lg b + ax \lg x ,$$

sau:

$$x(b \lg a + b \lg x - a \lg b - a \lg x) = 0.$$

De aci deducem cu uşurinţă:

(1) $\qquad x = 0 \quad$ şi $\quad (b - a) \lg x = \lg b^a - \lg a^b ,$

sau încă: $\qquad \lg x^{b-a} = \lg \dfrac{b^a}{a^b}$

2) $\qquad \therefore \; x = \sqrt[b-a]{\dfrac{b^a}{a^b}} .$

Pentru $a = 1$, $b = 2$ avem tocmai cazul ecuaţiei date, care are rădăcina:

$$x = 2.$$

Soluţii date de D-nii: AMĂRĂSCU O. GAVRIL, ARCADIAN P. N., BÂRSU T. I., BOTEA G. NICOLAE, CIORĂNESCU I. NICOLAE, CONSTANTINESCU ANTON, COŞEREANU ION, DOBRESCU-BĂBICI, FINŢESCU ANGHEL, GATAIANŢU V. BARBU, IONESCU-BREZUICA ILIE, ISTINIE-BREZUICA I. C., HULER IOAN, IONESCU I. LONGIN, JUJESCU I. GH., KATZ PINCU, LĂZĂRESCU FL. ST., MANOLESCU M. EMILIAN, MĂCIUCĂ OVIDIU, MIHĂESCU ŞT., NICOLAU TH. AUREL, NICOLAU H. C., POPESCU N. CORNELIU, POPESCU GH., POPOVICI TIBERIU, RIZESCU T. G., RIZESCU ION, ROSENFELD LEON, ROŞU AL. ALEXANDRU, SARIAN M., ŞCHÖNFELD H. A., SOLOMON I. WILHELM, STOICA N. AURELIU, TAUBER ALEXANDRU, TEODORESCU N. şi VASILIU C. ION.

V. A.

PROBLEMA 2661. *Să se stabilească identitatea:*

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & (a-b)^2 & a^2+b^2 & a^2-b^2 \\ (a-b)^2 & a^2+b^2 & a^2-b^2 & (a^2+b)^2 \\ a^2+b^2 & a^2-b^2 & (a+b)^2 & (a-b)^2 \\ b^2-b^2 & (a+b)^2 & (a-b)^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

$$= -16b^3(2a+b)(2a^2+b^2)[a^2+(a-b)^2$$

O. ORĂNESCU.

Adunând elementelor din prima linie respectiv elementele celorlalte linii, obţinem aceeaşi expresie $4a^2+2b^2$, astfel că determinantul notat cu D, devine:

$$D = 2(2a^2+b^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ (a-b)^2 & a^2+b^2 & a^2-b^2 & (a+b)^2 \\ a^2+b^2 & a^2-b^2 & (a+b)^2 & (a-b)^2 \\ a^2-b^2 & (a+b)^2 & (a-b)^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix},$$

sau încă:

$$D = 2(2a^2+b^2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a-b)^2 & 2ab & 2ab-2b^2 & 4ab \\ a^2+b^2 & -2b^2 & 2ab & -2ab \\ a^2-b^2 & 2b^2+2ab & 2b^2-2ab & 2b^2 \end{vmatrix}$$

$$= 16b^3(2a^2+b^2)\begin{vmatrix} a & a-b & 2a \\ -b & a & -a \\ b+a & b-a & b \end{vmatrix}.$$

Adunând elementelor primei coloane cu elementele coloanei a 3-a şi scăzând apoi elementele coloanei a 2-a, avem succesiv:

$$D = 16b^3(2a^2+b^2)\begin{vmatrix} 2a+b & a-b & 2a \\ -(2a+b) & a & -a \\ 2a+b & b-a & b \end{vmatrix}$$

$$D = 16b^3(2a^2+b^2)(2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a-b & 2a \\ -1 & a & -a \\ 1 & b-a & b \end{vmatrix},$$

sau:

$$D = 16b^3(2a+b)(2a^2+b^2) = \begin{vmatrix} 1 & a-b & 2a \\ 0 & 2a-b & a \\ 0 & b & b-a \end{vmatrix}$$

$$= 16b^3(2a+b)(2a^2+b^2)[(2a-b)(b-a)-ab]$$

$$= -16b^3(2a+b)(2a^2+b^2-2ab).$$

Deci în definitiv:

$$D = -16b^3)(2a+b)(2a^2+b^2)[a^2+(a-b)^2].$$

Soluţii bune date de D-nii: ADAM I. MIRCEA, ANTONIU S. ION, BARBĂLAT M. B., BLUMENFELD M. DAVID, BUŞILĂ A. ADRIAN, CIORĂNESCU I. CONSTANTIN, COŞEREANU IOAN, COŞNIŢĂ VIRGIL, DORNEANU VASILE, FINŢESCU A., FOCŞENEANU I. MIHAIL, GHEORGHIU TH. GH., GHIMICESCU I. GH., HUBER IOAN, ILIESCU EMILIAN, IONESCU I. LONGIN, IONESCU I. PAUL, ISTINIE-BREZUICA I. C., KATZ PINCU, LĂZĂRESCU FL. ŞTEFAN, MARIAN I., MARIN ŞTEFAN, MOISIL C. GR., NICOLAU TH. AUREL, POPESCU GH., POPOVICI TH. ION, POPOVICI TIBERIU, TAUBER ALEXANDRU, TEODORESCU N. şi VASILIU C. ION.

V. A.

PROBLEMA 3630. *Să se stabilească identitatea:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin a\,(2k+1)}{\cos[ak(k+2)+\frac{1}{4}\pi]\cos[a(k^2-1)+\frac{1}{4}\pi]} = \frac{\sin an\,(n+2)}{\sin[\frac{1}{4}\pi - an\,(n+2)]\cos\frac{1}{4}\pi}.$$

C. I. ISTINIE-BREZUICA.

I-a *soluţie* dată de D-nii: CEZAR COŞNIŢĂ, GH. TH. GHEORGHIU, P. I. GHIŞOIU.

Fie

$$f(x) = \frac{\sin a\,(x^2-1)}{\sin[\frac{1}{4}\pi - a\,(x^2-1)]}.$$

In baza relaţiunei evidente

$$\sum_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)] = f(n+1)-f(1)$$

putem scrie

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\sin ak\,(k+2)}{\sin\left[\frac{1}{4}\pi - ak\,(k+2)\right]} - \frac{\sin a\,(k^2-1)}{\sin\left[\frac{1}{4}\pi - a\,(k^2-1)\right]}\right\} = \frac{\sin an\,(n+2)}{\sin\left[\frac{1}{4}\pi - an\,(n+2)\right]}.$$

Dar

$$\sin\left[\tfrac{1}{4}\pi - ak\,(k+2)\right] = \cos\left[ak\,(k+2) + \tfrac{1}{4}\pi\right]$$
$$\sin\left[\tfrac{1}{4}\pi - a\,(k^2-1)\right] = \cos\left[a\,(k^2-1) + \tfrac{1}{4}\pi\right]$$

şi egalitatea de mai sus devine

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\sin ak\,(k+2)}{\cos\left[ak\,(k+2) + \frac{1}{4}\pi\right]} - \frac{\sin a\,(k^2-1)}{\cos\left[a\,(k^2-1) + \frac{1}{4}\pi\right]}\right\} = \frac{\sin an\,(n+2)}{\sin\left[\frac{1}{4}\pi - an\,(n+2)\right]}.$$

In marea paranteză, aducând la acelaşi numitor, calculul numărătorului ne dă :

$\sin ak\,(k+2)\cos\left[a\,(k^2-1) + \frac{1}{4}\pi\right] - \sin a\,(k^2-1)\cos\left[ak\,(k+2)\frac{1}{4}\pi\right)$
$= \sin ak\,(k+2)\cos a\,(k^2-1)\cos\frac{1}{4}\pi - \sin ak\,(k+2)\sin a\,(k^2-1[$
$\sin\frac{1}{4}\pi - \sin a\,(k^2-1)\cos ak\,(k+2)\cos\frac{1}{4}\pi + \sin a\,(k^2-1)\sin ak\,(k+2)$
$\sin\frac{1}{4}\pi = (\cos\frac{1}{4}\pi)\,.\,[\sin ak\,(k+2)\cos a\,(k^2-1) - \sin a\,(k^2-1)$
$\cos ak\,(k+2)] = \cos\frac{1}{4}\pi\,.\,\sin a\,(2k+1).$

Prin urmare, egalitatea precedentă devine

$$(\cos\tfrac{1}{4}\pi)\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin a\,(2k+1)}{\cos\left[ak\,(k+2) + \frac{1}{4}\pi\right]\,.\,\cos\left[a\,(k^2-1) + \frac{1}{4}\pi\right]} = \frac{\sin an\,(n+2)}{\sin\left[\frac{1}{4}\pi - an\,(n+2)\right.}$$

de unde identitatea din enunţul problemei rezultă imediat.

II-a *soluţie* dată de Domnii : M. MARGULIUS şi AD. C. GHEORGHIU.

Să considerăm expresiunea

$$\operatorname{tg}\left[ak\,(k+2) + \frac{\pi}{4}\right] - \operatorname{tg}\left[a\,(k^2-1) + \frac{\pi}{4}\right].$$

Făcând-o calculabilă prin logaritmi se obţine expresia de sub simbolul Σ din enunţ. Intr'adevăr avem

$$\operatorname{tg}\left[ak^2+2ak+\frac{\pi}{4}\right]-\operatorname{tg}\left[ak^2-a+\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=\frac{\sin a\,(2k+1)}{\cos\left[ak\,(k+2)+\frac{\pi}{4}\right]\cdot\cos\left[a\,(k^2-1)+\frac{\pi}{4}\right]}\,.$$

Insumând pentru valorile lui k dela 1 la n, avem deci

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin a\,(2k+1)}{\cos\left[ak\,(k+2)+\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[a\,(k^2-1)+\frac{\pi}{4}\right]}=$$

$$=\operatorname{tg}\left(3a+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\left(8a+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(3a+\frac{\pi}{4}\right)+$$

$$\operatorname{tg}\left(15a+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(8a+\frac{\pi}{4}\right)+\ldots+\operatorname{tg}\left(an^2+2an+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$\operatorname{tg}\left[an\,(n+2)+\frac{\pi}{4}\right]-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\frac{\sin an\,(n+2)}{\cos\left[an\,(n+2)+\frac{\pi}{4}\right]\cos\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{\sin an\,(n+2)}{\sin\left[\frac{\pi}{4}-an\,(n+2)\right]\cos\frac{\pi}{4}}$$

stabilind astfel identitatea din enunţ.

COL. G. I. L.

PROBLEMA 4091. *Să se arate că numerele :*

$$N_1=(19^{2m+1}+23^{2m+1})\,(21^{2n+1}+25^{2n+1})$$

$$N_2=3^{2m+1}\cdot 13^{2n}\cdot 11^{2m+1}+13^{2(m+n)+1}-3^{2m+1}\cdot 11^{2m+1}-13^{2m+1}$$

sunt divizibile cu 1932, oricari ar fi întregii m *şi* n.

N. C.

Soluţie dată de D-l GEORGE ŞT. ROŞCA:

1°. In general $A^m + B^m$ este divizibil prin A + B dacă *m* este impar. Această condiţie fiind îndeplinită pentru amândoi factorii numărului N_1, rezultă că N_1 se divide cu (19+23) (21+25) adică cu 1932.

2°. Numărul N_2 se poate scrie succesiv:

$$N_2 = 33^{2m+1} \cdot 13^{2n} + 13^{2m+1} \cdot 13^{2n} - 33^{2m+1} - 13^{2m+1}$$
$$= 33^{2m+1}(13^{2n} - 1) + 13^{2m+1}(13^{2n} - 1)$$
$$= (33^{2m+1} + 13^{2m+1})(13^{2n} - 1)$$
$$= (33^{2m+1} + 13^{2m+1})(169^n - 1).$$

Primul factor al produsului îndeplinind condiţia dela No. 1°. se divide cu (33 + 13) adică cu 46.

Al doilea factor al produsului este de forma $(A^m - B^m)$ care este totdeauna divizibil cu (A — B) sau în cazul nostru cu (169—1) adică cu 168. Intregul număr N_2 se divide cu 46 × 168 sau cu 46 × 42 × 4 adică cu 4 × 1932.

Am dovedit aşa dar că şi N_1 şi N_2 se divid cu 1932 oricare ar fi întregii *m* şi *n*.

Soluţii bune dela D-nii: N. N. ALDEA; HAR. P. IONESCU-BISS; CEZAR IVĂNESCU; M. MARGULIUS; SUB-LOC. E. G. MILEA; N. N. MIHĂILEANU; M. LEONTE A. NEGREA; I. PARĂPEANU; N. PATRAULEA şi SUB.-LOC. I. C. SAVIN.

PROBLEMA 4483. *Să se calculeze valoarea determinantului de ordin* $(p+1)$

$$D_{p+1} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{n!} & 0 & \frac{1}{(n-1)!} & 0 \ldots \\ \frac{1}{n!} & 0 & \frac{1}{(n-1)!} & 0 & \frac{1}{(n-2)!} \ldots \\ 0 \ldots & & & & \\ \frac{1}{(n-1)!} & 0 \ldots & & & \\ \ldots & & & & \\ \ldots & & & & \end{vmatrix}.$$

Există o valoare a lui $p > 0_0$ *pentru care determinantul este nul?*

M. GHERMĂNESCU.

Soluţie. Vom distinge două cazuri:

$$p = 2k \text{ şi } p = 2k - 1.$$

1°. $p = 2k$. Determinantul se poate scrie:

$$D_{2k+1} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{n!} & 0 & \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{(n-k+1)!} & 0 \\ \frac{1}{n!} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{(n-k)!} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \frac{1}{(n-k+1)!} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{(n-2k+1)!} \\ 0 & \frac{1}{(n-k)!} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{(n-2k+1)!} & 0 \end{vmatrix}.$$

Liniile de rang par se lasă neschimbate, iar la elementele primei linii se adună elementele liniei a doua, la elementele liniei a treia, acelea ale liniei a patra etc... până la urmă, la elementele liniei $2k-1$ se adună elementele liniei $2k$. Ultima linie se lasă neschimbată. Determinantul devine:

$$D_{2k+1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{n!} & \frac{1}{n!} & \cdots & \frac{1}{(n-k+1)!} & \frac{1}{(n-k+1)!} & \frac{1}{(n-k)!} \\ \frac{1}{n!} & 0 & \cdots & \frac{1}{(n-k+1)!} & 0 & \frac{1}{(n-k)!} \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & & & \\ \frac{1}{(n-k+1)!} & 0 & \cdots & \frac{1}{(n-2k+2)!} & 0 & \frac{1}{(n-2k+1)!} \\ 0 & \frac{1}{(n-k)!} & \cdots & 0 & \frac{1}{(n-2k+1)!} & 0 \end{vmatrix}.$$

Apoi facem schimbările următoare: linia întâia se lasă pe loc, linia a treia se duce în locul la a doua, linia a cincea în locul la a treia etc... linia $2k-1$ în locul liniei k. In total facem

$$\frac{k(k-1)}{2}$$

schimbări de semn. Determinantul se scrie :

$$(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{vmatrix} \frac{1}{n!} & \frac{1}{n!} & \cdots & \frac{1}{(n-k+1)!} & \frac{1}{(n-k+1)!} & \frac{1}{(n-k)!} \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & & & \\ \frac{1}{(n-k+1)!} & \frac{1}{(n-k+1)!} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{(n-2k+1)!} \\ \frac{1}{n!} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{(n-k)!} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{1}{(n-k+1)!} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{(n-2k+1)!} \\ 0 & \frac{1}{(n-k)!} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Facem aceleaşi schimbări cu coloanele, ducând însă şi ultima coloană, adică $2k+1$ în locul coloanei $k+1$. In total mai facem $\frac{k(k+1)}{2}$ schimbări de semn. Deci :

$$(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}+\frac{k(k+1)}{2}} = (-1)^{k(k-1)+k} = (-1)^k .$$

Determinantul devine :

$$D_{2k+1} = (-1)^k \begin{vmatrix} \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{(n-k)!} & \frac{1}{n!} & \cdots & \frac{1}{(n-k+1)!} \\ \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{(n-k+1)!} & \cdots & \frac{1}{(n-2k+1)!} & \frac{1}{(n-k+1)!} & \cdots & \frac{1}{(n-2k+2)!} \\ \frac{1}{n!} & \cdots & \frac{1}{(n-k)!} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{(n-k+1)!} & \cdots & \frac{1}{(n-2k+1)!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(n-k)!} & \cdots & \frac{1}{(n-2k+1)!} \end{vmatrix} = 0.$$

Desvoltând acum determinantul după regula lui LAPLACE şi anume după primele $(k+1)$ coloane se vede că determinantul are valoarea zero, deoarece determinanţii ce intră în desvoltarea din acest mod au sau două linii identice sau elementele unei linii sunt toate zero.

Deci : Când $p = 2k$ determinantul are valoarea zero.

2^0. $\qquad p = 2k - 1.$

Aplicând acelaşi raţionament găsim :

$$D_{2k} = \begin{vmatrix} \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} \cdots \frac{1}{(n-k+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} \cdots \frac{1}{(n-k+1)!} \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} \cdots \frac{1}{(n-k)!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} \cdots \frac{1}{(n-k)!} \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{(n-k+1)!} & \frac{1}{(n-k)!} \cdots \frac{1}{(n-2k+2)!} & \frac{1}{(n-k+1)!} \cdots & \frac{1}{(n-2k+2)!} \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} \cdots \frac{1}{(n-k+1)!} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{(n-k+1)!} & \frac{1}{(n-k)!} \cdots \frac{1}{(n-2k+2)!} & 0 \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Desvoltat după aceeaşi regulă ne dă :

$$D_{2k} = \begin{vmatrix} \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} \cdots \frac{1}{(n-k+1)!} \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} \cdots \frac{1}{(n-k)!} \\ \vdots & \\ \frac{1}{(n-k+1)!} & \frac{1}{(n-k)!} \cdots \frac{1}{(n-2k+2)!} \end{vmatrix}^2 .$$

Ori, acest determinant care intră la patrat este determinat de forma determinantului lui FLANCHER care se ştie că se calculează după procedeul special al diferenţelor. Aplicându-i acest procedeu suntem conduşi la rezultatul :

$$D_{2k} = \left[A \cdot \frac{1}{n!} \; \frac{1}{(n-1)!} \cdots \frac{1}{(n-k+1)!} \right]^2 .$$

Unde A este un coeficient numeric care corespunde ordinului determinantului.

SERGIU TARASIUC.

Notă. Determinantul acesta apare într'o problemă importantă din Teoria Funcţiunilor, în legătură cu o celebră teoremă a matematicianului francez E. PICARD :

Orice funcţiune întreagă $f(x)$ *admite cel mult o valoare excepţională,* adică există cel mult o singură constantă a, pentru care ecuaţia

$$f(x) = a$$

are zero sau un număr finit de rădăcini.

Determinantul propus se întâlneşte cu ocazia determinării valorii excepţionale a funcţiunii $f(x) = e^{x^2}$.

M. G.

PROBLEMA 4546. *Să se arate că seria cu termenul general*

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$$

este convergentă.

M. GHERMĂNESCU.

1°. *Soluţie* dată de D-l D. MAVRODIN (student).

Putem scrie:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e^{m\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{m}\right)} = e^{m\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} + \frac{\lambda}{m^3}\right)} = e \cdot e^{-\frac{1}{2m} + \frac{\lambda}{m^2}}$$

$$= e\left(1 - \frac{1}{2m} + \frac{\mu}{m^2}\right),$$

deci

$$u_n = e\left(1 - \frac{1}{2(2n+1)} + \frac{\mu_1}{(2n+1)^2}\right) - e\left(1 - \frac{1}{4n} + \frac{\mu_2}{4n^2}\right)$$

$$= e\left[\frac{1}{4n(2n+1)} + \frac{\mu_1}{(2n+1)^2} - \frac{\mu_2}{4n_2}\right],$$

ceea ce arată că seria propusă este comparabilă cu

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots,$$

adică este convergentă.

2⁰. *Soluție* dată de D-l SILAȘ GEORGE (student Cluj).

Fie S_n suma primilor n termeni ai seriei propuse; se știe că, pentru n întreg și pozitiv, avem [1])

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

deci $u_n > 0$, ceiace atrage și $S_n > 0$.

Observăm că S_n este termenul general al unui șir crescător căci $u_n > 0$, apoi, scriind

$$S_n = -\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left[\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 - \left(1+\frac{1}{4}\right)^4\right] +$$

$$\ldots + \left[\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1} - \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right] + \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$$

se vede că parantezele mari sunt negative deci S_n se obține din $\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$ scăzând cantități pozitive adică putem scrie

$$0 < S_n < \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} < e.$$

Șirul S_n fiind crescător și limitat superior admite o limită, deci seria propusă este convergentă, având o sumă inferioară numărului e.

3⁰. *Soluție* dată de D-l T. STOICESCU.

Să punem

$$2n = k \ , \ u_n = f(k) \ , \ \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \varphi(k);$$

putem scrie

$$u_n = f(k) = \varphi(k+1) - \varphi(k)$$

sau, după formula creșterilor finite,

$$u_n = \varphi'(k+\theta) \quad , \quad 0 < \theta < 1$$

deci

$$u_n = \left(1+\frac{1}{k+\theta}\right)^{k+\theta}\left[L\left(1+\frac{1}{k+\theta}\right) - \frac{1}{k+\theta+1}\right].$$

---

1) M. GHERMĂNESCU, *Curs de Algebră Superioară*, pag. 130. Pentru n negativ avem inegalitatea inversă (N. R.).

Insă

$$L\left(1+\frac{1}{k+\theta}\right)=\frac{1}{k+\theta}-\frac{1}{2(k+\theta)^2}+\frac{\lambda}{(k+\theta)^3}$$

deci

$$u_n=\left(1+\frac{1}{k+\theta}\right)^{k+\theta}\left[\frac{k+\theta-1}{1(k+\theta)^2(k+\theta+1)}+\frac{\lambda}{(k+\theta)^3}\right],$$

din care deduce uşor

$$\lim n^2 u_n=\frac{e}{8},$$

adică seria propusă este comparabilă cu seria indicată în prima soluţie, deci este convergentă.

4°. *Altă soluţie.* Putem scrie:

$$u_n=\sum_0^{2n}\left[\frac{C_{2n+1}^p}{(2n+1)^p}-\frac{C_{2n}^p}{(2n)^p}\right]+\frac{1}{(2n+1)^{2n+1}}$$

Dacă însemnăm cu v_p paranteza mare de sub semnul Σ, putem scrie:

$$p!\,v_p=\frac{(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-p+2)}{(2n+1)^{p-1}(2n)^{p-1}}\left[\frac{p(p-1)}{2}(2n)^{p-2}+\ldots\right]$$

deci

$$v_p<\frac{A}{4n(2n+1)(p-2)!}$$

A fiind o constantă pozitivă. Deducem

$$u_n<\frac{A}{4n(2n+1)}\left[1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(2n-2)!}\right]<\frac{Ae}{4n(2n+1)},$$

ceea ce arată că seria propusă este comparabilă cu seria arătată în prima soluţie.

Notă. 1°. Se poate uşor deduce că seria cu termenul general

$$U_n=(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

este nedeterminată. In adevăr, însemnând cu S_{2n} suma primilor $2n$ termeni, această sumă tinde cărte o limită finită, în baza problemei de mai sus. Avem apoi

$$S_{2n+1}=S_{2n}+\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$$

deci

$$\lim S_{2n+1}=\lim S_{2n}+e,$$

ceea ce probează afirmaţiunea făcută.

2°. In soluția publicată mai sus, D-l T. STOICESCU, dintr'o mică eroare de calcul, a dedus că seria propusă este comparabilă cu $v_n = \frac{1}{n^3}$. Am trecut însă peste aceasta, făcând rectificarea cuvenită în soluție, care de altfel este foarte frumoasă.

3°. Am mai primit o soluție, dela un reputat corespondent, care deși află rezultatul exact, căutând limita $n^2 u_n$, întrebuințează totuși procedee nepermise în determinarea acestei limite.

M. G.

PROBLEMA 4580. *Numărul 111 este scris într'un anume sistem de numerație. Se cere cea mai mică bază de numerație care dă un astfel de număr, produs a două numere de aceeași formă scrise în alte două sisteme de numerație.*

I. IONESCU.

Soluție dată de D-l I. C. POPESCU (Târgul Neamț); MIRCEA A. VASILESCU (Liceul Mihai Viteazu, Alba Iulia); D-RA ALEXANDRA AL. VASILESCU (Liceul de Fete, Alba Iulia).

Fie x, y, z bazele celor trei sisteme de numerație. Enunțul ne conduce la ecuația:

$$x^2 + x + 1 = (y^2 + y + 1)(z^2 + z + 1).$$

Cele mai mici soluțiuni pentru y și z sunt 2 și 3. Ele ne dau

$$x^2 + x + 1 = (2^2 + 2 + 1)(3^2 + 3 + 1) = 7 \times 13 = 91,$$

$$\therefore \quad x^2 + x - 90 = 0,$$

$$\therefore \quad x = \tfrac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 90}\right) = \tfrac{1}{2}(-1 \pm 19) = 9.$$

Soluția negativă nu convine. Deci numărul 111 scris în sistemul cu baza 9 este produsul numărului 111 scris în sistemul binar, prin numărul 111 scris în sistemul ternar. Aceasta este evident cea mai mică soluție și corespunde egalității:

$$91 = 7 \times 13,$$

din sistemul zecimal.

D-ra AL. VASILESCU și D-l M. VASILESCU au arătat că a doua soluție după aceasta este dată de egalitatea $273 = 13 \times 21$ din sistemul zecimal scriind cele trei numere respectiv în sistemele cu bazele 16, 3 și 4.

Unii corespondenți au găsit că soluția cea mai mică este dată de egalitatea zecimală $21 = 3 \times 7$ scriind numerele în sistemele de numerație cu bazele 4, 1 și 2, uitând că nu poate exista sistem de numerațiune cu baza 1!!

I. I.

PROBLEMA 4610. *Se consideră un triunghiu isoscel* OPQ *cu vârful în* O. *Pe latura* OP *se iau punctele* A *şi* M, *iar pe latura* OQ *se iau punctele* B *şi* N *astfel ca* $\overline{PA} = \overline{OB}$ *şi ca* $\overline{PM} = \overline{ON}$. *Se notează cu* x *lungimea segmentelor egale* AM *şi* BN. *Punctele* A *şi* B *sunt fixe.*

1°. *Să se arate că există două valori pentru* x *astfel ca segmentul* MN *să aibă o lungime dată. Cele două segmente se întâlnesc pe bisectoarea unghiului* O.

2°. *Să se determine* x *astfel ca* MN *să fie minimum. Odată* x *determinat, se notează cu* C *intersecţia lui* MN *cu* AB *şi cu* D *intersecţia lui* OC *cu* PQ. *Să se arate că* OADB *este un paralelogram.*

D. V. IONESCU.

Soluţie. Notăm $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $AB = l$, şi unghiul POQ cu u. In triunghiul OMN, avem $OM = \alpha - x$ şi $ON = \beta + x$. Rezultă din formula

$$\overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 - 2\,OM \cdot ON \cos u$$

că

$$\overline{MN}^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta + x)^2 - 2(\alpha - x)(\beta + x)\cos u$$

sau

$$\overline{MN}^2 = 2(1 + \cos u)\,x^2 + 2(1 + \cos u)(\beta - \alpha)\,x + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos u$$

sau

$$\overline{MN}^2 = 4\cos^2\frac{u}{2}\left[x^2 - (\alpha - \beta)\,x + \frac{l^2}{4\cos^2\frac{u}{2}}\right].$$

Valoarea lui x pentru care MN are o lungime dată este rădăcina unei ecuaţii de forma

$$(1) \qquad x^2 - (\alpha - \beta)\,x + \frac{l^2}{4\cos^2\frac{u}{2}} = k.$$

Această ecuaţie fiind de gradul al doilea există două segmente MN şi M'N' de aceeaşi lungime.

Fie $x' = \overline{AM}$ rădăcina care dă segmentul MN şi $x'' = \overline{AM'}$ rădăcina care dă segmentul M'N'. Avem

$$OM - ON' = \alpha - x' - (\beta + x'') = \alpha - \beta - (x' + x'') = 0$$

pentrucă suma rădăcinilor ecuaţiei (1) este $\alpha - \beta$. Deci OM = ON'. La fel se arată că OM' = ON şi prin urmare segmentele MN, M'N' se întâlnesc pe bisectoarea unghiului O.

2°. Minimul lui MN are loc pentru rădăcina dublă a ecuaţiei (1) adică pentru

$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}. \tag{2}$$

In acest caz MN este perpendicular pe bisectoarea lui O şi dacă se notează cu B' simetricul lui B în raport cu bisectoarea, formula (2) arată că M este mijlocul lui AB'. Rezultă imediat că C este mijlocul lui AB.

Pe de altă parte M este mijlocul lui OP şi deci C este mijlocul lui OD. Rezultă că figura OBDA este un paralelogram.

Au rezolvat problema D-nii: ŞTEFAN M. MOISOVICI şi I. I. PETRESCU.

PROBLEMA 4627. *Un proverb românesc zice:* **„A te duce 9 ani de Duminici".** *Ce interval de timp corespunde acestui blestem?*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l C. SĂNDULACHE; AL. AL. VASILESCU (Liceul «Carmen Sylva» Timişoara); D. D. MATEIU (Liceul Internat, Iaşi).

Interpretarea blestemului este că durata lui trebue să fie atâtea Duminici câte zile sunt în 9 ani.

Intr'o grupă de 4 ani consecutivi sunt $3 \times 365 + 366 = 1461$ zile. In timp de 9 ani sunt 7 ani ordinari şi 2 bisecţi sau 6 ani ordinari şi 3 bisecţi; ultimul caz ivindu-se atunci când primul şi ultimul an sunt bisecţi. Deci în 9 ani consecutivi pot fi

$7 \times 365 + 2 \times 366 = 3287$ zile, sau $6 \times 365 + 3 \times 366 = 3288$ zile.

Să ne ocupăm mai întâi de primul caz. Să presupunem că blestemul s'ar face într'o Luni la ora 0. Din 7 în 7 zile avem atunci o Duminică. Ca să avem 3287 zile de Duminică ar trebui să treacă dar $7 \times 3287 = 23009$ zile. Impărțind acest număr cu 1461 găsim câtul 15 și restul de 1094 de zile. Sunt dar 15 grupe de câte 4 ani, adică 60 de ani, încă 2 ani ordinari și pe lângă aceștia 364 zile, ori 1 an ordinar, 1 an bisect și 363 de zile, după cum ultimul din acești ani este ordinar sau bisect. Rezultă de aci că durata cerută este de 62 ani și încă 364 ori 363 zile, după cum ultimul an este ordinar sau bisect.

Aceasta este durata maximă. Dacă blestemul s'ar face Marți, Miercuri, Joi, Vineri, Sâmbătă, sau Duminică la orele 0, durata scade respectiv cu 1, 2, 3, 4, 5, 6 zile.

In al doilea caz blestemul se face într'un an bisect. In acest caz în 9 ani sunt 3288 zile, adică cu 1 mai mult, și deci durata crește cu 7 zile devenind 23016 zile. Acestea dau 15 grupe de câte 4 ani și încă 3 ani ordinari, deci în total maximum 63 ani. Și aci se pot face reducerile de 1 — 6 zile ca în cazul precedent.

Observație. Socoteala Românului este bine făcută! Dacă un om îți dispare 9 ani de Duminici, adică cam 63 ani, ai scăpat de el toată viața, căci adăogând la acești 63 și etatea blestematului, poți zice că ai scăpat de el pentru totdeauna!

(Al. Al. Vasilescu și D. D. Mateiu).

PROBLEMA 4632. *Fie* D, D_1, D_2, D_3 *patru semidrepte concurente în* O *și formând trei unghiuri egale în această ordine; fie încă* D, D', D'', D''' *patru paralele echidistante. Dreptele* D_1 *și* D' *se taie în* M; *se ia pe* D_3, OP = OM. *Perpendicularele din* M *și* P *pe* D, *taie pe* D, *respectiv* D''' *în* N *și* Q. *Avem relația.*

$$\overline{PQ} \cdot \overline{OM}^2 = 4 \cdot \overline{MN}^3.$$

N. N. Mihăileanu.

Soluția I. Fie și R proiecția lui P pe D. Aria OPN este diferența ariilor OPMN și PMN, deci:

$$\overline{PR} \cdot \overline{ON} = 3 \cdot \overline{MN} \cdot \overline{ON} - \overline{MN} \cdot \overline{RN}$$

sau

$$\overline{MN} \cdot \overline{RN} = \overline{ON} \cdot \overline{PQ} \tag{1}$$

căci

$$\overline{PQ} = 3\,\overline{MN} - \overline{PR}.$$

Fie încă L simetricul lui M față de D și $K = (PL, OM)$. Se urmărește succesiv echivalența triunghiurilor RMN, PMN, și $\frac{1}{2}$ PLM și KML. Dar triunghiurile OMN și LKM sunt asemenea și raportul ariilor lor e $\overline{OM}^2 : \overline{ML}^2$, sau

$$\frac{\overline{ON}}{\overline{RN}} = \frac{\text{aria OMN}}{\text{aria RMN} = \text{aria KLM}} = \frac{\overline{OM}^2}{4 \cdot \overline{MN}^2}$$

(2) $$\therefore \quad 4 \cdot \overline{MN}^2 \cdot \overline{ON} = \overline{OM}^2 \cdot \overline{RN}.$$

Multiplicând (1) și (2) se obține relația de demonstrat.

Soluția II. Fie și S simetricul lui P față de D. Relația lui PTOLOMEU aplicată trapezului isoscel PMLS $(\overline{PM} = \overline{ML} = LS)$, conduce la:

$$\overline{PL}^2 = \overline{ML} \cdot \overline{PS} + \overline{PM}^2 = 4\,\overline{MN}\,(\overline{PR} + \overline{MN}).$$

Din triunghiurile asemenea KLM și ONM rezultă încă:

$$\frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} = \frac{KL}{ML} = \frac{\overline{PL}}{4 \cdot \overline{MN}}$$

introducând în relația precedentă:

$$\overline{OM}^2 \cdot (\overline{PR} + \overline{MN}) = 4\,MN \cdot \overline{ON}^2 = 4\,\overline{MN}\,(\overline{OM}^2 - \overline{MN}^2)$$

și în fine

$$4\,\overline{MN}^3 = \overline{OM}^2\,(3\,\overline{MN} - \overline{PR}) = \overline{OM}^2 \cdot \overline{PQ}.$$

Soluția III-a trigonometrică: Notând cu α, unghiul (D, D_1), avem:

$$\overline{MN} = OM \sin\alpha; \quad \overline{PQ} = 3\,MN - \overline{PR} = 3 \cdot \overline{OM} \sin\alpha - \overline{OM} \sin 3\alpha.$$

Relația de demonstrat conduce la identitatea trigonometrică cunoscută:

$$4 \sin^3\alpha = 3 \sin\alpha - \sin 3\alpha.$$

Au dat această ultimă soluție, D-rele: PARASCHIVA CĂLINESCU-TRÂMBIȚAȘ (Roșiorii de Vede), CONSTANȚA IONESCU (studentă Cluj), ALEXANDRA A. VASILESCU (cl. VI. Liceul «Carmen-Sylva», Timișoara) și D-nii: MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila) și RADU APOSTOL (cl. VI. Liceul Militar «Nicolae Filipescu»).

EXERCIȚII

4. Dacă p, q, r sunt trei numere întregi pozitive, iar a_{p-q}, a_p, a_{p+r} sunt laturile poligoanelor regulate de $p-q$, p, $p+r$ laturi și înscrise în același cerc, atunci:

1°. Dacă

$$p \geqslant q + \sqrt{q(q+r)}$$

avem:

$$a_{p-q} \geqslant a_p + a_{p+r}.$$

2°. Dacă

$$p + r > \sqrt{r(q+r)}$$

avem:

$$a_{p+r} < a_{p-q} + a_p.$$

3°. Dacă

$$p^2 > qr$$

avem:

$$a_p < a_{p-q} + a_{p+r}.$$

HAR. IONESCU-BISS.

R. Pentru demonstrație se folosește raționamentul din soluțiunea a treia a problemei 4567 din „G. M." — XLI — 595.

PROBLEME PROPUSE

4723. Să se rezolve sistemul:

$$\sec x = \operatorname{tg} 2y \quad , \quad \sec y = \operatorname{tg} 2x.$$

I. IONESCU.

4724. Să se construiască un poligon convex de șapte laturi, cunoscând centrele patratelor construite exterior sau interior pe laturile sale.

V. THÉBAULT.

4725. Două cercuri arbitrare duse prin mijlocul A_1 al unui segment BC, se retaie în G și taie încă, unul din ele pe CG și BC în M și N, iar celălalt pe BG și BC în P și Q; MN și PQ se intersectează în R. Simetrica, în raport cu BC, a dreptei ce unește R cu mijlocul segmentului NQ de pe BC, este paralelă cu A_1G.

N. N. MIHĂILEANU.

4726. Prin centrul I al cercului înscris în triunghiul ABC se duc două drepte perpendiculare Δ_1 şi Δ_2, care taie laturile triunghiului DEF (format de punctele de tangenţă ale cercului I cu laturile triunghiului ABC) respectiv în punctele A_1, B_1, C_1 şi A_2, B_2, C_2. Dacă se consideră în triunghiul ABC picioarele cevienelor punctului A_1, se cere să se arate că *polarele* acestor puncte faţă de cercul I taie laturile triunghiului DEF respectiv în trei puncte colineare pe dreapta a_1. Considerând dreptele b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 analoagele lui a_1 şi corespunzătoare punctelor B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, se cere să se arate că perechile de drepte (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) sunt perpendiculare şi trec respectiv printr'un punct fix când Δ_1 şi Δ_2 variază.

THEODOR GH. COCEA.

4727. Pe latura BC a triunghiului ABC înscris în cercul O se notează un punct M. Cercul de diametru AM taie cercul O într'un punct A'.

Să se demonstreze că A'M trece printr'un punct fix, când M variază pe latura BC.

GH. VASILIU.

4728. Fie ABC un triunghiu dreptunghic în A, de arie constantă. Presupunând punctul A fix, iar B descriind o dreaptă (D), se cere locul vârfului C.

ALEXANDRU NICULESCU.

4729. Să se găsească un punct în planul a trei cercuri date, astfel ca polarele lui faţă de cercurile considerate să formeze un triunghiu asemenea cu un triunghiu dat.

Caz particular: triunghiul dat este echilateral.

ION C. SCHILERU-DILI.

4730. Dacă se notează cu S_n suma puterilor a n^a a rădăcinilor ecuaţiei

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

să se găsească condiţiunea ca S_{n+1} să nu depindă de a_n.

A. ANGELESCU.

4731. Notațiunile fiind cele obișnuite pentru un triunghiu oarecare avem neegalitatea:

$$\frac{2pS}{p^2-a^2}+\frac{p^2-a^2}{S^2}\geqq 3.$$

HAR. IONESCU.

4732. Se dă un cerc O și un punct C pe acest cerc. Prin punctul C se duce un cerc O_1, având centrul pe diametrul OA al cercului O.

Fie OB diametrul cercului O, perpendicular pe OA. Cercul O_1 taie pe OB în punctul D. Se notează cu γ unghiul celor două cercuri (în punctul C) și cu δ unghiul din D al cercului O_1 cu dreapta OB.

Să se arate, că raportul

$$\frac{\sin\gamma}{\cos\delta}$$

nu depinde decât de cercul O și de punctul C.

TH. ANGHELUȚĂ.

4733. Dacă primii trei coeficienți ai unei ecuațiuni algebrice de gradul n, cu coeficienți reali,

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$$

sunt legați prin relațiunea

$$(n-1)a_1^2-na_0a_2=0,$$

atunci ecuațiunea are neapărat rădăcini imaginare.

M. GHERMĂNESCU.

4734. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuațiunii

$$x^3+ax^2+bx+c=0.$$

Se cere: 1°. Să se găsească relațiunea ce trebue să existe între coeficienți ca să avem:

$$\alpha x_1x_2+\beta x_2x_3+\gamma x_3x_1=0.$$

2°. Să se deducă de aci: *a)* condițiunea ca ecuațiunea să aibă o rădăcină dublă; *b)* condițiunea ca inversa unei rădăcini să fie egală cu suma inverselor celorlalte două; *c)* condițiunea ca una din rădăcini să fie media armonică a celorlalte două.

GH. TH. GHEORGHIU.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Alexiu Iulian (4711, N, P); *Apostol V. Radu* (4556, 691); *Boldescu Petre* (4636, 720); *Călinescu Aurelian* (4694); *Constantinescu N. Ioan* (P); *Dobrescu A.* (4307, 637, 46, 79, N); *Eckstein Virgil* (4633, 36, 712, 18, 20); *Gloden A.* (N); *Ionescu N. N.* (N); *Leuca Ion* (4716); *Matei D. Dumitru* (3768, 4658, 65); *Mavrodin D.* (4600, 10, 34, 50, 61, 700, 01, 14, 16, 17, 21); *Negrea A. Mircea-Leonte* (2398, 575, 85, 3867, 4708, 14, 16, 18, 19, 21); *Negulescu D. Ştefan* (4658, 68, 69); *Popescu I. G.* (C); *Popoviciu I. Gavril* (4659, 84); *Postelnicescu C. M.* (4286, 667, P); *Prodan G. Const.* (4485, 507, 24); *Sacter O.* (4514, 38, 69); *Savin C. Ioan Subloc.* (P); *Stănculescu I.* (4653); *Ştefănescu D. Nicolae* (4496, 714, 16, 18); *Ţiţeica I. Ilie* (4344, 407, 502, 95, 622, 26, 42, 43, 53, 55, 59, 69, 79, 92, 700, 01, 02, N, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie. Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu.** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa :

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN**

C. 42282

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLII

NUMĂRUL 3. — NOEMVRIE 1936

BIBLIOTECA CENTRALĂ

SUMARUL

1. † Inginerul Ion Popescu.
2. Dare de seamă asupra sărbătoririi D-lui profesor Ion Ionescu . . . *Maior I. Linteș.*
3. O ediție clujană a compendiului lui Ch. Wolff . . . . . *Victor Marian.*
4. Câteva simple observațiuni în legătură cu teorema lui Van Vleck · *Lt. C-dor Gh. Niculescu.*
5. Programa analitică hotărîtă pentru concursul „Gazetei Matematice" din anul 1937.
6. Raport asupra premiului „V. Conta" pentru anul 1936.
7. Note Matematice: 10 — 14.
8. Bibliografie.
9. Cereri: 261.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 2421, 2706, 4146, 4157, 4391, 4414, 4460, 4477, 4508, 4532, 4563, 4669, 4684, 4711.
12. Exerciții: 5.
13. Probleme propuse: 4735 — 4746.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1936

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer-Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1936 şi nerezolvate sunt enumărate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4715, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	220	260	80
5— 8 „	375	425	100
9—16 „	620	700	160
Coperta	120	160	80

† INGINERUL ION POPESCU

Dintre membrii ei cei mai de nădejde, Societatea Gazeta Matematică *a pierdut la 20 Septemvrie pe Inginerul* ION POPESCU.

Fost corespondent al Gazetei, *de îndată ce a absolvit Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele şi a început cariera inginerească* ION POPESCU *a ţinut să fie membru al Societăţii noastre şi de atunci şi până s'a stins din viaţă a arătat* Gazetei *o constantă şi nedesmintită dragoste. Luând parte activă la întreaga viaţă a* Gazetei *din ultimii 15 ani, el a contribuit la progresul Societăţii, muncind modest alături de toţi cei din generaţia sa, bucurându-se de succesele* Gazetei, *sprijinind-o în acţiunea ei generoasă, şi încorporându-se fără rezerve în atmosfera ei de idealism şi muncă desinteresată.*

Născut la 14 Octomvrie 1896, în Bucureşti, a făcut studiile liceale în Bucureşti la Liceul Matei Basarab şi a terminat în 1921 Şcoala de Poduri şi Şosele din Bucureşti, cu distincţie. A fost angajat imediat ca inginer la Societatea Comunală a Tramvaielor Bucureşti, unde a lucrat cu zel şi destoinicie până la moarte. Trecând prin mai toate serviciile acelei Societăţi, în frumoasa şi pilduitoarea lui carieră ION POPESCU *a lăsat urme adânci peste tot şi a obţinut rezultate strălucite. A condus cu autoritate*

și prîcepere Ateliere și Depouri, organizându-le și contribuind la modernizarea lor; a făcut recepții de vagoane și material de cale, în străinătate, cu competință și neobosită atenție; — a condus Serviciul de comenzi de materiale cu conștiinciozitate și remarcabilă suplețe; și în anii din urmă, ca Director, a condus servicii din ce în ce mai importante, punând pe baze științifice, — cu deosebit succes, — aranjarea traficului pe linii și calculul tarifelor. Minte clară, muncitor neobosit, entusiast și clar-văzător, el a condus cu fermitate, dar și cu largă înțelegere, făcându-se întotdeauna nu numai ascultat dar și iubit de întreg personalul în subordine. Atât Direcțiunea Generală a Societății de Tramvaie cât și întreg personalul acestei importante întreprinderi românești model, au regretat adânc și sincer pierderea atât de timpurie a Directorului Tracțiunii, ION POPESCU, *ale cărui merite și însemnată contribuție la organizarea și progresul Societății, în ultimii 15 ani, au fost unanim recunoscute.*

Era într'adevăr un inginer dotat și valoros și avea în același timp un caracter ales, o fire deschisă și o energie excepțională.

Dela Septemvrie 1927, fiind numit asistent la Școala Politehnică din București, pe lângă catedra de Poduri și Construcțiuni Metalice, ION POPESCU *a avut și acolo, ani dearândul, o activitate elogios apreciată de profesorul titular al cursului, D-l Inginer Inspector General* ION IONESCU, *și deosebit de folositoare seriilor de elevi-ingineri ce au profitat până în timpul din urmă de cunoștințele și experiența lui.*

Ca membru al Societății Politecnice din România, ION POPESCU *de asemenea a desvoltat o activitate din cele mai meritoase, îngrijind ani dearândul de tipărirea* Buletinului, *a cărui ridicare la nivelul apreciat de astăzi se datorește în bună parte și lui. O boală năprasnică l-a chinuit ultimii ani și cu toată lupta lui curajoasă și tăcută, l-a învins, smulgându-l în plină tinerețe și vigoare dela rosturile lui atât de utile atâtor instituții importante.*

Membrii Societății Gazeta Matematică *deplâng din toată inima pierderea Inginerului* ION POPESCU *și-i vor păstra neștearsă amintirea.*

DARE DE SEAMĂ

ASUPRA

SĂRBĂTORIRII D-LUI PROFESOR ION IONESCU

Duminică 1 Noemvrie, Şcoala Politecnică şi inginerii români, au sărbătorit pe D-l profesor ION IONESCU, în amfiteatrul cel mare al Şcoalei Politecnice «Regele Carol al II-lea» din Bucureşti, pentru patru decenii de activitate profesională şi inginerească.

In general sărbătoririle, de orice natură, au ceva rece, ceva care nu se poate defini cu precizie, dar care — prin caracterul lor oficial — devin mai puţin atractive, devin mai mult o expoziţie de figuri diverse, care mai de care mai gravă, printre care adesea figura celui sărbătorit abia se mai distinge.

Insuşi D-l profesor ION IONESCU a denumit aceste sărbătoriri un fel de «tămâeri». Indrăsnesc totuşi să cred că, de data aceasta, sărbătorirea nu a fost deloc o tămâere, căci obişnuitele «osanale», care se cheltuesc fără seamă, în astfel de împrejurări, au lipsit aproape complet. Iar ca să fiu mai sincer, pot afirma chiar că, sărbătorirea a avut aspectul mai mult al unei drepte judecăţi; s'a judecat trecutul, s'a judecat prezentul, s'a judecat monumentala operă mai realizată de sărbătorit în cele patru decenii.

Judecători au fost reprezentanţii oficiali, judecători au fost colegii D-lui profesor ION IONESCU, judecători au fost foştii şi actualii elevi, judecători au fost toţi inginerii români şi toată technicitatea românească. Şi cu toţii au ajuns la concluzia că opera celui sărbătorit este cu adevărat mare, cu adevărat reală, este demnă de admirat şi cu seamă demnă de imitat.

Precis la orele 11 — mulţi ar fi putut să-şi potrivească ceasornicul — D-l profesor ION IONESCU, urmat de oficialităţi, a intrat în marele amfiteatru, neîncăpător totuşi de astă dată. Prelungi şi intense aplause au izbucnit în toată sala, salutând pe ilustrul magistru al Şcoalei Politecnice şi neclintitul stâlp al tecnicei româneşti.

Primul cuvânt îl are D-l rector VASILESCU-KARPEN, rar, cumpănit, rupând parcă vorbele din suflet. D-sa arată rodnica activitate desfăşurată de sărbătorit, făcând din buna pregătire a inginerilor, principala sa preocupare.

« Invățământul său, prin amploarea sa, prin competința cu care-l « predă și mai ales prin neobosita stăruință pe care o pune, pentru « asimilarea lui de elevi, formează cea mai solidă bază a educației « inginerești și în același timp, un exemplu rar — poate unic — de « perseverență fără scăderi, timp de atâtea decenii, într'o direcțiune « atât de bine aleasă, încă dela început.

« Exigența D-lui profesor ION IONESCU merge de altfel paralel « cu dreptatea și cu justa și chibzuita apreciere a muncii depusă « de elevi ».

Incheind, D-l rector oferă sărbătoritului un volum omagial, din partea colegilor cari au colaborat la redactarea lui.

In numele Ministerului Instrucțiunii, D-l profesor C. KIRIȚESCU, secretar general, reliefează personalitatea D-lui Profesor ION IONESCU.

« Stâlp neclintit al Școlii Politecnice, el s'a identificat cu ea, « contribuind de multă vreme și în cea mai mare măsură, a-i înălța « reputația, a o înconjura cu aureola prestigiului, care a clasat-o « printre instituțiile de elită ale învățământului nostru superior.

« Cel mai sincer elogiu ce se poate face sărbătoritului de azi, « este recunoașterea forței de caracter, cu atât mai de preț, cu cât « este mai rară».

In numele Ministerului Lucrărilor Publice și Comunicațiilor, D-l TR. PÂRVU, secretar general, printre altele spune:

« Sărbătorim o muncă rodnică, *curat românească*, cu rezultate « ce pot face gelos pe cea mai prețuită competență ».

Inmânează apoi sărbătoritului decorația «Mare ofițer al Coroanei României», pe care M. S. Regele a binevoit să i-o confere.

In numele Academiei Române, D-l profesor G. ȚIȚEICA, secretar general, deslănțue poate cel mai aspru rechizitoriu ce mi-a fost dat să aud. Clar, energic, categoric, D-l ȚIȚEICA spune:

« In fața judecății te găsești astăzi, iubit și stimat coleg, și « poți sta cu conștiința liniștită și fruntea senină, fiindcă cele ce « vom spune noi nu pot covârși, nici măcar pe departe, meritele « D-tale mari, munca D-tale neobosită, priceperea D-tale aleasă, « jertfa D-tale nemăsurată.

« Toți cei cari am lucrat cu D-ta la Academie, la Școala Poli- « tecnică, la Societatea Politecnică, la Societatea de Științe, dar mai « ales la Gazeta Matematică, toți știu prea bine că dincolo de figura

« D-tale deseori încruntată, dincolo de cuvântul D-tale nu rareori « tăios, dincolo de ţinuta D-tale în unele discuţii uneori iute şi aspră, « se găsesc însuşiri deosebite, de o rară valoare, de o deosebită « competenţă şi mai ales de o mare înălţime morală.

« Pe unde ai trecut, ai fost un element hotărâtor de consoli- « dare. Ai fost nu numai unul din fondatorii cei mai de seamă ai « Gazetei Matematice, dar dela cel dintâi număr şi până astăzi ai « fost şi eşti păstrătorul bunei conduceri, prin sfaturile şi prin pri- « vegherea D-tale neadormită.

. . . . . .

. . . . . .

« Trebue să adaug că multă lume, care nu e deplin informată, « te socoteşte ca un om rău şi duşmănos. E ceva adevărat în această « părere. Ştim cu toţii că ai fost totdeauna şi eşti şi acum duşman « neîmpăcat şi neînduplecat al intrigii, al minciunii, al fraudei, al « lenei şi al oricărei neîndepliniri cinstite şi exacte a datoriei. Ştim « că ai luptat şi ai înfierat cu cuvântul şi cu scrisul nedreptatea sub « toate formele şi de oriunde ar fi venit. Dacă aceasta e răutate, « atunci eşti om rău şi bine ar fi să fie mulţi oameni răi ca D-ta.

« Dar, puţini cunosc latura caldă a sufletului D-tale, puţini « ştiu că ai dat totdeauna sprijin discret prietenilor în lipsă sau « corespondenţilor buni dela Gazeta Matematică şi că ai apărat fără « preget munca curată, sinceră, făcută cu bună voinţă şi bună cre- « dinţă şi în fine că ai întărit cu entusiasmul D-tale creator şi de- « sinteresat toate întreprinderile ştiinţifice bune.

« Ai fost şi eşti ceeace se chiamă de obiceiu om dintr'o bucată, « om întreg, dar nu întreg ca un număr întreg oarecare, ci ca un « număr prim, care nu se împarte decât cu el însuşi şi cu unitatea.

« Prin munca D-tale, prin caracterul D-tale, prin linia dreaptă « a vieţii D-tale, vei rămâne legendar. Peste vreo 50 de ani, când « amănuntele se vor uita, are să se povestească despre D-ta: A fost « odată ca niciodată un inginer straşnic, ION IONESCU, stâncă de « granit, inimă de aur, om de treabă şi om de ispravă ».

Ah! ce sublimă caracterizare şi cât de spontană a fost apro- barea întregei asistente, prin nesfârşitele ei aplause.

In numele Societăţii Politecnice, D-l profesor C. BUŞILĂ, pre- şedintele Societăţii, expune realizările D-lui profesor ION IONESCU.

In numele Asociației Generale a Inginerilor, D-l profesor M. MANOILESCU, președintele asociației, aduce un tineresc cuvânt de închinare:

« In veacul al 19-lea care n'a avut dictatori, D-l ION IONESCU « a fost în cursul său de acțiune un mare dictator, înfățișându-se « permanent ca o forță exterioară, destinată să îndrepte toate de- « fectele naturale ale spiritului românesc: superficialitatea, nepreci- « ziunea, ușurința».

In numele «Regiei autonome a porturilor și căilor de comunicație pe apă» vorbește D-l inginer VARDALA, director general.

Societatea «Gazeta Matematică» și-a rezervat un cald, bun, sincer și bătrânesc cuvânt de omagiu, adus ilustrului sărbătorit, prin D-l profesor A. GH. IOACHIMESCU, care a spus următoarele:

« Delegația, care administrează Societatea «Gazeta Matema- « tică», mi-a dat însărcinarea să reprezint această instituție la ser- « barea de azi. Am primit cu plăcere și mulțumire această însărci- « nare, deși cuvintele mele ar fi prea palide spre a exprima toată « stima și admirația ce o am pentru acest prieten, pe care îl cunosc « de aproape o jumătate de veac.

« ION IONESCU este nu numai unul din fondatoriii «Gazetei « Matematice», el este chiar inițiatorul acestei creațiuni, iar azi e « sufletul ei, «IONESCU *este Gazeta și Gazeta este* IONESCU», după « cum spunea colegul ȚIȚEICA acum douăzeci și ceva de ani, lucru « adevărat atunci și tot așa de adevărat și azi. A avea o idee bună « este lucru interesant, a o realiza însă este și mai important; iar « meritul cel mare al lui IONESCU este că a reușit să o realizeze, « să o facă să trăiască, învingând, prin credința și munca sa, scepti- « cismul multora cu care a plecat la drum. Atrași de entusiasmul « și credința sa neclintită în succesul întreprinderii, s'a plecat la « drum cu voie bună și s'a reușit.

« In cei patruzeci și ceva de ani de apariție a «Gazetei Ma- « tematice» mulți din membrii fondatori, sau din cei veniți mai în « urmă, au dispărut, alții — atrași de alte preocupări, — au lăsat-o « mai domol, IONESCU a rămas, în tot acest lung interval de timp, « același soldat devotat al revistei. Nu e număr al revistei în care « IONESCU să nu fi publicat ceva: un articol, o notă, probleme « propuse și probleme rezolvate, etc. . . . Sunt de menționat în spe- « cial articolele sale cu privire la istoricul matematicelor; de altfel

« chestiunile relative la istoria culturală a țării noastre l-au pasionat « întotdeauna ; răscolind arhivele a dat peste lucrări interesante, « pe care le-a făcut cunoscute atât la «Gazeta Matematică», cât și « în alte părți. In ceea ce privește problemele propuse, mai toate « prezintă o subtilitate, iar multe din ele sunt adevărate subiecte « de studii. Dacă parcurge cineva volumul jubilar publicat acum « doi ani de « Gazeta Matematică», își dă seamă cât de mare și « variată a fost activitatea sărbătoritului de azi la această revistă.

« Cei dela «Gazeta Matematică», care sunt în contact continuu « cu el, îl stimează, îl respectă și-l iubesc, atât pentru munca sa « neobosită, cât mai ales pentru caracterul său drept, desinteresat « și neșovăitor. El cu o voință nestrămutată și neînduplecată, prive- « ghează neadormit la interesele scumpei sale Gazete.

« Școala și «Gazeta Matematică» au fost preocupările sale de « căpetenie. Și într'o parte și în alta el a căutat să dea cunoștințe « variate și utile, dar mai ales să formeze caractere. Binevoitor cu « cei cari țin drumul drept, este neînduplecat cu cei cari caută să « ajungă prin mijloace piezișe. El este un om din cei de cari țara « noastră are mai multă nevoie. Dumnezeu să-l ție încă mulți ani în « sănătate și vigoare de muncă spre binele țării ».

In numele Soc. Române de Științe, Secția Matematică, vorbește tânărul ei președinte D-l profesor M. NICULESCU, arătând activitatea, la acea Societate, a sărbătoritului.

In numele foștilor asistenței ai sărbătoritului, vorbește D-l profesor GH. M. FILIPESCU. D-sa subliniază că D-l prof. ION IONESCU nu este numai un profesor de poduri, ci cel mai autorizat profesor de morală și cinste profesională.

In numele profesorilor foști elevi ai sărbătoritului, vorbește D-l profesor C. BUDEANU, relevând exigența pe care o punea sărbătoritul în formarea caracterelor și acelui simțimânt al datoriei, indispensabil inginerului, în formarea sentimentului de răspundere și mai presus de toate, în lealitatea și sinceritatea profesională.

In numele foștilor elevi ai Școalei Politecnice vorbește D-l inginer ISĂRESCU, care referindu-se la cursurile făcute de sărbătorit, spune :

« Atâta autoritate avea pentru noi fraza scrisă a profesorului « ION IONESCU, încât aveam sentimentul că privim cărțile streine ca « ilustrațiuni ale cursului său ».

In numele «Asociației elevilor ingineri constructori» vorbește D-l ERBICEANU, care mulțumind sărbătoritului profesor, îi predă — drept recunoștință — un pergament semnat de toți elevii.

Răspunde apoi tuturor D-l profesor ION IONESCU, răspuns care constitue cel mai clar, cel mai complet și cel mai precis catehism, demn de a fi urmat de oricine, nu numai de către ingineri.

Gazeta Matematică cere îngăduința D-lui profesor ION IONESCU de a-l publica în întregime, în numerele viitoare.

Inginerul, profesorul, savantul sărbătorit, a tras drepte și adânci brazde în huma technicei și științei românești.

Caracterul dârz, contrastând dureros cu acela al multor spinări încovoiate sub povara ambițiunilor deșarte, sub povara comodului oportunism sau al materialismului postbelic, voința de oțel, puterea de muncă nesfârșită și impresionanta punctualitate a sărbătoritului, oriunde și oricând, constituesc — laolaltă cu toate celelalte calități alese — pomenite mai sus, monumentala pildă pentru generațiile viitoare exemplificată de această «*rara avis în terris*».

MAIOR I. LINTEȘ

O EDIȚIE CLUJANĂ A COMPENDIULUI LUI CH. WOLFF

Intr'un articol precedent (vezi *Gazeta Matematică,* Anul XLI, pag. 414) am arătat că o mare parte din Aritmetică, precum și Geometria lui G. LAZĂR sunt traduse după un «Compendiu al elementelor matematicei universale», latinesc, tipărit în Cluj la 1773, al cărui autor este CH. WOLFF. Filosoful și matematicianul WOLFF a fost mult timp profesor la Universitatea din Halle și se poate considera ca regeneratorul învățământului matematic german din veacul al XVIII-lea. Activitatea lui în acest domeniu e de natură mai mult didactică și cuprinde întreaga matematică de atunci.

Dintre numeroasele lucrări ale acestui autor amintesc numai următoarele :

„Elementa matheseos universae", operă vastă, apărută la Halle, în două volume, la 1715, apoi în mai multe ediții, în 4 sau 5

volume la Halle, Geneva şi Verona. Demonstraţiile din această carte sunt foarte riguroase, ea fiind destinată lumii ştiinţifice. Mult timp acesta a fost manualul «Standard» al Universităţilor europene.

Pentru ţările germane WOLFF a scris un manual mai puţin riguros întitulat *„Anfangs-Gründe aller mathematischen Wissenschaften"*, apărut tot în Halle, în 4 volume, la 1710 — 1711, apoi în mai multe ediţii la Halle şi Frankfurt.

«Compendiul» e un extras tot în limba germană după «Anfangs-Gründe» şi a apărut la Halle în 1713, sau mai curând, sub titlul *„Auszug aus den Anfangs-Gründen aller mathematischen Wissenschaften;* el era destinat începătorilor (Anfänger), pentru ca aceştia să poată parcurge întreg materialul cerut de program în timpul prescris, destul de scurt. A 10-a ediţie a acestui manual a apărut la Halle în 1772; un exemplar al acestei ediţii se află şi la Biblioteca Universităţii din Cluj.

Compendiul lui WOLFF a fost tradus în limba latină de S. PATAKY, profesor la liceul reformat din Cluj, şi a apărut în Cluj la 1773 ca «editio prima in Transilvania». El se folosea ca manual didactic în liceele reformate din Ardeal în urma hotărîrii Comisiunii de învăţământ a bisericii reformate numită *„litteraria Comissio"*, întrunită în Târgul-Mureş, la 1769.

Mi se pare interesant a face cunoscută ediţia clujană a Compendiului lui WOLFF, căci ea a servit ca manual, nu numai numeroşilor tineri români ardeleni cari îşi făceau studiile la liceele reformate din această provincie, ci, prin traducerea lui G. LAZĂR, a inspirat dragostea de ştiinţele matematice şi la numeroşii elevi dela Sf. Sava ai marelui dascăl.

Ţin să mai amintesc că LAZĂR a tradus Aritmetica şi Geometria din Compendiul lui WOLFF după mai bine de 100 de ani dela apariţia întâei ediţii, ceea ce încă poate servi ca o dovadă de răspândirea acestui manual în Europa.

* * *

Cartea poartă titlul:

«COMPENDIUM || ELEMENTORUM || MATHESEOS UNIVERSAE || IN USUM || STUDIOSAE JUVENTUTIS || ADORNATUM» || A || CHRISTIANO || L. BARONE DE || WOLFF. || POTENTISSIMI BORUSSORUM REGIS CONSILI- || ARIO INTIMO, FRIDERICIANAE CANCELLA- || RIO ET SENIORE, JURIS NATURAE ET GEN- || TIUM,

ATQUE MATHESEOS PROFESSORE || OR- || DINARIO, PROFESSORE PETROPOLITANO HO- || NORARIO, ACADEMIAE REGIAE SCIEN- TIA- || RUM PARISINAE, LONDINENSIS AC BORUS- || SICAE MEMBRO || EDITIO PRIMA || In Transilvania. || CLAUDIOPOLI || Typis COLL. REFF. MDCCLXXIII.

In faţa paginei cu acest titlu se află portretul autorului.

Formatul cărţii e în 8^0 şi conţine 6 pagini nenumerotate, XVIII pagini numerotate cu cifre romane, 680 pagini numerotate cu cifre arabe şi 44 tabele.

Pe contrapagina titlului se află aprobarea de tipărire: «Reimprimatur. || Cibinii 29 Maji, 1772. || B. JOS. ANT. BAJTAI. || m. p.»

A treia pagină nenumerotată conţine o dedicaţie adresată baronului SIMEON KEMÉNY de M. GYERÖ-MONOSTOR, inspector curator al liceului reformat din Cluj.

Pe paginele următoare nenumerotate aflăm o scrisoare omagială adresată numitului baron, de traducătorul cărţii, profesorul SAMUIL PATAKI, purtând data: «Claud. 1773. Die 12 Martii». In scrisoare PATAKY mulţumeşte mecenatelui baron KEMENY a cărui largă liberalitate a făcut posibil ca «presenta carte, după ce a servit în deajuns naţiunilor străine, să poată fi tipărită şi în aceste regiuni şi făcută accesibilă pretutindenea».

Paginele I — X cuprind prefaţa lui WOLFF la ediţia germană şi poartă data: «Halae die 21 Jul. An. MDCCXIII». Autorul insistă asupra folosului matematicei susţinând cu MELANCHTON, că «nimeni, cine n'a învăţat cu diligenţă matematica, nu poate expune nimic în mod ordonat». Apoi «matematica studiată în mod metodic ... duce pe încetul la obişnuinţa de a traduce în practică şi fără greşeală regulile logicei. Din aceste motive studiul matematicei trebue să preceadă celui al logicei, dacă voim să păstrăm ordinea şi să evităm pierderea de timp. Mie însă nu mi se pare recomandabil a aştepta zadarnic acest folos al studiului matematicei, dacă nu observăm foarte precis metoda vechilor geometri; căci nu adevărurile matematice în sine, ci tratate în chip raţional ascut intelectul şi conduc dela noţiuni întunecate la claritate. De aceea studiul matematicei nu va aduce niciun folos dacă se urmează metoda obişnuită, care se adresează mai mult memoriei decât intelectului. Acesta este motivul pentru care am publicat «Anfangs-Gründe», unde întrucât am putut am urmat metoda vechilor geometri» ... Vedem de aici că matematicele

erau considerate de WOLFF ca o ştiinţă auxiliară a filosofiei, sau, — ca să folosim o expresie curentă în secolul al XVIII-lea, — matematica era servitoarea filosofiei (mathesis ancilla philosophiae). Meritul acestui autor este de a fi introdus în învăţământ metodele de demonstraţie riguroasă a teoremelor matematice, ca elevul să-şi dea seama pentru ce se face cutare operaţiune, nu numai cum se face, deci nu numai să cunoască metoda ci să o şi înţeleagă.

In paginele XI — XVIII, WOLFF ne dă un scurt comentar despre metoda matematică, sub care înţelege «ordinea de care se folosesc matematicienii în tratarea dogmelor (dogmatibus) acesteia», începe cu definiţii, trece la axiome, acestora li se suprapun teoremele şi problemele, cărora li se anexează corolariile şi scoliile.

Voiu rezuma în cele ce urmează conţinutul singuraticelor capitole pentru a avea o idee de câte lucruri cuprindea denumirea largă de *„Elementa matheseos universae"*.

(Va urma). VICTOR MARIAN.

CÂTEVA SIMPLE OBSERVAŢIUNI ÎN LEGĂTURĂ CU TEOREMA LUI VAN VLECK

Citind interesantul articol al D-lui P. SERGESCU: *„Asupra rădăcinilor ecuaţiilor în care coeficientul lui x^p are cel mai mare modul"*, am găsit de cuviinţă să aduc acum câteva simple observaţiuni şi aplicaţiuni în legătură cu teorema lui VAN VLECK, a căror însemnătate constă mai ales în partea lor instructivă ce se îndreaptă către corespondenţii aparţinând claselor ştiinţifice.

Teorema lui VAN VLECK, enunţând în «G-M» XLI, No. 1, pag. 39, a fost transformată de D-l P. SERGESCU în felul următor:

Dacă în ecuaţia:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \ldots + a_n x^n = 0$$

avem

$$| a_p | \geqslant | a_0 | , | a_1 | , \ldots | a_{p-1} | , | a_{p+1} | \ldots | a_n |$$

atunci p rădăcini ale acestei ecuaţiuni sunt mai mici în modul decât rădăcina pozitivă a ecuaţiei:

$$\rho^n - C^1_{n-p+1} \rho^{n-1} - C^2_{n-p+2} \rho^{n-2} - \ldots - C^p_n = 0.$$

In cele ce urmează vom arăta câteva cazuri în cari şi derivata $f'(x) = 0$ a ecuaţiei $f(x) = 0$ intră în considerare.

1°. Să presupunem, că alegem coeficienţii lui $f(x) = 0$ astfel ca să avem şi:

$$p \mid a_p \mid \geqslant (p+1) \mid a_{p+1} \mid , (p+2) \mid a_{p+2} \mid , \ldots n \mid a_n \mid \quad (1)$$

In acest caz în derivata $f'(x) = 0$, coeficientul de cel mai mare modul este: $p \mid a_p \mid$, de rang $(p-1)$. Conform teoremii lui VAN VLECK, ecuaţia derivată, $f'(x) = 0$, va avea $(p-1)$ rădăcini în modul inferioare unei limite fixe. Această limită este rădăcina pozitivă a ecuaţiei:

$$\rho^{n-1} - C^1_{n-p+1}\rho^{n-2} - C^2_{n-p+2}\rho^{n-3} - \ldots - C^{n-1}_{n-1} = 0$$

cu alte cuvinte, pentru cazul de care ne ocupăm:

Ecuaţia în ρ *corespunzătoare derivatei se formează din ecuaţia în* ρ *corespunzătoare funcţiunii, scăzând cu o unitate toate puterile lui* ρ.

Dacă însă nu impunem condiţiunea (1), atunci în ecuaţia $f(x) = 0$, coeficientul de cel mai mare modul va fi în general al unei puteri a lui x superioare lui p, căci printre produsele:

$$(p+1) \mid a_{p+1} \mid , (p+2) \mid a_{p+2} \mid , \ldots n \mid a_n \mid$$

se va găsi unul care să fie cel mai mare. Fie $(p+q \mid a_{p+q} \mid$ acest coeficient. El aparţine puterii x^{p+q-1}, iar derivata are evident gradul $(n-1)$. Deci, în general:

Gradul ecuaţiei în ρ *relativă la derivată creşte în raport cu cel al ecuaţiei în* ρ *relativă la* $f(x) = 0$, *adică derivata* $f'(x) = 0$ *va avea un mai mare număr de rădăcini inferioare în modul unei limite fixe.*

2°. Să presupunem că în ecuaţia $f(x) = 0$ avem:

$$\mid a_n \mid \geqslant \mid a_0 \mid , \mid a_1 \mid , \mid a_2 \mid \ldots \mid a_{n-1} \mid .$$

In acest caz:

Toate rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$ *sunt inferioare în modul rădăcinii pozitive a ecuaţiei:*

$$\rho^n - \rho^{n-1} - \rho^{n-2} - \ldots - \rho - 1 = 0. \quad (2)$$

Tuturor ecuațiilor

$$f'(x) = 0\,,\, f''(x) = 0\,,\, f'''(x) = 0, f^{IV}(x) = 0 \ldots$$

li se poate aplica teorema lui VAN VLECK. *Ecuațiile în* ρ *ale derivatelor sunt:*

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 0 \qquad \rho^{n-1} - \rho^{n-2} - \rho_{n-3} - \ldots - \rho - 1 = 0\\
&f''(x) = 0 \qquad \rho^{n-2} - \rho^{n-3} - \ldots - \rho - 1 = 0\\
&f'''(x) = 0 \qquad \rho^{n-3} - \ldots - \rho - 1 = 0\\
&\vdots\\
&f^{n-1}(x) = 0 \qquad \rho - 1 = 0.
\end{aligned}$$

O formă particulară a ecuației $f(x) = 0$ în care coeficientul lui x^n are cel mai mare modul este ecuația:

$$1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + nx^n = 0.$$

Să studiem ecuațiunea (2). Avem :

$$F(\rho) = \rho^n - \rho^{n-1} - \ldots - \rho - 1 = \rho^n - \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} = 0.$$

Rădăcina pozitivă a lui $F(\rho) = 0$ este cuprinsă între 1 și 2 căci:

$$F(1) = -(n-1) < 0 \quad ; \quad F(2) = 1 > 0.$$

Intervalul găsit este valabil pentru orice valoare întreagă și pozitivă a lui n. Pentru o valoare dată a lui n, vom restrânge acest interval prin formula de aproximație:

$$b - \frac{F(b)}{F'(b)}\,.$$

Calculând, găsim:

$$F'(b) = F'(2) = 2^n - 1$$

adică rădăcina pozitivă a lui $F(\rho) = 0$ tinde către limita:

$$2 - \frac{1}{2^n - 1}$$

limită care crește în același timp cu n. Acest rezultat ne permite să enunțăm următoarea propoziție:

Toate rădăcinile derivatei $f'(x) = 0$ *a unei ecuaţiuni* $f(x) = 0$, *în care coeficientul lui* x^n *este de cel mai mare modul sunt în modul inferioare unei limite mai mici decât limita către care tind tot în modul rădăcinile lui* $f(x) = 0$.

Consecinţa imediată a acestei propoziţiuni este:

Dacă x^n *are în ecuaţia* $f(x) = 0$ *coeficientul de cel mai mare modul, atunci toate rădăcinile lui* $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, $f'''(x) = 0 \ldots$, *rămân în modul inferioare rădăcinii pozitive a ecuaţiunii în* ρ *relativă la* $f(x) = 0$.

3⁰. Se cunoaşte teorema următoare [1]):

Dacă într'o ecuaţie algebrică de gradul n, coeficientul lui x^p *are un modul superior sumei modulelor celorlalţi coeficienţi, ecuaţia admite p rădăcini de modul mai mic ca* 1 *şi* $n - p$ *rădăcini de modul mai mare ca* 1.

Observăm că orice ecuaţie algebrică răspunzând condiţiilor enunţului acestei teoreme răspunde în acelaş timp şi teoremei lui VAN VLECK. Intr'adevăr, dacă coeficientul lui x^p este mai mare în modul ca suma celorlalţi coeficienţi în modul, atunci el este evident mai mare ca fiecare în parte. Să aplicăm teorema lui VAN VLECK, întrebuinţând ecuaţia în ρ în forma dată de D-l P. SERGESCU. Enunţul teoremei de mai sus devine:

Dacă într'o ecuaţie algebrică de gradul n, coeficientul lui x^p *are un modul superior sumei modulelor celorlalţi coeficienţi, ecuaţia admite p rădăcini inferioare în modul rădăcinii pozitive a ecuaţiei:*

$$\rho^p - C^1_{n-p+1} \mid \beta_{p-1} \mid \rho^{p-1} - C^2_{n-p+2} \mid \beta_{p-2} \mid \rho^{p-2} - \ldots - \mid \beta_0 \mid C^p_n = 0$$

şi $(n - p)$ *rădăcini de modul mai mare ca 1.*

Ecuaţia în ρ de mai sus va da o limită mai scăzută, rădăcina sa pozitivă este mai mică decât rădăcina pozitivă a ecuaţiei în ρ de forma D-lui P. SERGESCU. Avem într'adevăr:

$$C^1_{n-p+1} \mid \beta_{p-1} \mid < C^1_{n-p+1}, \; C^2_{n-p+2} \mid \beta_{p-2} \mid < C_{n-p+2}, \ldots$$

căci:

$$\beta_{p-1} < 1, \; \beta_{p-2} < 1, \ldots \beta_0 < 1.$$

---

1) Vezi „Exercices d'Algèbre" p. AUBERT et PAPELIER, II, pag. 349.

4°. **Observaţiuni.**

a) Referindu-ne la coeficienţii ecuaţiei în ρ, de forma D-lui P. SERGESCU, forma lor generală se poate scrie:

$$C^k_{n-p+k} = C^k_m$$

unde k ia pe rând valorile dela 1 la p. Să scriem ultimii coeficienţi:

$$C^p_{m+p} \ , \ C^{p-1}_{m+p-1} \ , \ C^{p-2}_{m+p-2} \ , \ \ldots$$

Este uşor de văzut şi de arătat că aceşti coeficienţi descresc în ordinea de mai sus. Cel mai mare coeficient al ecuaţiei $F(\rho) = 0$ este:

$$C^p_{m+p} = C^p_n \ .$$

Fiind liber de necunoscută, rezultă că:

Ecuaţiei în ρ (*de forma* D-lui P. SERGESCU) *nu i se poate aplica teorema lui* V. VLECK.

b) Am mai remarcat sub (3) că ecuaţia în ρ, de forma D-lui P. SERGESCU nu depinde de coeficienţii ecuaţiei $f(x) = 0$. Acest lucru are şi un mare avantagiu. Intr'adevăr lăsând pe a_p , coeficientul de cel mai mare model la rangul lui, putem schimba între ei pe ceilalţi coeficienţi ai lui $f(x) = 0$, căpătând deci *clase de ecuaţiuni* având toate acelaş număr de rădăcini inferioare în modul aceleiaşi limite.

c) Ecuaţiei $f(x) = 0$ considerată de V. VLECK, i se pot aplica direct ambele ecuaţiuni în ρ, căci printre coeficienţii ei va fi unul de cel mai mare modul. O informaţiune în plus asupra naturii rădăcinilor acelei ecuaţiuni.

d) Ecuaţia în ρ de o formă sau alta se va aplica de atâtea ori ecuaţiei de formă respectivă câţi coeficienţi egali cu 1 va avea sau câţi coeficienţi egali, de modul cel mai mare, va avea. In asemenea cazuri, destul de des vom putea afirma ceva în plus de ceeace ne dă teorema lui VAN VLECK, asupra unei părţi din numărul tota al rădăcinilor ecuaţiei. *Ecuaţiunile reciproce* intră în această categorie.

5°. **Aplicaţiuni.**

Asupra teoremei lui VAN VLECK vom face câteva aplicaţiuni:

a) *Să se studieze ecuaţia de gradul IV utilizând ecuaţia în* ρ *în forma dată de* D-l P. SERGESCU.

Rezultatul studiului se arată în tabelul de mai jos, valabil pentru $n = 4$ şi unde r_p înseamnă rădăcina pozitivă a ecuaţiei în ρ:

$$\rho^p - C^1_{n-p+1}\rho^{p-1} - \ldots - C^p_n = 0$$

şi $n - p$ rădăcini de modul mai mare ca 1.

Fie r_p rădăcina pozitivă a ecuaţiei în ρ. Observăm că:

$$r_p > C^1_{n-p+1}$$

şi atunci putem scrie:

$$r_p = (n - p + 1) + A^2.$$

Dar avem:

$$n - p + 1 + A^2 > 1 \qquad \therefore \quad n + A^2 > p$$

şi deci deducem:

$$r_p \geqslant 2.$$

Ştim însă conform teoremii enunţate că ecuaţia admite p rădăcini în modul inferioare lui 1. Limita ce ne-o dă r_p este deci mult prea mare. Vom utiliza atunci ecuaţia în ρ în forma în care depinde şi de coeficienţii ecuaţiei $f(x) = 0$. Ecuaţia generală considerată de VAN VLECK este:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + x^p + \ldots + \alpha_n x^n = 0.$$

Să împărţim cu:

$$\sigma = |\alpha_0| + |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + 1 + \ldots |\alpha_n|$$

pe fiecare coeficient al ecuaţiei de mai sus, exceptând coeficientul lui x^p. Punând:

$$\frac{|\alpha_0|}{\sigma} = |\beta_0|, \frac{|\alpha_1|}{\sigma} = |\beta_1|, \ldots \frac{|\alpha_{p-1}|}{\sigma} = |\beta_{p-1}|,$$

$$\frac{|\alpha_{p+1}|}{\sigma} = |\beta_{p+1}| \ldots \frac{|\alpha_n|}{\sigma} = |\beta_n|$$

ecuaţia devine:

$$\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + x_p + \ldots + \beta^n x^n = 0$$

Această din urmă ecuaţie rămâne de tipul VAN VLECK, iar pe de altă parte intră şi în categoria teoremei reamintite la începutul acestui aliniat. Putem enunţa două propoziţiuni după cum legăm sau nu între ele ambele teoreme:

a) *Dacă împărţim, exceptând coeficientul lui* x^p, *pe fiecare coeficient al ecuaţiei:*

$$a_1 + a_1 x + a_2 x + \ldots - + x^p + \ldots + a_n x^n = 0$$

prin suma modulelor tuturor coeficienţilor ecuaţiei, atunci ecuaţia ce se obţine are p rădăcini de modul mai mic ca 1 şi $n - p$ *rădăcini de modul mai mare ca 1.*

b) *Dacă împărţim, exceptând coeficientul lui* x^p, *pe fiecare coeficient al ecuaţiei:*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + x^p + \ldots + a_n x^n = 0$$

cu suma modulelor tuturor coeficienţilor ecuaţiunii, atunci ecuaţia

p	Ecuaţia în ρ	r_p	No. răd. inf. lui r_p
1	$\rho - 4 = 0$	4	una
2	$\rho^2 - 3\rho - 6 = 0$	4,49	două
3	$\rho^3 - 2\rho^2 - 3\rho - 4 = 0$	$3 < r_p < 3.5$	trei
4	$\rho^4 - \rho^3 - \rho^2 - \rho - 1 = 0$	$1.94 < r_p < 2$	patru

b) *Ce grad are ecuaţiunea cu două rădăcini inferioare în modul unei limite date?*

Căutăm valoarea lui n. Scriem ecuaţia în ρ pentru $n = n$ (necunoscut) şi pentru $p = 2$. Avem:

$$\rho^2 - (n-1)\rho - \frac{n(n-1)}{2} = 0.$$

Limita este dată de rădăcina pozitivă a acestei ecuaţiuni. Dacă însemnăm cu λ limita dată, gradul ecuaţiei va fi dat de ecuaţiunea de mai sus în care facem $\rho = \lambda$. Obţinem:

$$2n = 1 + \sqrt{(2\lambda+1)^2 + 2(2\lambda)^2} - 2\lambda.$$

Pentru $\lambda = 5$ găsim $n = 4,5$, luăm $n = 5$. Ecuaţiunea de gradul 5 va avea *două* rădăcini inferioare în modul lui 5 dacă modulul cel mai mare este coeficientul lui x^2.

Lt. Comandor Gh. Niculescu.

PROGRAMA ANALITICĂ

HOTĂRÎTĂ PENTRU CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE" DIN ANUL 1937

Clasa IV-a. Toată materia prevăzută de programa analitică.

Clasa V-a. Grupa I. **Algebra.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus :

1. La împărţirea cu $(x + a)$ se va face rezolvarea ecuaţiilor cu rădăcini întregi şi fracţionare.

2. La radicale se va face raţionalizarea numitorilor cari conţin radicale patrate şi de indici superiori.

3. La sistemele de ecuaţii de gradul I se vor cere metode particulare de rezolvare şi sisteme reductibile la gradul I.

4. La discuţia semnului trinomului se va face generalizare în legătură cu punctul 1.

5. Transformarea expresiunilor de forma : $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

6. Progresiuni aritmetice şi geometrice.

Grupa II-a. **Geometria plană.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus :

1. Fascicole de drepte paralele şi de drepte concurente (teoreme directe şi reciproce).

2. Omotetia (La cercuri : centre de asemănare directe şi inverse).

3. Teorema lui MENELAUS şi CEVA şi reciprocele lor.

4. Teoremele lui PTOLOMEU pentru patrulaterele inscriptibile. Teorema lui MIQUEL. Patrulater circumscris unui cerc. Cercuri ortogonale. Cercul celor nouă puncte.

5. Puterea unui punct faţă de un cerc. Ax şi centru radical.

6. Raportul ariilor a două poligoane asemenea.

7. Reciproca teoremei lui PITAGORA. Relaţia metrică a lui STEWART. Aplicaţie la mediane, etc.

8. Poligoane regulate circumscrise.

Clasa VI-a. Grupa I. **Geometria în spaţiu.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus :

1. Unghiuri diedre. Măsura lor. Unghiuri triedre şi poliedre, proprietăţile lor.

2. Aria şi volumul trunchiului de piramidă. Extindere la con.

3. Volumul produs de un sector poligonal plan care se roteşte în jurul unei axe. Volumul zonei, calotei, sferei.

Grupa II-a. **Trigonometria.** Toată materia prevăzută în programa analitică până la «Aplicaţiile trigonometriei la agrimensură şi statică». In plus:

1. Aria unui triunghiu în raport cu elemente date.

2. Raza cercului circumscris în funcţiune de laturile triunghiului Razele cercurilor înscrise şi exînscrise triunghiului. Relaţiuni.

3. Identităţi trigonometrice.

4. Cazuri particulare de rezolvare la triunghiuri dreptunghice şi oarecare.

5. Determinarea distanţelor între puncte inaccesibile.

6. Problema hărţii.

Clasa VII-a. Grupa I. **Algebra.** Toată materia prevăzută de programa analitică, fără «Aplicaţii la cinematică».

Grupa II-a. **Geometria descriptivă.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Diviziuni armonice, fascicole armonice. Pol şi polară în raport cu un unghiu şi în raport cu un cerc.

Teoremele lui PASCAL şi BRIANCHON. Patrulatere complete.

2. Transformări: inversiune, polare reciproce.

Clasa VIII-a. Grupa I. **Algebra.** Materia prevăzută de programa analitică.

Grupa II-a. **Geometria analitică.** Materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Schimbarea de axe.

2. Pol şi polară.

3. Clasificarea conicelor.

Grupa III-a. **Mecanica.** Materia prevăzută de programa analitică. In plus Cinematica.

* * *

Orice candidat trebue să cunoască materia respectivă a clase. precedente cu adăogirile prevăzute în prezenta programă.

RAPORT ASUPRA PREMIULUI „V. CONTA"

PENTRU ANUL 1936

In termenul prevăzut de Regulamentul premiului V. CONTA s'a prezintat o singură lucrare.

Aceasta neîndeplinind condiţiile pentru a fi premiată, Comisia propune ca suma corespunzătoare să se adaoge la premiul anului viitor.

COMISIA PENTRU PREMIU:

O. ONICESCU, GH. ZAPAN, GH. ILIESCU.

Acest raport s'a citit şi aprobat în Adunarea Generală din 25 August 1936.

NOTE MATEMATICE

10. *Asupra problemei 4537*[1]). Dintre toţi multiplii lui 11 scrişi cu 9 cifre semnificative diferite, singurul patrat perfect este

$$382945761 = 19569^2 .$$

V. THÉBAULT.

11. *Asupra Notei Nr. 30.* A doua neegalitate trebue scrisă astfel:

$$2a + b \geqslant \sqrt{b^2 - 4ac} \geqslant b$$

ceea ce ne dă condiţiunile:

$$ac \leqslant 0 \quad \text{şi} \quad a(a + b + c) \geqslant 0$$

adică tocmai condiţia:

$$f(0) \cdot f(1) \leqslant 0$$

dată de D-l CIORĂNESCU, autorul problemei No. 4266, unde:

$$f(x) \equiv ax^2 + bx + c = 0.$$

D-l G. G. CONSTANTINESCU ne trimite o rectificare a notei Nr. 30, însă pleacă dela o condiţie exact inversă.

I. L.

1) Pag. 397, Vol. XLI, *Gazeta Matematică* şi pag. 208, Vol. XLIX, *Mathesis.*

12. *Asupra Notei 41, Vol. XLI*[1]). Suma

$$(1)\quad S=(m+\alpha)(m+\alpha)+(m+2\alpha)[(m+\alpha)+(m+2\alpha)]+$$
$$\ldots+(m+n\alpha)[(m+\alpha)+(m+2\alpha)+\ldots+(m+n\alpha)]$$

care constitue generalizarea D-lui O. S. IANCULESCU pentru problema 4624 se poate reduce la

$$(2)\quad S=a_1^2+a_2(a_1+a_2)+\ldots+a_n(a_1+a_2+\ldots+a_n)$$

pe care am calculat-o cu ocazia soluției și generalizării publicată la pag. 449, Vol. XLI[2]).

In adevăr înlocuind pe α prin m și notând

$$m+ir=a_i \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

suma (1) este identică cu (2) unde $a_1, a_2, \ldots a_n$ sunt în progresie aritmetică cu rația r.

E. VIȘA
(Prof. secundar).

13. *Asupra pseudo-rombului.* Fie ABCD un pseudo-romb în care AC axă de simetrie. Vom da câteva proprietăți:

1. *Suma segmentelor, duse dintr'un punct mobil al diagonalei ce nu e axă, echiunghiular la laturile pseudo-rombului, este constantă.*

Dintr'un punct P al diagonalei BD, vom duce dreptele PS_1, PS_2, PS_3, PS_4 așa fel ca să facă cu laturile AB, BC, CD, DA ale pseudo-rombului, unghiuri egale. Vom duce apoi prin B o paralelă la AD, care va întâlni axa AC în E. Vom prelungi pe PS_4 până va tăia pe BE în S'_1. Se vede că:

$$\sphericalangle BS_1P=\sphericalangle DS_4P=\sphericalangle PS'_1B.$$

Deci:

$$PS_1=PS'_1.$$

$$\therefore\quad PS_1+PS_4=PS'_1+PS_4=\text{const.}$$

---

1) Pag. 527, Vol XLI.

2) Unde trebue făcute rectificările următoare:
Primul termen al lui S este a_1^2 în loc de a_1.
Ultimul factor la numărătorul lui u_i este i în loc de r.

La fel se arată că:

$$PS_2 + PS_3 = \text{const.}$$

$$\therefore\ PS_1 + PS_2 + PS_3 + PS_4 = \text{const.}$$

2. *Când* P *se găseşte pe prelungirea lui* BD, *de exemplu de partea lui* B, *avem:*

$$PS_3 + PS_4 - (PS_1 + PS_2) = \text{const.}$$

Vom duce o paralelă BE la AD şi vom însemna cu S'_1 punctul unde BE taie pe PS_4. Se vede că: $PS_1 = PS'_1$.

Deci:

$$PS_4 - PS^1 = PS_4 - PS'_1 = \text{const.}$$

La fel se arată că:

$$PS_3 - PS_2 = \text{const.}$$

$$\therefore\ PS_4 + PS_3 - (PS_1 + PS_2) = \text{const.}$$

3. *Perimetrele patrulaterelor* AS_1PS_4 *şi* PS_2CS_3 *sunt constante când* P *descrie diagonala* BD.

Se vede că:

$$BS_1 = BS'_1\ ;\ DS_4 = ES'_1.$$

Deci:

$$BS_1 + DS_4 = BS'_1 + ES'_1 = BE = \text{const.}$$

$$\therefore\ AS_1 + AS_4 + PS_1 + PS_4 = (AB - BS_1) + (AD - DS_4)$$

$$+ PS_1 + PS_4 = AB + AD - (BS_1 + DS_4) + PS_1 + PS_4 = \text{const.}$$

La fel se arată că perimetrul $PS_2\,CS_3$ este constant.

4. *Printr'un punct* M *al diagonalei ce nu e axă de simetrie, se ridică o perpendiculară pe acea diagonală, care taie laturile pseudo-rombului în* N_1, N_2, N_3, N_4. *Când* M *se mişcă pe diagonală avem:*

$$MN_1 + MN_2 + MN_3 + MN_4 = 2AC.$$

Se vede că:

$$MN_1 + MN_4 = 2MR = 2AI.$$

La fel:

$$MN_2 + MN_3 = 2MS = 2IC.$$

$$\therefore\ MN_1 + MN_2 + MN_3 + MN_4 = 2AC.$$

In general toate proprietățile relative la triunghiurile isoscele își găsesc câte o proprietate corespunzătoare la pseudo-romb, având în vedere că la pseudo-romb, triunghiurile ABD și CBD sunt isoscele.

N. N. ALDEA.

14. *Despre o inegalitate a lui* WOLSTENHOLME.

1. S. CERVERA într'un articol intitulat „*Généralisation d'une question de* WOLSTENHOLME" publicat în Nouvelles Annales de Math. s. 4 t. VIII (1908) p. 216 demonstrează că avem inegalitatea :

$$(1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_m) \geqslant (m - 1)^m \, x_1 x_2 \ldots x_m$$

unde

$$x_i \geqslant 0, \; x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1.$$

Egalitatea nu e posibilă decât pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_m$.

Ne propunem a da o demonstrație făcând considerațiuni de un ordin mai general, putând fi de folos și în alte chestiuni.

Să presupunem, ceva mai general, că $x_i \geqslant 0$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \rho \leqslant 1$, ρ fiind un număr pozitiv dat. Să căutăm minimul funcției

$$E = E(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{(1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_m)}{x_1 x_2 \ldots x_m}.$$

Domeniul de existență al acestei funcții este $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \rho$, $x_i > 0, i = 1, 2, \ldots, m$, în interiorul căruia funcția este continuă. Frontiera domeniului se obține când una sau mai multe variabile x_i devin nule. După o teoremă a lui WEIERSTRASS funcția atinge minimul ei în interiorul sau pe frontiera domeniului. Zic că *dacă ne apropiem de frontieră funcția devine infinită.* Dacă $\rho < 1$ acest lucru este clar căci $1 - x_i$ rămâne $\geqslant 1 - \rho \ldots$ Dacă $\rho = 1$ este o mică îndoială pentru cazul când una din variabile ar tinde la 1. Să presupunem că $x_1 = 1 - \varepsilon$, ε fiind un infinit mic pozitiv. Avem

$$(1 - x_2)(1 - x_3)\ldots(1 - x_m) \geqslant (1 - \varepsilon)^{m-1}$$

$$x_2 x_3 \ldots x_m < \varepsilon^{m-1}$$

căci $x_2, x_3, \ldots, x_m$ sunt cel mult egale cu ε. Deci

$$E > \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon)^{m-1}}{(1 - \varepsilon)\varepsilon^{m-1}} = \frac{(1 - \varepsilon)^{m-2}}{\varepsilon^{m-2}}.$$

Membrul al doilea este infinit de mare pentru ε infinit de mic ceea ce demonstrează afirmaţia noastră. Minimul lui E nu poate fi atins decât în interiorul domeniului. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ un sistem de valori pentru care minimul este atins

$$\text{min. } E = E(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$$

Zic că *trebue să avem* $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_m$. Să presupunem contrariul şi fie $\xi_1 < \xi_2$. Să punem $\xi'_1 = \xi_1 + \eta$, $\xi'_2 = \xi_2 - \eta$, $\xi'_i = \xi_i$, $i = 3, 4, \ldots, m$ unde $\eta \leqslant \frac{\xi_2 - \xi_1}{2}$.

Avem acum relaţiile

$$\frac{(1-\xi'_1)(1-\xi'_2)}{\xi'_1 \xi'_2} = \frac{1-(\xi_1+\xi_2)}{\xi'_1 \xi'_2} + 1 = \frac{1-(\xi_1+\xi_2)}{\xi_1 \xi_2 + \eta(\xi_2 - \xi_1) - \eta^2}$$

$$+1 < \frac{1-(\xi_1+\xi_2)}{\xi_1 \xi_2} + 1 = \frac{(1-\xi_1)(1-\xi_2)}{\xi_1 \xi_2}$$

prin urmare

$$E(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_m) < E(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$$

care este în contrazicere cu faptul că sistemul $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ dă valoarea minimă.

Trebue deci ca $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_m = \frac{\rho}{m}$ şi atunci

$$\text{min. } E = \left(\frac{m-\rho}{\rho}\right)^m$$

Putem dar enunţa proprietatea:

Dacă $x_i \geqslant 0$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \rho \leqslant 1$, *avem*

$$(1)\quad (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_m) \geqslant \left(\frac{m-\rho}{\rho}\right)^m x_1 x_2 \ldots x_m$$

egalitatea nefiind posibilă decât pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = \frac{\rho}{m}$

2. Fie

$$f(x) = x^m - a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + (-1)^m a_m = 0$$

ecuaţia de gradul m care are ca rădăcini pe $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Fie pe urmă

$$g(x) = (-1)^m f(1-x) = x^m - b_1 x^{m-1} + \ldots + (-1)^m b_m = 0$$

transformate în $1-x$ a acestei ecuații.

Inegalitatea demonstrată revine la

$$b_m \geqslant \left(\frac{m-\rho}{\rho}\right)^m a_m$$

pe lângă condiția $x_i \geqslant 0, a_1 = \rho \leqslant 1$.

Să luăm acum derivata de ordinul j a lui $f(x)$. Rădăcinile $x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_{m-j}^{(j)}$ ale acestei derivate verifică condițiile

$$x_1^{(j)} + x_2^{(j)} + \ldots + x_m^{(j)} = \frac{m-j}{m}\rho < 1, \; x_i^{(j)} \geqslant 0, \; i = 1, 2, \ldots, m-j$$

și putem deci scrie inegalitatea (1) care devine

$$(1-x_1^{(j)})(1-x_2^{(j)})\ldots(1-x_{m-j}^{(j)}) \geqslant \left(\frac{m-\rho}{\rho}\right)^{m-j} x_1^{(j)} x_2^{(j)} \ldots x_{m-j}^{(j)} .$$

Dar

$$x_1^{(j)} x_2^{(j)} \ldots x_{m-j}^{(j)} = \frac{a_{m-j}}{\binom{m}{j}} = \frac{1}{\binom{m}{j}} \Sigma\, x_1 x_2 \ldots x_{m-j}$$

unde $\binom{m}{j}$ este coeficientul binomial $\dfrac{m(m-1)\ldots(m-j+1)}{1 \cdot 2 \ldots j}$ și Σ se referă la toate produsele câte $m-j$ ale cantităților $x_1, x_2, \ldots x_m$.

Pe de altă parte se vede că transformata în $1-x$ a derivatei de ordinul j este derivata de ordinul j a transformatei în $1-x$ a ecuației date, deci

$$(1-x_1^{(j)})(1-x_2^{(j)})\ldots(1-x_{m-j}^{(j)}) = \frac{b_{m-j}}{\binom{m}{j}}$$

$$= \frac{1}{\binom{m}{j}} \Sigma\, (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_{m-j}) .$$

Avem așa dar proprietatea:

Dacă $x_i \geqslant 0, x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \rho \leqslant 1$, *avem*

$$\Sigma\, (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_{m-j}) \geqslant \left(\frac{m-\rho}{\rho}\right)^{m-j} \Sigma\, x_1 x_2 \ldots x_{m-j}$$

egalitatea nefiind posibilă decât dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = \dfrac{\rho}{m}$.

Ultima parte a enunţului rezultă din faptul că derivata de ordinul j a unei ecuaţii algebrice cu toate rădăcinile reale nu poate avea toate rădăcinile egale decât dacă şi numai dacă ecuaţia dată are toate rădăcinile egale.

TIBERIU POPOVICIU
Seminarul Matematic-Cluj.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Vol. CXXII. Fasc. I. Iulie 1936. Buenos Aires. Asupra seriilor convergente simple şi multiple de funcţiuni de variabilă complexă duală, de J. C. VIGNAUX.

Idem. Vol. CXXII. Fasc. II. August 1936. Buenos Aires. Sisteme de inecuaţiuni lineare şi aplicaţiunile lor la studiul corpurilor convexe, de FRANCISCO LA MENZA.

Boletin Matematico. Anul IX. Nr. 6. August 1936. Buenos Aires. Contribuţiuni la cunoaşterea triunghiului de speţa III-a, de B. I. BAIDAFF. Asupra numerelor şi variabilelor hiperbolice ipercomplexe, de F. TORANZOS. Generalizarea formulelor trigonometrice referitoare la un triunghiu în domeniul complex, de B. I. BAIDAFF.

Buletinul I. R. E. Anul IV. Nr. 2. Iunie 1936. Bucureşti. După zece ani, de C. D. BUŞILĂ. Desvoltarea industriei născută din descoperirile lui AMPÈRE, de R. DE VALBREUZE.

Buletinul „Societăţii de Matematici" a Liceului „Tasse Dumitrescu" din Mizil. Anul V. 1934 — 1935. Mizil 1936.

Numerus. Vol. II. Caetul 16. Septemvrie 1936. Bucureşti. Géométrie du triangle par T. LALESCO. (Urmare).

Idem. Caetul 17. Octomvrie 1936. Bucureşti. Géométrie du triangle par T. LALESCO.

Pitagora. Anul II. Nr. 1. Octomvrie 1936. Câteva însumări, de LT. C. D. IONESCU-ŢIU. Impărţirea unui polinom printr'un produs de n factori binomiali, de G. G. CONSTANTINESCU.

Journal de Mathématiques Élèmentaires publié par H. VUIBERT. Anul LXI. Nr. 1. 1 Octomvrie 1936. Paris.

Idem. Anul LXI. Nr. 2. 15 Octomvrie 1936. Paris.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVI. Nr. 7. Septemvrie 1936 Câteva proprietăţi corelative relativ la cercurile exînscrise, de N. N. MIHĂILEANU

Idem. Anul XVI. Nr. 8. Octomvrie 1936. Relaţiuni între elementele unui poligon convex, precum şi o identitate LAGRANGE, stabilite vectorial, de V. ALACI. Asupra triunghiurilor isoscele, de V. THÉBAULT.

Sphinx. Revue mensuelle des questions récréatives. Anul VI. Nr. 10. Octomvrie 1936. Bruxelles.

Idem. Anul VI. Nr. 11. Noemvrie 1936. Bruxelles. EUCLID, de CH. LECLERCQ. Asupra unei curbe remarcabile, de M. PETROVICI.

Ştiinţă şi Progres. Revista ştiinţifică a liceelor militare. Anul III. Nr. 5. Octomvrie 1936. Târgul Mureş. O clasă de identităţi, de N. O. ZAHARIA.

MAIOR I. LINTEŞ. Noţiuni elementare despre construcţia Avioanelor. Bucureşti 1936.

AL. TH. POPESCU şi CHRISTIANA POPESCU. Monografia Laboratorului de Electrotechnică pentru Incercări Industriale.

ILIE I. POPA. Elementele lui EUCLID (Extras din „Atheneum" II. Nr. 2). Iaşi 1936.

CERERI

261. Posed o carte de geometrie-trigonometrie veche. La pag. 28 în loc de patrat zice *patrunghiu,* apoi la pag. 34 este cuvântul *Multiunghiurile,* la pag. 52 e *Cercul;* la pag. 128 *Prisma;* la pag. 145 *Cilindrul.* Cartea este împărţită în cinci părţi: *Planimetria* pag. ?; *Trigonometria* pag. ?; *Stereotomia* pag. 125; *Trigonometria sferică* pag. 176; *Geometria analitică* pag. 204.

Aş dori să cunosc autorul, editura şi anul apariţiunii.

POPOVICIU I. GAVRIL.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii

AUG. FÖPPL. Die Mechanik im neunzehnten Jahrhundert. München 1902. Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

A. G. GREENHILL. The mathematical Theory of the Top considered historically. Londra.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2421. *Să se calculeze determinantul:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 13 & 21 \\ 8 & 13 & 21 & 34 & 55 \\ 21 & 34 & 55 & 89 & 144 \\ 55 & 89 & 144 & 233 & 377 \end{vmatrix}.$$

Să se generalizeze.

C. NICOLAU.

Se observă că termenii coloanei *a* 3-a (sau a celor următoare) sunt respectivi, fiecare, egali cu suma a doi termeni precedenți din aceeași linie, astfel că determinantul dat, după o proprietate cunoscută, se descompune într'o sumă de doi determinanți, cu câte două coloane egale, deci nuli.

Determinantul este deci nul.

Generalizare. Se observă că numerele ce intră în fiecare linie a determinantului dat, sunt numere consecutive din șirul lui FIBONACCI, atunci avem următoarea generalizare.

Dacă, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$; $\ldots$; $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$; *sunt* n *grupe oarecare de câte* n *numere consecutive din șirul lui* FIBONACCI $(n \geqslant 3)$:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

atunci determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \ldots b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_1 & l_2 & l_3 \ldots l_n \end{vmatrix} \equiv 0.$$

In adevăr fiindcă din definiția numerelor lui FIBONACCI putem scrie:

$$a_3 = a_1 + a_2, \quad b_3 = b_1 + b_2, \ldots, l_3 = l_1 + l_2,$$

rezultă că determinantul Δ se descompune într'o sumă de câte doi determinanți, fiecare nul, ca având câte două coloane egale. Determinantul Δ este deci nul, ceea ce se învederează şi astfel:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_1 \dots a_n \\ b_1 & b_2 & b_1 \dots b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_1 & l_2 & l_1 \dots l_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_2 \dots a_n \\ b_1 & b_2 & b_2 \dots b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_1 & l_2 & l_2 \dots l_n \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Observare. Ca determinantul Δ să fie nul, nu este necesar ca toate numerele lui să fie numere din şirul lui FIBONACCI, ci numai numerele din trei coloane consecutive. Putem păstra deci în Δ trei coloane consecutive, neschimbate, elementele din celelalte coloane putându-se înlocui cu numere absolut oarecare.

Soluţii date de D-nii: ADAM M., BLEIWEISS PAUL, BOTEA N. NICOLAE, BRÜLL LEON, BUSICHOVICI A., BUŞILĂ A. ADRIAN, CIORĂNESCU I. CONSTANTIN, FOCŞĂNEANU I. MIHAIL, GATAIANŢU V. BARBU, GEORGESCU I. CONSTANTIN, GEORGESCU-ROEGEN, GHEORGHIU TH. GH., GHEORGHIU C. I., HULUBEI TELEMAC, IONESCU I. PAUL, NICOLAU TH. AUREL, PĂTROIANU I. MIHAIL, POPESCU D. GH., POPOVICIU TIBERIU, SIMIONESCU D. GH. şi VASILIU C. ION

V. A.

PROBLEMA 2706. *Să se calculeze valoarea expresiunii:*

$$E = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x^2+x+1)^{n-1}}}.$$

GH. MARINESCU-ORAN.

Să considerăm progresia geometrică:

$$\therefore 1 ; y ; y^2 ; \dots ; y^n .$$

Suma ei este:

$$\sum_{n=1}^{n} y^n = \frac{y^{n+1}-1}{y-1} .$$

Presupunând y variabil şi derivând, avem:

$$\sum_{n=1}^{n} n y^{n-1} = \frac{(n+1)y^n(y-1)-(y^{n+1}-1)}{(y-1)^2} .$$

Pentru $y < 1$ şi n tinzând la ∞, obţinem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n y^{n-1} = \frac{1}{(y-1)^2}.$$

De aci deducem cu uşurinţă:

$$(1) \qquad y \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n y^{n-1}} = \frac{y}{y-1},$$

valabilă pentru $y < 1$.

Dacă în (1) luăm:

$$y = \frac{1}{x^2+x+1} < 1, \text{ pentru } x \geqslant 1,$$

atunci obţinem relaţiunea:

$$\frac{1}{x^2+x+1} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x^2+x+1)^{n-1}}} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Dacă aci facem pe rând $x = 1, 2, \ldots, p$ şi însumăm, găsim:

$$\sum_{x=1}^{p} \frac{1}{x^2+x+1} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x^2+x+1)^{n-1}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} = 1 - \frac{1}{p+1}.$$

Pentru $p = \infty$, obţinem în definitiv:

$$E = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x^2+x+1)^{n-1}}} = 1.$$

Suma expresiunii cerute este deci 1.

Soluţii date de D-nii: ANTONIU S. ION, BÂRSU T. I., CONSTANTINESCU G. G., COŞNIŢĂ VIRGIL, COŞEREANU ION, FLORESCU B. IOAN, GĂTAN M., GEORGESCU I. C., GHEORGHIU TH. GH., GEORGESCU I. EM., KATZ PINCU, KATZ SIMON, MIHĂILESCU ŞT., NICOLAU TH. AUREL, NICOLAU H. C., NICULESCU MIRON, POPESCU D. GH., POPOVICIU TIBERIU, RIZESCU T. ION, TĂNĂSESCU A. I., SARIAN M., ŞTEFĂNESCU EMIL şi VASILIU C. ION.

V. A.

PROBLEMA 4146. *Să se arate că oricari ar fi* a *şi* b *reali, iar* $\alpha > 0$, *ecuaţia:*

$$ax^2 + bx - \alpha\left[\frac{a}{\alpha+2} + \frac{b}{\alpha+1}\right] = 0$$

are rădăcini reale, una din ele fiind totdeauna cuprinsă între zero şi unu.

N. C.

Soluţie dată de D-l N. N. ALDEA, student matematici.

1°. Pentru ca ecuaţia să aibă rădăcinile reale, va trebui ca realizantul ei să fie pozitiv. Realizantul este:

$$R = b^2 + 4a\alpha\left[\frac{a}{\alpha+2} + \frac{b}{\alpha+1}\right]$$

$$= \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\left[b^2(\alpha+1)(\alpha+2) + 4a^2\alpha(\alpha+1) + 4ab\alpha(\alpha+2)\right]$$

$$= \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\left[\alpha^2(b+2a)^2 + 2\alpha b(b+2a) + 2b^2 + \alpha(b+2a)^2\right]$$

$$= \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\left\{[\alpha(b+2a)+b]^2 + \alpha(b+2a)^2 + b^2\right\}.$$

După cum se vede avem $R > 0$ în condiţiile problemei.

2°. Se vede că

$$f(0) = -\frac{\alpha[a(\alpha+1) + b(\alpha+2]}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

$$f\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right) = a\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)^2 + b\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right) - \frac{\alpha[a(\alpha+1) + b(\alpha+2)]}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

$$= \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)\left[\frac{a(\alpha+1) + b(\alpha+2)}{(\alpha+2)}\right] - \frac{\alpha[a(\alpha+1) + b(\alpha+2)]}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

$$= \left[\frac{a(\alpha+1) + b(\alpha+2)}{(\alpha+2)}\right]\left[\frac{\alpha+1}{\alpha+2} - \frac{\alpha}{\alpha+1}\right] = \frac{a(\alpha+1) + b(\alpha+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)^2}.$$

Pentru ca ecuaţia să aibă o rădăcină între 0 şi $\frac{\alpha+1}{\alpha+2}$ trebue ca $f(0)$ şi $f\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)$ să fie de semne contrare. Dar

$$\frac{f(0)}{f\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)} = -\frac{\alpha}{\alpha+2} < 0, \text{ căci } \alpha > 0.$$

Deci ecuaţia dată are o rădăcină cuprinsă între 0 şi $\frac{\alpha+1}{\alpha+2}$ şi cu atât mai mult între 0 şi 1, căci $\frac{\alpha+1}{\alpha+2} < 1$.

Soluţii bune au dat şi D-nii: HARALAMB IONESCU-BISS student matematici; D. D. MAVRODIN elev cl. VII-a şi IANCU SAGER profesor R.-Sărat.

Se vede uşor cum a fost obţinută problema precedentă şi cum se pot obţine probleme analoage. Anume se pleacă dela prima formulă a mediei:

$$\int_0^1 f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_0^1 \varphi(x)\,dx \;;\; 0<\xi<1.$$

Şi se aplică funcţiunilor $\varphi(x) = x^{\alpha-1}$ şi $f(x) = ax^2 + bx$. In mod analog se poate arăta că ecuaţia:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x = \alpha\left[\frac{a_0}{n+\alpha} + \frac{a_1}{n+\alpha-1} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{\alpha+1}\right]$$

are oricare ar fi $\alpha > 0$ o rădăcină între 0 şi 1 căci existenţa unui ξ în formula mediei ne arată aceasta.

N. C.

PROBLEMA 4157. *Să se stabilească identităţile*:

(1) $x^n - C_{n+1}^1(x+a)^n + C_{n+1}^2(x+2a)^n - C_{n+1}^3(x+3a)^n + \ldots \equiv 0$

(2) $1^m C_{n+1}^1(x+a)^{n-m} - 2^m C_{n+1}^2(x+2a)^{n-m} + \ldots \equiv 0$

ce au loc oricari ar fi x *şi* a.

N. C.

Soluţie dată de D-nii: N. N. ALDEA, H. P. IONESCU-BISS şi O. SACTER:

Dacă am o funcţie $f(x)$ atunci diferenţa finită de ordinul m este dată de formula:

$$f_m(x) = f(x) - C_m^1 f(x+h) + \ldots,$$

în care făcând:

$$f(x) = x^m \text{ şi } h = a, \quad m = n+1$$

avem:

$$f_{n+1}(x) = 0$$

sau:

$$\text{(I)} \quad x^n - C_{n+1}^1 (x+a)^n + C_{n+1}^2 (x+2a)^n - C_{n+1}^3 (x+3a)^n + \ldots \equiv 0$$

adică formula (1) din enunţul problemei, căci diferenţa finită de un ordin mai mare ca gradul funcţiei este nulă. Dacă acum derivăm pe (1) de m ori în raport cu a avem pe (2), căci pentru un termen de rangul p avem:

$$T_p = C_{n+1}^p (x+pa)^n$$

sau derivând de m ori am:

$$T_p^{(m)} = n(n-1)\ldots(n-m+1)\, p^m (x+pa)^{n-m}$$

şi avem că: $T_0^{(m)} = 0$ deci acum putem scrie după ce suprimăm factorul comun $n(n-1)\ldots(n-m+1)$ şi schimbăm semnul:

$$\text{(II)} \quad 1^m C_{n+1}^1 (x+a)^{n-m} - 2^m C_{n+1}^2 (x+2a)^{n-m} + \ldots \equiv 0$$

adică tocmai identitatea (2) din enunţ.

Soluţii directe prin desvoltarea identităţii (în care scop a şi fost propusă problema) dela D-nii: MARIUS MARGULIUS Lic. « Sp. Haret », D. D. MAVRODIN Lic. « M. Eminescu ».

N. C.

PROBLEMA 4391. *In ce sisteme de numeraţie numărul* **nnn** *e patrat perfect?*

V. THÉBAULT.

Soluţie. Dacă B este sistemul căutat, atunci

$$N = nnn = n\,(B^2 + B + 1).$$

Pentru ca N să fie patrat perfect, *trebue şi este suficient,* să existe numere întregi B, *n, k, m, p* care să verifice condiţiile:

$$n = k \cdot m^2 \quad ; \quad B^2 + B + 1 = k \cdot p^2 \quad ; \quad n < B^2$$

şi pentru astfel de numere avem:

$$N = (k \cdot m \cdot p)^2.$$

Numărul k trebuind să fie egal cu 3 sau de forma $6M + 1$ [1]), a doua condiţie poate fi înlocuită succesiv prin:

$$B^2 + B + 1 = 3p^2 \;,\; 7p^2 \;,\; 19p^2 \;,\; 21p^2, \ldots$$

şi problema este adusă la factorizarea unor expresiuni de forma:

$$3X^2 + 3X + 1 \quad \text{pentru} \quad B \equiv 1 \pmod 3$$

$$Y^2 + Y + 1$$ [2]).

Iată toate soluţiile pentru $B < 100$ şi $p \neq 1$:

$B =$	$\overline{18}$	$\overline{22}$	$\overline{30}$	$\overline{67}$	$\overline{68}$ [3])
$k =$	7	3	$\overline{19}$	$\overline{93}$	$\overline{13}$
$p =$	7	$\overline{13}$	7	7	$\overline{19}$.

Există deci sisteme de numeraţie în care sunt patrate perfecte de trei cifre identice. Exemple:

$B = \overline{18}$, $N = 777 = 49^2$

$B = \overline{30}$, $N = \overline{19}\,\overline{19}\,\overline{19} = 133^2$

$B = \overline{68}$, $N = \overline{13}\,\overline{13}\,\overline{13} = 247^2$ şi $N = \overline{52}\,\overline{52}\,\overline{52} = 494^2$.

---

1) Această proprietate este stabilită de D-l A. GÉRARDIN.

2) A. GÉRARDIN. *Factorisations quadratiques et primalité,* p. 80.

3) Notaţia $\overline{18}$ înseamnă că numărul este scris în sistemul zecimal.

Notă. Rezolvând ecuaţia:

$$(1) \qquad B^2 + B + 1 = kp^2$$

în raport cu B, se găseşte:

$$(2) \qquad B = \tfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{4kp^2 - 3}).$$

Aceste valori sunt reale dacă se găseşte un număr y astfel ca:

$$(3) \qquad 4kp^2 - 3 = y^2.$$

Primul membru al acestei ecuaţii fiind un număr nepereche, trebue găsit un număr întreg t aşa ca:

$$(4) \qquad y^2 = 8t + 1 = 4B^2 + 4B + 1.$$

D-l A. GÉRARDIN a dedus formele generale ale numerelor k şi B cunoscând pe p. Astfel pentru $p = 7$

$$B = \overline{49}\,z + 18 \text{ sau } \overline{49}z + 30$$

$$k = \overline{49}z^2 + \overline{61}z + \overline{19} \text{ sau } \overline{49}z^2 + \overline{37}z + 7$$

de unde, dacă $z = 10$, se are soluţiunea:

$$B = \overline{520} \text{ şi } k = \overline{5529}.$$

Când $p = 1$, ecuaţiile 3) şi (4) se reduc la:

$$y^2 = 4k - 3 = 8t + 1 = 4B^2 + 4B + 1.$$

Rezultă că:

$$k - 1 = 2t = B^2 + B \quad \text{şi} \quad n = km^2 = (B^2 + B + 1)\,m^2 > B,$$

aşa că nu avem soluţie pentru $p = 1$.

V. THÉBAULT.

PROBLEMA 4414. *Să se studieze natura seriei*

$$S = \Sigma \frac{x^n y^n (y^{n+1} - x^{n+1})}{(x^n + y^n)(x^{n+1} + y^{n+1})(x^{n+2} + y^{n+2})}$$

şi să i se afle suma în caz de convergenţă.

M. GHERMĂNESCU.

Soluţie dată de D-nii: T. STOICESCU (Profesor), I. BUZINCU şi P. COJARU (Elevii lic. militar Iaşi).

Să presupunem $x \neq \pm y$. In acest caz fie $x > y$. Punând $x = ky$, termenul general al seriei se poate scrie

$$u_n = \frac{1}{y^2} \frac{k^n (1 - k^{n+1})}{(1 + k^n)(1 + k^{n+1})(1 + k^{n+2})}.$$

Pentru studiul convergenţii aplicând teorema raportului, vom avea

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{k(1 - k^{n+2})(1 + k^n)}{(1 - k^{n+1})(1 + k^{n+3}} = \frac{1}{k} \frac{\left(\frac{1}{k^n} + 1\right)\left(\frac{1}{k^{n+2}} - 1\right)}{\left(\frac{1}{k^{n+3}} + 1\right)\left(\frac{1}{k^{n+1}} - 1\right)}$$

şi, de oarece $k > 1$,

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{k} < 1,$$

deci seria este convergentă. La aceeaşi concluzie ajungem dacă $x < y$; în acest caz însă

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = k < 1.$$

Pentru însumare, vom descompune termenul general, punând $k^n = z$; vom avea

$$y^2 u_n = \frac{z(1 - kz)}{(1 + z)(1 + kz)(1 + k^2 z)} = \frac{A}{1 + z} + \frac{B}{1 + kz} + \frac{C}{1 + k^2 z}.$$

Găsim

$$(1 - k)^2 y^2 u_n = \frac{-1}{1 + z} + \frac{2}{1 + kz} - \frac{1}{1 + k^2 z}$$

$$= \frac{-1}{1 + k^n} + \frac{2}{1 + k^{n+1}} - \frac{1}{1 + k^{n+2}}.$$

Făcând suma seriei, vom obţine

$$(1 - k)^2 y^2 S = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + k} + \frac{1}{1 + k^2} + \ldots\right)$$

$$-\left(\frac{1}{1 + k^2} + \frac{1}{1 + k^3} + \ldots\right) + 2\left(\frac{1}{1 + k} + \frac{1}{1 + k^2} + \ldots\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + k} = \frac{1 - k}{1 + k}$$

deci

$$S = \frac{1}{2y^2(1-k^2)} = \frac{1}{2(y^2-x^2)} .$$

Dacă $x < y$ găsim

$$S = \frac{1}{2(x_2 - y^2)} .$$

Notă. Mai rămân de examinat cazurile $x = \pm y$, cari în soluţiile primite nu au fost atent cercetate.

Dacă $x = y$, termenii seriei sunt nuli, deci $S(x, x) = 0$. Insă din suma aflată rezultă $S(x, x) = \infty$, ceea ce pare a prezenta o contradicţie. Explicaţia este că funcţiunea $S(x, y)$ definită prin seria de mai sus este discontinuă pentru $x = \pm y$ adică pe bisectoarele axelor, cari sunt astfel linii de discontinuitate ale funcţiunii. Ceva mai mult, aceste bisectoare împart planul în două regiuni în interiorul cărora funcţiunea $S(x, y)$ ia respectiv valori egale şi de semne contrare, date de

$$S_1 = \frac{1}{2(y^2-x^2)} , \quad S_2 = \frac{1}{2(x^2-y^2)} .$$

Se poate uşor constata că seria propusă, în care termenii sunt funcţiuni continue de x şi y (afară de $x = -y$), nu este uniform convergentă în vecinătatea dreptei $x = y$. In adevăr, restul seriei este

$$y^2 R_n = \frac{k^n}{(1-k)(1+k^n)(1+k^{n-1})}$$

şi din cauza factorului $(1 - k)$ dela numitor, acest rest nu poate tinde către zero când k tinde către unitate.

M. G.

PROBLEMA 4460. *Să se stabilească identitatea.*

$$\sum \frac{2\cos^3 A + \cos 3A}{bc} = -\frac{6\cos A \cos B \cos C}{R^2}$$

notaţiunile fiind cele obişnuite într'un triunghiu.

C. IONESCU-BUJOR.

Considerăm identitatea:

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = 4R \sin A \sin B \sin C$$

(Relations entre les éléments d'un triangle, VUIBERT, Ed. V. pag. 20),

obţinută înlocuind $a = 2R \sin A$ etc. şi făcând rezultatul calculabil prin logaritmi.

Înlocuind în membrul II sinusurile în funcţie de laturi,

$$a \cos A + b \cos B + c \cos C = \frac{abc}{2R} \cdot \qquad (1)$$

Fie a', b', c' laturile triunghiului ortic $A'B'C'$, R' raza cercului lui EULER. Să aplicăm relaţia (1) triunghiului $A'B'C'$.

$$a' \cos A' + b' \cos B' + c' \cos C' = \frac{b'a'c'}{2R'} \cdot$$

Dar:

$$a' = a \cos A \ , \ A' = 180 - 2A \ , \ R' = \frac{R}{2} \text{ etc.,}$$

deci:

$$\sum a \cos A \cos 2A = -\frac{2abc \cos A \cos B \cos C}{R^2}$$

sau

$$\sum \frac{\cos A \cos 2A}{bc} = -\frac{2 \cos A \cos B \cos C}{R^2} \qquad (2)$$

$$\sum \frac{\cos^3 A - \cos A \sin^2 A}{bc} = -\frac{2 \cos A \cos B \cos C}{R^2}$$

$$\sum \frac{2 \cos^3 A - \sin A \sin 2A}{bc} = -\frac{4 \cos A \cos B \cos C}{R^2} \qquad (3)$$

care adunată cu (2) ne dă identitatea cerută.

Au rezolvat problema pe alte căi: D-ra BIBY UNTER (Piatra Neamţ) şi D-nii: A. DOBRESCU (R. Sărat), S-LT A. BĂDESCU (Fontainebleau), M. A. NEGREA (Brăila), M. GRUMĂZESCU (Şc. Artilerie Timişoara), O. S. IANCULESCU (Timişoara) I. N. SAGER, M. F. AMĂRĂŞTEANU (Craiova), N. D. ŞTEFĂNESCU, V. L. FLORESCU şi R. V. APOSTOL (Liceul militar N. Filipescu), G. C. NIŢESCU (Cluj), I. I. ŢIŢEICA (Buzău), C. S. COTESCU (Bacău), V. N. BUCUR (Ploeşti), N. I. MILU şi H. FLORESCU (Liceul militar Chişinău). V. F. CEAUŞESCU şi I. CIUCĂ (Liceul militar Tg. Mureş), D. S. MIHALCEA, V. ŞIARA, I. I. BUZINCU, P. P. COJOCARU, I. GR. BOGDAN, V. GR. BOGZA, C. I. C. DIMITRIU, IORDACHE ENACHE, D. LEBĂDĂ, A. KNALT şi V. D. ENĂŞESCU (Liceul militar Iaşi), M. GOLDENBERG (Brăila).

C. I. B.

PROBLEMA 4477. *Să se găsească numărul întreg a cărui rădăcină patrată este numărul zecimal* **a, aaa ...** *în care* **a** *este o cifră.*

G-L GH. BUICLIU.

Dacă N este numărul căutat atunci

$$a,\ a\ldots < \sqrt{N} < a,\ (a+1) \quad \therefore \quad (a,a)^2 < N < [a,\ (a+1)]^2$$

$$\therefore \quad (aa)^2 < 100\,N < [a\,(a+1)]^2 . \qquad (1)$$

Dând lui a în (1) succesiv valorile 1, 2,... 9 şi făcând toate calculele indicate de semne se construeşte următorul tabel:

$a = 1$, $121 < 100\,N < 144$ $\therefore$ $1{,}21 < N < 1{,}44$, Nu găsim valori pentru N

$a = 2$, $484 < 100\,N < 529$ $\therefore$ $4{,}84 < N < 5{,}29$, N poate fi 5

$a = 3$, $1089 < 100\,N < 1156$ $\therefore$ $10{,}89 < N < 11{,}56$, „ „ „ 11

$a = 4$, $1936 < 100\,N < 2025$ $\therefore$ $19{,}36 < N < 20{,}25$, „ „ „ 20

$a = 5$, $3025 < 100\,N < 3136$ $\therefore$ $30{,}25 < N < 31{,}36$, „ „ „ 31

$a = 6$, $4356 < 100\,N < 4489$ $\therefore$ $43{,}56 < N < 44{,}89$, „ „ „ 44

$a = 7$, $5929 < 100\,N < 6084$ $\therefore$ $59{,}29 < N < 60{,}84$, „ „ „ 60

$a = 8$, $7744 < 100\,N < 7921$ $\therefore$ $77{,}44 < N < 79{,}21$, „ „ „ 78, 79

$a = 9$, $9801 < 100\,N < 10000$ $\therefore$ $98{,}01 < N < 100$, „ „ „ 99

Extrag rădăcina patrată a celor 9 numere din ultima coloană; se găseşte că singura soluţie a problemei este 79, căci

$$\sqrt{79} = 8{,}8882\ldots$$

Un harnic corespondent din Craiova a reuşit să găsească soluţia

$$100 = 9{,}99\ldots 9^2$$

« cam paradoxală căci $100 = 10^2$ *»* scrie acel corespondent, care a interpretat enunţul că la partea zecimală sunt un infinit număr de cifre egale cu a, ceea ce nu a fost în intenţia mea.

GH. B.

PROBLEMA 4508. *Se consideră două şiruri de numere pozitive*

$$p_1 , p_2 , \ldots , p_n , \ldots$$

$$q_1 , q_2 , \ldots , q_n , \ldots$$

cuprinse între 0 şi 1, şi se pune

$$r_n = p_n + q_n .$$

Să se arate că dacă avem

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - p_n}{p_1 p_2 \ldots p_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - q_n}{q_1 q_2 \ldots q_n} = 0$$

vom avea şi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2 - p_n - q_n}{r_1 r_2 \ldots r_n} = 0.$$

T. POPOVICIU.

Avem evident

$$0 < \frac{2 - p_n - q_n}{r_1 r_2 \ldots r_n} = \frac{1 - p_n}{p_1 p_2 \ldots p_n} \cdot \frac{p_1 p_2 \ldots p_n}{r_1 r_2 \ldots r_n}$$

$$+ \frac{1 - q_n}{q_1 q_2 \ldots q_n} \cdot \frac{q_1 q_2 \ldots q_n}{r_1 r_2 \ldots r_n} < \frac{1 - p_n}{p_1 p_2 \ldots p_n} + \frac{1 - q_n}{q_1 q_2 \ldots q_n}$$

de unde rezultă imediat proprietatea cerută.

A rezolvat problema D-l SERGIU TARASCIUC, dând o soluţie ireproşabilă, în sensul celei de mai sus.

Observare. Să punem

$$u_n = \frac{1 - p_n}{p_1 p_2 \ldots p_n} , \quad v_n = \frac{1 - q_n}{q_1 q_2 \ldots q_n} , \quad w_n = \frac{2 - r_n}{r_1 r_2 \ldots r_n} .$$

In enunţul problemei se cerea să se arate că din

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} v_n = 0$$

rezultă că

$$\lim_{n \to \infty} w_n = 0.$$

Demonstrația precedentă ne arată că dacă mai general

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \ , \quad \lim_{n\to\infty} v_n = b$$

şi *dacă* w_n *are o limită,* avem neapărat

$$\lim_{n\to\infty} w_n \leqslant a + b.$$

Putem însă stabili un rezultat mai precis. Se poate scrie

$$w_n = \frac{u_n}{\left(1+\frac{q_1}{p_1}\right)\left(1+\frac{q_2}{p_2}\right)\cdots\left(1+\frac{q_n}{p_n}\right)} + \frac{v_n}{\left(1+\frac{p_1}{q_1}\right)\left(1+\frac{p_2}{q_2}\right)\cdots\left(1+\frac{p_n}{q_n}\right)}.$$

Produsele dela numitor pot fi convergente sau divergente (tinzând la ∞). E de observat însă că nu pot fi ambele convergente căci dacă un produs $\Omega(1+a_i)$ este convergent avem neapărat $a_n \to 0$ pentru $n \to \infty$. Rezultă că avem formula generală

$$\overline{\lim}\ w_n \leqslant \max\left(\overline{\lim}\ u_n \ , \ \overline{\lim}\ v_n\right)$$

unde am pus ca de obiceiu $\max(\alpha \ , \beta)$ = cel mai mare dintre numerele α şi β.

Se mai poate observa că dacă un produs de felul celor considerate este convergent el tinde către o limită > 1. Prin urmare dacă numerele u_n , v_n rămân ambele mărginite şi dacă nu tind ambele către zero, putem scrie încă mai precis

$$\overline{\lim}\ w_n < \max\left(\overline{\lim}\ u_n \ , \ \overline{\lim}\ v_n\right).$$

Se poate trata o problemă analoagă pentru cazul când s'ar considera în loc de două şiruri un număr finit oarecare de şiruri. Las pe seama cititorului această generalizare.

S'a mai primit o soluție incompletă.

T. P.

PROBLEMA 4532. *Să se rezolve ecuația*

$$x^6 - 3x^4 + 308x^3 + 397x^2 + 484x + 615 = 0$$

știind că are o rădăcină de forma $a + b\sqrt{-2}$, *unde* a *și* b *sunt numere întregi.*

TIBERIU POPOVICIU.

Soluție dată de D-nii: PANAIT C. MAZILU (Elev inginer), SERGIU TARASCIUC și MARCEL F. AMĂRĂȘTEANU (cl. VIII-a, secția științifică, Craiova):

Ecuația admite și soluția conjugată $a - b\sqrt{-2}$ și membrul întâiu va trebui să fie divizibil cu un trinon de forma

$$x^2 - 2ax + a^2 + 2b^2,$$

unde a, b sunt întregi. Se știe că, câtul va avea coeficienții întregi și se deduce, în particular, că termenul liber 615 trebue să se dividă cu $a^2 + 2b^2$. Cu alte cuvinte 615 trebue să aibă un divizor de forma $a^2 + 2b^2$. Dar $615 = 3.5.41$, va trebui deci să rezolvăm în numere întregi ecuațiile:

$$a + 2b^2 = 3 \quad \text{cu soluțiile} \quad a = \pm 1, \quad b = \pm 1$$
$$a + 2b^2 = 41 \quad \text{»} \quad a = \pm 3, \quad b = \pm 4$$
$$a^2 + 2b^2 = 123 \quad \text{»} \quad a = \pm 5, \quad b = \pm 7$$
$$a = \pm 11, \quad b = \pm 1$$

și $a^2 + 2b^2 = 1, 5, 15, 205, 615$ care sunt fără soluții.

Incercând soluțiile găsite se găsește că numai rădăcinile $1 \pm \sqrt{-2}$, $3 \pm 4\sqrt{-2}$ convin. Membrul întâiu al ecuației se devide deci cu trinoamele $x^2 - 2x + 3$, $x^2 - 6x + 41$. Factorul care a rămas $x^2 + 8x + 5$ dă celelalte două rădăcini ale ecuației. Aceste rădăcini sunt $-4 \pm \sqrt{11}$.

Au mai dat soluții satisfăcătoare și D-nii: MIRCEA-LEONTE A. NEGREA și ION LEUCO.

Observări. I. Mai general fie o ecuație algebrică

$$(1) \qquad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a^n = 0$$

cu coeficienții numere reale și întregi. Presupunem că această ecuație are o rădăcină de forma $a + b\sqrt{m}$, unde m este un număr întreg

dat şi care nu se divide cu niciun pătrat mai mare decât 1, iar a şi b numere întregi. Să vedem cum se poate determina o astfel de rădăcină.

Trebue ca a să se dividă cu $a^2 - mb^2$, cu alte cuvinte să aibă un divizor de această formă. Va trebui să rezolvăm în numere întregi ecuaţiile $a^2 - mb^2 = d$, d fiind un divizor, pozitiv sau negativ, al lui a_n. Dacă m e pozitiv o ecuaţie de acest fel poate avea o infinitate de soluţii şi se pare că problema nu se poate rezolva prin un număr finit de încercări. Să observăm însă că putem totdeauna presupune că a şi b rămân în valoare absolută mai mici ca un număr dat. Fie pentru aceasta L o margine superioară a modulelor rădăcinilor ecuaţiei date (pentru L putem lua chiar o margine superioară a valorilor absolute a rădăcinilor reale). Scriind

$$a = \frac{(a + b\sqrt{m}) + (a - b\sqrt{m})}{2}, \quad b = \frac{(a+b\sqrt{m}) - (a - b\sqrt{m})}{2\sqrt{m}}$$

vedem că $|a| < L$, $|b| < L$. Numărul L, după cum se ştie, se determină uşor inspectând ecuaţia. Se poate lua de ex.:

$$L = 1 + \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|).$$

Problema este deci totdeauna rezolubilă prin un număr finit de încercări.

II. Să presupunem că pentru un divizor d al lui a_n am găsit o soluţie a ecuaţiei $a^2 + mb^2 = d$. Vrem să vedem acum dacă $a + b\sqrt{m}$ este efectiv o rădăcină a ecuaţiei. Să scriem identitatea

$$(2) \quad f(x) = (x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \ldots + b_{n-2})(x^2 - 2ax + d)$$

presupusă posibilă. După o teoremă a lui GAUSS, coeficienţii $b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}$ trebue să fie întregi. Notând cu d' divizorul complimentar al lui d ($dd' = a_n$) şi făcând identificarea în (2) găsim că numerele

$$b_{n-3} = \frac{a_{n-1} + 2ad'}{d}, \quad b_{n-i-2} = \frac{a_{n-i} + 2ab_{n-i-1} - b_{n-i}}{d},$$

$$i = 2, 3, \ldots, n-3, \quad (b_{n-2} = d')$$

trebue să fie întregi. Aceste criterii permit a înlătura multe din soluţiile găsite. In practică primul criteriu

$$\frac{a_{n-1} + 2ad'}{d} = \text{întreg}$$

e de multe ori suficient pentru a înlătura aproape toate soluțiile care nu convin. De ex., în cazul problemei propuse, acest criteriu permite a înlătura toate soluțiile care nu convin.

Numărul încercărilor pentru rezolvarea problemei se mai poate reduce și observând că e inutil a considera divizorii negativi al lui a^n dacă m este negativ sau dacă m fiind pozitiv știm că ecuația are numai rădăcini reale de același semn.

III. Dacă se știe numai că ecuația (1) are o rădăcină de forma $a + b\sqrt{m}$ unde a și b sunt rationali avem o problemă care se reduce la precedenta. După teorema lui GAUSS trebue ca $2a$ și $a^2 - mb^2$ să fie întregi. Se deduce imediat că și $m(2b)^2$ este întreg. Dacă $b = \frac{r}{s}$ este scris sub formă de fracție ireductibilă avem $s = 1$ sau 2 căci altfel m s'ar divide cu un pătrat, contrar ipotezei. Numerele $2a$ și $2b$ trebue deci să fie întregi. E suficient deci să rezolvăm problema precedentă pentru ecuația

$$x^n + 2a_1 x^{n-1} + 2^2 a_2 x^{n-2} + \ldots + 2^n a_n = 0$$

T. P.

PROBLEMA 4563. *Fie* O_b *și* O_c *centrele cercurilor circumscrise patratelor construite în exterior pe laturile* AC *și* AB *ale unui triunghiu* ABC; $O_{b'}$ *și* $O_{c'}$ *centrele cercurilor circumscrise patratelor construite în interior pe aceleași laturi. Cercurile* O_b *și* O_c *se mai taie în* M, *iar* O_c *și* $O_{b'}$ *se mai taie în* N.

Se cere:

1°. *Să se demonstreze că* M *și* N *se găsesc pe latura* BC *și că triunghiul* MAN *este dreptunghic în* A.

2°. *Să se demonstreze că dreptele* $O_b O_{c'}$ *și* $O_c O_{b'}$ *se întâlnesc pe latura* BC *în piciorul înălțimii* AA'.

3°. *Să se calculeze în funcție de laturile triunghiului* ABC, *distanța între două din punctele* O_b, $O_{b'}$, O_c, $O_{c'}$, *luate în toate modurile posibile.*

GL. GH. BUICLIU.

1°. Notând cu N' a doua intersecție a lui O_c cu BC, patrulaterul inscriptibil $BA_c AN'$ dă:

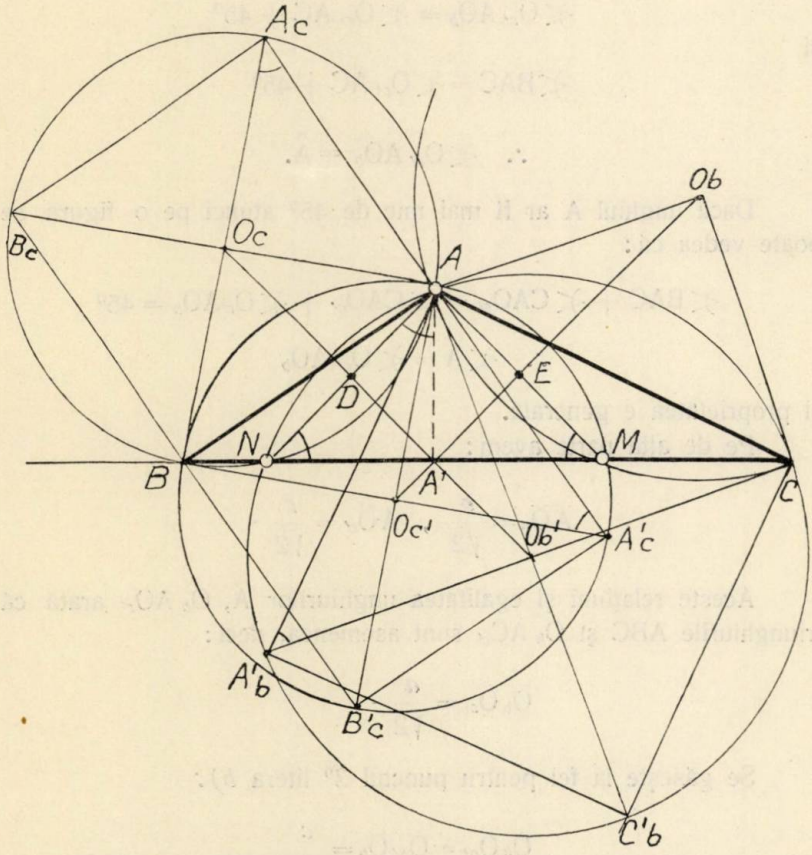
$$\measuredangle CN'A = \measuredangle BA_c A = 45^0.$$

Cum unghiul $CA'_b A$ este 45^0 rezultă:

$$\sphericalangle CA'_b A = \sphericalangle CN'A = 45^0$$

adică N' este pe cercul $O_{b'}$ şi se confundă cu N. La fel se arată că M este pe BC.

Unghiurile ANC şi AMC fiind de 45^0 triunghiul MAN este dreptunghic în A.



2^0. Din ultima proprietate dela 1^0 rezultă că înălţimea AA' este bisectoarea unghiului MAN şi deci:

$$\sphericalangle NAA' = \sphericalangle ANA' = 45^0$$

şi atunci perpendiculara din A' pe AN trece prin mijlocul D al lui AN şi deci şi prin O_c. Dar şi $O_c O_{b'}$ e perpendiculară în D pe coarda comună AN, ceea ce demonstrează proprietatea.

3°. — *a) Distanţele* $O_a O_{a'}$, $O_b O_{b'}$, $O_c O_{c'}$. Rezultă chiar din construcţie:

$$\overline{O_a O_{a'}} = a \ ; \ \overline{O_b O_{b'}} = b \ ; \ \overline{O_c O_{c'}} = c.$$

b) Distanţele $O_a O_{b'}$, $O_b O_{a'}$, $O_a O_{c'}$, $O_c O_{a'}$, $O_b O_{c'}$, $O_c O_{b'}$. Pe figură se vede că:

$$\sphericalangle O_{c'} AO_b = \sphericalangle O_{c'} AC + 45^0$$

şi

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle O_{c'} AC + 45^0$$

$$\therefore \ \sphericalangle O_{c'} AO_b = \hat{A}.$$

Dacă unghiul A ar fi mai mic de 45° atunci pe o figură se poate vedea că:

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle CAO_{c'} = \sphericalangle CAO_{c'} + \sphericalangle O_{c'} AO_b = 45^0$$

$$\therefore \ \sphericalangle A = \sphericalangle O_{c'} AO_b$$

şi proprietatea e generală.

Pe de altă parte avem:

$$\overline{AO_b} = \frac{b}{\sqrt{2}} \ , \ \overline{AO_{c'}} = \frac{c}{\sqrt{2}} \ .$$

Aceste relaţiuni şi egalitatea unghiurilor A, $O_b AO_{c'}$ arată că triunghiurile ABC şi $O_b AC_{c'}$ sunt asemenea, deci:

$$\overline{O_b O_{c'}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \ .$$

Se găseşte la fel pentru punctul 3° litera *b)*:

$$\overline{O_a O_{b'}} = \overline{O_{a'} O_b} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{O_b O_{c'}} = \overline{O_{b'} O_c} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{O_a O_{c'}} = \overline{O_{a'} O_c} = \frac{b}{\sqrt{2}} \ .$$

c) Distanțele $O_a O_b$, $O_b O_c$, $O_c O_a$. Calculăm pe $O_b O_c$. Din triunghiul dreptunghic $O_b A' O_c$, avem:

$$(1) \qquad \overline{O_b O_c}^2 = \overline{A' O_b}^2 + \overline{A' O_c}^2.$$

Dar pentru dispoziţiunea figurii, atunci când O_b este pe prelungirea lui A'E avem:

$$(2) \qquad \overline{A' O_b} = \overline{A' E} + \overline{E O_b},$$

iar triunghiurile dreptunghice A'EA şi AEO_b dau:

$$\overline{A' E}^2 = \overline{AE}^2 = \frac{h_a^2}{2}, \quad \overline{EO_b}^2 = \overline{AO_b}^2 - \overline{AE}^2 = \frac{b^2 - h_a^2}{2}$$

aşa că (2) devine:

$$\overline{A' O_b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[h_a + \sqrt{b^2 - h_a^2} \right].$$

Se găseşte la fel:

$$\overline{A' O_c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[h_a + \sqrt{c^2 - h_a^2} \right]$$

cantităţile $b^2 - h_a^2$ şi $c^2 - h_a^2$ fiind pozitive. Cu aceste valori (1) dă

$$O_b O_c = \tfrac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2h_a \left(\sqrt{b^2 - h_a^2} + \sqrt{c^2 - h_a^2} \right)}.$$

Se observă însă pe figură că:

$$\overline{A' C} = \sqrt{b^2 - h_a^2}, \quad \overline{A' B} = \sqrt{c^2 - h_a^2}$$

$$(2') \qquad \therefore \sqrt{b^2 - h_a^2} + \sqrt{c^2 - h_a^2} = a$$

deci

$$(3) \qquad \overline{O_b O_c} = \tfrac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2ah_a}.$$

La fel

$$(4) \qquad \overline{O_c O_a} = \tfrac{1}{2} \sqrt{c^2 + a^2 + 2bh_b}$$

$$(5) \qquad \overline{O_a O_b} = \tfrac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ch_c}$$

Atunci când C este între M şi N sau pe prelungirea lui MN O_b poate fi între E şi A' sau pe prelungirea lui EA' şi relaţiunea (2) poate fi:

$$\overline{A' O_b} = \overline{A' E} - \overline{O_b E} \quad \text{sau} \quad \overline{A' O_b} = \overline{O_b E} - \overline{A' E}.$$

Examinând, pe figuri respective acestor cazuri, se ajunge tot la formulele (3), (4), (5) care se pot pune numai în funcţie de laturi înlocuind înălţimea h_i prin:

$$\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{i}.$$

d) Distanţele $O_{a'}O_{b'}$, $O_{b'}O_{c'}$, $O_{c'}O_{a'}$. Şi aci trebue examinate diferitele cazuri de figură, $O_{b'}$, de exemplu, putând fi pe prelungirea lui DA' ca în figură, între A', D sau pe prelungirea lui A'D. Rezultatele la care se ajunge sunt aceleaşi.

Din figură se scoate ca la (*c*) din triunghiul $O_{b'}AO_{c'}$:

$$(6) \qquad \overline{O_{b'}O_{c'}}^2 = \overline{A'O_{b'}}^2 + \overline{A'O_{c'}}^2.$$

Dar

$$\overline{A'O_{b'}} = \overline{O_{b'}O_c} - \overline{A'O_c} = \frac{a - h_a - \sqrt{c^2 - h_a^2}}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{A'O_{c'}} = \overline{O_{c'}O_b} - \overline{A'O_b} = \frac{a - h_a - \sqrt{b^2 - h_a^2}}{\sqrt{2}}$$

înlocuind în (6) făcând toate calculele şi ţinând seamă de (2') se găseşte:

$$(7) \qquad \overline{O_{b'}O_{c'}} = \tfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - 2ah_a).$$

La fel:

$$(8) \qquad \overline{O_{c'}O_{a'}} = \tfrac{1}{2}(c^2 + a^2 - 2bh_b)$$

$$(9) \qquad \overline{O_{a'}O_{b'}} = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2ch_c)$$

oricare ar fi cazul de figură.

Notă. 1°. D-ra ALEXANDRA A. VASILESCU (Liceul de fete Alba Iulia) a rezolvat foarte bine şi complet problema, dând formule trigonometrice pentru distanţele cerute. D-sa a însoţit soluţia de un număr mare de observaţiuni punând în evidenţă proprietăţi interesante ale figurii. Aceste observatiuni se vor publica ulterior sub formă de articol.

2°. Soluţie bună dar necompletă pentru punctul 3° de la D-l C. SĂNDULACHE.

3°. D-l MARCOVICI E. (Liceul Naţional Iaşi) a trimis o soluţie prin geometrie analitică pentru primele 2 părţi şi formule exacte pentru ultimul punct.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4669. *Să se stabilească identitatea :*

$$(8\cos^4 x - 12\cos^2 x + 5)(8\sin^4 x - 12\sin^2 x + 5) = 4\cos^2 2x + \cos^2 4x.$$

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţia I dată de D-l A. GLODEN, (Luxemburg).

Avem

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

deci,

$$8\cos^4 x - 12\cos^2 x + 5$$

$$= (8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1) - 2(2\cos^2 x - 1) + 2 = \cos 4x - 2\cos 2x + 2.$$

Să transformăm analog cantitatea $8\sin^4 x - 12\sin^2 x + 5$.

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(1 - 2\sin^2 x)^2 - 1 = 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1.$$

Deci,

$$8\sin^4 x - 12\sin^2 x + 5$$

$$= (8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1) + 2(1 - 2\sin^2 x) + 2 = \cos 4x + 2\cos 2x + 2.$$

Deci prima parte poate fi pusă sub forma:

$$(\cos 4x + 2 - 2\cos 2x)(\cos 4x + 2 + 2\cos 2x)$$

$$= (\cos 4x + 2)^2 - 4\cos^2 2x = \cos^2 4x + 4 + 4\cos 4x - 4\cos^2 2x$$

$$= \cos^2 4x + 4 \cdot 2\cos^2 2x - 4\cos^2 2x = \cos^2 4x + 4\cos^2 2x.$$

c. c. e. d. d.

Soluţii analoage date de D-nii: M. F. AMĂRĂŞTEANU (Craiova), AURELIAN CĂLINESCU (Roşiori), MATEI D. DUMITRU (cl. VII-a, Liceul internat Iaşi), VICTOR L. FLORESCU (cl. V-a, Liceul militar «N. Filipescu») şi Sub-lt. GRUMĂZESCU MIRCEA.

Au rezolvat foarte bine problema, desfăcând parantezele şi înmulţind, D-nii: EUGEN MARCOVICI, ŞTEFAN D. NEGULESCU (Liceul militar «N. Filipescu»), VASILE A. PĂDUREŢ (cl. VI-a, Liceul militar «Regele Ferdinand» Chişinău), MIRCEA A. NEGREA (Brăila), ALEXANDRU POPESCU ZORICA (cl. VI-a, Liceul «Sf. Iosif»), DIMITRIE RADA (Liceul «Moise Nicoară» Arad), NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU şi I. ŢIŢEICA (Liceul militar «N. Filipescu»).

Notă. 1°. Partea a doua se mai poate scrie $1 + 4\cos^4 2x$.

2°. Desvoltând produsul complex:

$$(\cos 3x + i\cos x)(\sin 3x + i\sin x) = \sin 2x(\cos 4x + 2i\cos 2x)$$

şi egalând produsul modulelor cu modulul produsului:

$$(\cos^2 3x + \cos^2 x)(\sin^2 3x + \sin^2 x) = \sin^2 2x(4\cos^2 2x + \cos^2 4x)$$

însă $$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

deci

$$\cos^2 3x + \cos^2 x = 2\cos^2 x(8\cos^4 x - 12\cos^2 x + 5)$$

şi analog

$$\sin^2 3x + \sin^2 x = 2\sin^2 x(8\sin^4 x - 12\sin^2 x + 5)$$

de unde rezultă propoziţia de demonstrat.

PROBLEMA 4684. A, B, C *fiind unghiurile unui triunghiu, să se stabilească identitatea:*

$$\frac{2\sin A\sin B\sin C + \Sigma\sin A\sin B(\sin A + \sin B)}{-\Sigma\sin A\sin B(\sin A - \sin B)} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\operatorname{cotg}\frac{A-B}{2}\operatorname{cotg}\frac{B-C}{2}\operatorname{cotg}\frac{C-A}{2}.$$

C. IONESCU-BUJOR.

1°. Vom stabili identitatea mai generală

$$\frac{2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma + \Sigma\sin 2\alpha\sin 2\beta(\sin 2\alpha + \sin 2\beta)}{\Sigma\sin 2\alpha\sin 2\beta(\sin 2\beta - \sin 2\gamma)} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\beta+\gamma)\operatorname{tg}(\gamma+\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\operatorname{tg}(\beta-\gamma)\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)} \qquad (1)$$

α, β, γ fiind unghiuri oarecari

Notăm:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta} = l\,,\quad \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\gamma} = m\,,\quad \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha} = n.$$

Din prima egalitate deducem:

$$\frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{\sin 2\alpha - \sin 2\beta} = \frac{l+1}{l-1}$$

sau făcând membrul I calculabil cu logaritmii,

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}(\beta-\beta)} = \frac{l+1}{l-1}.$$

Deci membrul II al identității (1) este egal cu:

$$\frac{(l+1)(m+1)(n+1)}{(l-1)(m-1)(n-1)} = \frac{lmn+lm+ln+mn+l+m+n+1}{lmn-(lm+ln+mn)+l+m+n-1}.$$

Observând că $lmn = 1$, apoi înlocuind l, m, n cu valorile lor, grupând termenii cu același numitor și făcând adunarea fracțiilor obținute, se găsește membrul I (1).

2°. Dacă în identitatea (1) facem $2\alpha = A$, $2\beta = B$, $2\gamma = C$ obținem relația enunțului.

3°. Au stabilit identitatea problemei, pe alte căi, D-nii: M. L. A. NEGREA (Brăila), V. L. FLORESCU (Târgoviște).

4°. Dacă în (1) punem

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - a \ , \ \beta = \frac{\pi}{4} - b \ , \ \gamma = \frac{\pi}{4} - c,$$

se obține identitatea:

$$\frac{2\cos 2a \cos 2b \cos 2c + \Sigma \cos 2a \cos 2b (\cos 2a + \cos 2b)}{\Sigma \cos 2a \cos 2b (\cos 2a - \cos 2b)} = \frac{\operatorname{cotg}(a+b)\operatorname{cotg}(b+c)\operatorname{cotg}(c+a)}{\operatorname{tg}(a-b)\operatorname{tg}(b-c)\operatorname{tg}(c-a)}.$$

a, b, c unghiuri oarecari

C. I. B.

PROBLEMA 4711. *Care triunghiuri se pot desface în două triunghiuri asemenea printr'o tăietură rectilinie dusă prin unul din vârfuri ?*

I. IONESCU.

Fie un triunghiu oarecare ABC, şi AD o tăietură rectilinie ce-l desface în triunghiurile ABD şi ADC.

In cazul când aceste triunghiuri sunt asemenea, să găsim unghiului ADC din triunghiul ADC, corespondentul său egal în triunghiul BAD.

Avem totdeauna :

$$\widehat{ADC} = \widehat{ABD} + \widehat{BAD}$$

sau :

$$\widehat{ADC} > \widehat{ABD} \; ; \; \widehat{ADC} > \widehat{BAD}.$$

Deci, în cazul când triunghiurile ABD şi ADC sunt asemenea, avem :

$$\widehat{ADC} = \widehat{ADB} = 90^0 .$$

In ceea ce priveşte egalitatea celorlalte două perechi de unghiuri ale triunghiurilor ADB şi ADC se pot face două ipoteze :

1) $$\widehat{CAD} = \widehat{ABD} \; ; \; \widehat{BAD} = \widehat{ACD}.$$

Dar în triunghiul dreptunghiu ADB :

$$\widehat{DAB} = 90^0 - \widehat{ABD} = 90^0 - \widehat{CAD}$$

$$\therefore \; \widehat{DAB} + \widehat{CAD} = 90^0$$

sau :

$$\widehat{BAC} = 90^0 .$$

2) $$\widehat{CAD} = \widehat{BAD} \; ; \; \widehat{ACD} = \widehat{ABD}.$$

Deci triunghiurile ce se bucură de proprietatea dată în enunţ sunt :

triunghiurile dreptunghice şi *triunghiurile isoscele,* (în a căror categorie intră şi triunghiurile echilaterale).

Triunghiurile isoscele dau un caz special de asemănare: egalitatea triunghiurilor în care ele se desfac, din cauza simetriei în raport cu tăietura rectilinie AD.

IULIAN ALEXIU.

Au mai rezolvat problema D-nii: G. G. CONSTANTINESCU, L. BIVOLARU; N. I. PUNGĂ şi N. D. ŞTEFĂNESCU.

D-l G. G. CONSTANTINESCU a examinat şi cazul unei drepte AD duse pe din afara triunghiului şi a găsit soluţia ducând AD aşa că $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ACB$.

EXERCIŢII

5. Se dă un triunghiu ABC. Se notează cu P simetricul lui C în raport cu B, cu Q simetricul lui A în raport cu C. În afara triunghiului ducem BM perpendicular şi egal cu BC. Să se arate în ce caz punctele M, P şi Q sunt colineare. Să se dovedească că în acest caz suprafaţa triunghiului ABC e dată de formula:

$$4S = 5a^2 + b^2 - c^2.$$

DIMITRIE MAVRODIN.

R. Să luăm pe BC ca axă Ox, şi înălţimea coborită din A ca axă Oy

Avem: $A(O, \alpha)$, $B(\beta, 0)$, $C(\gamma, 0)$. Se verifică uşor că: $M(\beta, \beta - \gamma)$, $P(2\beta - \gamma, 0)$, $Q(2\gamma, -\alpha)$. Condiţia ca M, P şi Q să fie colineare este:

$$\begin{vmatrix} 2\beta - \gamma, & 0, & 1 \\ 2\gamma, & -\alpha, & 1 \\ \beta, & \beta - \gamma, & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ sau dezvoltat, după toate simplificările:}$$

$$(1) \qquad 3\gamma = 2\beta + \alpha.$$

Notând ca deobicei cu a, b, c laturile triunghiului, avem: $\gamma = b \cos C$, $-\beta = c \cos B$, $\alpha = b \sin C$, şi înlocuind în (1):

$3b \cos C = b \sin C - 2c \cos B$, şi ţinând seamă că: $a = b \cos C + c \cos B$, avem:

$$(2) \qquad 2a = b(\sin C - \cos C),$$

care este condiţia căutată.

Înmulţind în ambii membri cu $2a$, şi ţinând seamă de formulele:

$$2S = ab \sin C \quad c_2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Formula (2) devine:

$$4S = 5a^2 + b^2 - c^2.$$

c. c. t. d.

PROBLEME PROPUSE

4735. O fracție are termenii săi de câte două cifre. Impărțind-o cu inversa ei ne dă ca rezultat un număr întreg. Să se găsească fracțiile care îndeplinesc aceste condițiuni.

I. IONESCU.

4736. Să se găsească un număr de trei cifre egal cu produsul dintre produsul și suma cifrelor sale.

G-L GH. BUICLIU.

4737. Intr'un plan se consideră două puncte A și B, două drepte D și D_1 și un punct M mobil pe dreapta D. Fie A_1 și B_1 intersecțiile dreptei D_1 cu Dreptele AM și BM și M_1 intersecția dreptelor AB_1 și A_1B. Să se arate:

1°. Că punctul M_1 descrie o dreaptă ce trece prin intersecția dreptelor D și D_1;

2°. Dreptele MM_1 trec printr'un punct fix de pe dreapta AB.

LT. C. IONESCU-ȚIU.

4738. Fie (O_i) cercurile circumscrise triunghiurilor T_i, ce se pot forma cu dreptele Δ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, câte trei lăsând la o parte dreapta Δ_i. Fie M punctul lui MIQUEL al patrulaterului $\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4$. Dreptele ce unesc un punct I_1 de pe cercul (O_1) cu vârfurile triunghiului T_1 taie a doua oară cercurile (O_2), (O_3), (O_4) respectiv în I_2, I_3, I_4. Să se arate că:

1. Dreapta Δ_1 este axa de omologie a triunghiurilor T_1 și $I_2I_3I_4$;

2. Triunghiurile T_1 și $I_2I_3I_4$ sunt direct asemenea centrul de similitudine fiind M;

3. Patrupunctul $I_1I_2I_3I_4$ este inscriptibil într'un cerc trecând prin M;

4. Centrul cercului $I_1I_2I_3I_4$ se găsește pe cercrcul lui MIQUEL al patrulaterului.

AD. GHEORGHIU.

4739. Să se rezolve sistemul:

$$\sqrt{x+y+2\sqrt{xy-x+y-1}} = a$$

$$\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{y-1}+\sqrt[8]{(x+1)(y-1)} = b.$$

M. T. AMĂRĂȘTEANU.

4740. Să se arate că expresia:

$$E \equiv a(x^5+y^5)+5bxy(x^3+y^3)+10cx^2y^2(x+y)$$

se poate pune sub forma:

$$A(x+y)^5+B(x+ky)^5+C(y+kx)^5$$

A, B, C, k fiind independente de x și y. Să se determine A, B, C, k.

C. IONESCU-BUJOR.

4741. Să se găsească ecuația generală de gradul V, care admite cu derivata sa a doua trei rădăcini comune în progresie geometrică.

LT. C-DOR GH. NICULESCU.

4742. Fie:

$$P(x) = x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \ldots + \binom{n}{i} a_i x^{n-i} + \ldots + a_n$$

un polinom de gradul n, $P'(x)$ derivata lui și

$$Q(x) = x^{n-2} + \binom{n-2}{1} a'_1 x^{n-3} + \ldots + \binom{n-2}{i} a'_i x^{n-i-2} + \ldots + a'_{n-2}$$

câtul, afară de un factor constant, al lui $[P'(x)]^2$ prin $P(x)$.

Să se arate că:

1°. Avem totdeauna $a'_1 = a_1$;

2°. Condiția necesară și suficientă ca să avem:

$$a'_1 = a_1 \ , \ a'_2 = a_2, \ldots, a'_p = a_p$$

este ca derivata de ordinul $n-p$ a lui $P(x)$ să aibă toate zerorile confundate.

TIBERIU POPOVICIU.

4743. Dacă suprafața unui patrulater, de laturi $a, b, c, d,$ este dată de formula:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2\Sigma a^2 b^2 - \Sigma a^4},$$

suma a două unghiuri opuse ale lui este 90^0.

GH. D. SIMIONESCU.

4744. Să se găsească distanța centrelor a două sfere egale, știind că partea dintr'o sferă care intră în cealaltă este egală cu partea care rămâne afară.

ULPIU FLORESCU.

4745. Să se arate că momentul de inerție, precum și raza de girație a unei prisme drepte de înălțime h și cu baza un patrat de latura a, în raport cu o muchie, sunt respectiv de patru ori și două ori mai mari decât momentul de inerție și raza de girație ale aceleiași prisme, dar în raport cu axa sa.

PETRE MIRESCU.

4746. Se consideră ecuația diferențială:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x^2 - y^2 + 1)}{x(x^2 - y^2 - 1)}$$

și se cere:

1^0. Să se integreze cu ajutorul substituției $y = ux$;

2^0. Să se integreze punând: $x^2 + y^2 = u$, $2xy = v$;

3^0. Să se integreze cu ajutorul coordonatelor polare;

4^0. Să se găsească un factor integrant de forma $x^\alpha y^\beta$ și să se integreze apoi ecuația dată. Să se găsească expresiunea generală a factorilor integranți:

5^0. Utilizând substituția dela (2^0) să se regăsească forma generală a factorilor integranți cu ajutorul unei ecuații cu derivate parțiale.

VIRGIL CLAUDIAN.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăşteanu F. M. (4684, 714); *Apostol R.* (4545, 644, 59, 701, 14, 18, E); *Beiu-Paladi E.* (4418); *Bivolaru Liviu* (4714, 16); *Bogdan Gr. I.* (4556, 85, 714, 16); *Bulat L. M.* (4714); *Cojocaru Petre* (4634, 68, 69, 716, 18); *Constantinescu G. G.* (2682, 3239, 546, 682, 811, 4102, 12, 72, 92, 442, 542, 613, 66, 713, 16, 21, N, P); *Cotescu Const.* (4556, 714, 16); *Dimitriu I. C.* (4556, 714, 16); *Eckstein V.* (4581, 632, 92, 719); *Enache D. I.* (4556, 716); *Firu Paul* (4716); *Gavrilescu N. C.* (4669, 714, 18, 19); *Grumăzescu M.* (4605, 11, 91, 701, 12, 14, 18, 19); *Lăzărescu Stelian* (4658); *Mamut T. Petre* (4714, 16); *Mavrodin D.* (4504, 29, 723); *Negrea A. Mircea-Leonte* (2398); *Negulescu St.* (4653); *Păscaru I. I.* (4714, 16); *Petrescu P. I. B.* (4714, 18, 19); *Popoviciu I. Gavril* (4669, 714, 16, 18); *Prodan C.* (4520, 56); *Săndulache C.* (4712, 21); *Ştefănescu D. Nicolae* (4719); *Stoenescu Al.* (C); *Tomescu D. H.* (4714).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea „*Gazetei Matematice*“ se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor GR. ZAPAN

C. 42586

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLII

NUMĂRUL 4. — DECEMVRIE 1936

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNEA"
SIBIIU

SUMARUL

1. Cuvântarea Domnului Ion Ionescu la sărbătorirea sa dela 1 Noemvrie 1936.
2. O ediție a compendiului lui Ch. Wolff (urmare și sfârșit) . . . . . *Victor Marian.*
3. Asupra curbelor plane . . . . . *C. Ionescu-Bujor.*
4. Premiul „Inginer Al. Roșu".
5. Raport pentru premiul „H. Capriel".
6. Note Matematice: 15 — 21.
7. Bibliografie.
8. Cereri.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 2469, 3684, 3906, 4300, 4485, 4609, 4653, 4662, 4700.
11. Exerciții: 6 — 10.
12. Probleme propuse: 4747 — 4758.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1936

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer-Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1936 şi nerezolvate sunt enumărate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4722, 24, 26, 27, 31, 33, 34, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	220	260	80
5— 8 „	375	425	100
9—16 „	620	700	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLII. No. 4. *SUPLIMENT* DECEMVRIE 1936

RECREAŢIUNI

1. **Zero.** Invenţia lui 0 se atribuie Indienilor pela 400 d. Cr. Unii zic că l'ar fi avut Chinezii pe la 1240 a. Cr. Indienii îi ziceau *spaciu gol.* De la ei a trecut la Arabi şi apoi în Europa.

Zero nu adună, nu scade; ca factor anulează orice se înmulţeşte cu el. Ca exponent reduce totul la unitate. Ca împărţitor dă câturi nemărginit de mari. El nu are putere. La zecimale arată şi lipsă de unităţi şi lipsă de calcule sau de măsurări precise. Nu are nici un efect scris la stânga numerelor întregi sau la dreapta zecimalelor.

Zero nu era considerat ca număr până în secolul XVI. CHUQUET spunea că ecuaţia $9x^2 = 5x^2$ nu e cu putinţă pe când azi noi zicem că are rădăcina dublă 0. Azi e număr căci cu el se poate face calcule ca şi cu alte cifre. Mai mult încă, îl considerăm ca număr pereche deşi nu are nici măcar o pereche în el! GÉLIN zice că 0 este negaţiunea numărului, dar noi zicem *numărul zero.*

I. I.

*

2. **Numărul 7 în viaţa omului.** Copilul e dat la şcoală la 7 ani.

Liceul are 7 clase. S'au încercat unii să schimbe acest număr, dar s'a revenit.

La de trei ori 7 ani, omul devine major.

La 7 zile de muncă omului i se lasă o zi de odihnă.

M. D. MOTOC.

*

3. **Totul e nul!** Ce egalitate e mai adevărată ca:

$$n^2 - n^2 = n^2 - n^2 ?$$

Putem să scriem că primul membru este un produs de sumă prin o diferenţă? Putem da pe n ca factor comun în a doua parte? Dacă da, atunci avem:

$$(n + n)(n - n) = n(n - n).$$

Suprimăm factorul comun $(n - n)$ din ambele părţi, apoi un n din fiecare şi ne rămâne $n = 0$ oricare ar fi n!

N. ST. MIHĂILESCU.

*

4. **O cugetare a lui Goethe.** „Împărţirea existenţei prin raţiunea omenească nu se face fără rest".

I. LEUCO.

*

5. **Eminescu despre matematici.** Matematicile sunt ştiinţele cele mai uşoare, — de 1000 de părţi mai uşoare decât limbile care cer memorie multă. — Ele sunt în joc cu cele mai simple legi ale judecăţii omeneşti, numai că acele legi nu trebue puse în joc goale şi fără nici un cuprins, ci totdeauna aplicate asupra unor icoane văzute ochilor.

V. V. VARLAN.

*

6. **Geometria în spaţiu la Teatru!** In *Rampa* din 1928 pag. 1 găsim: *«Geometria în spaţiu»*. Sub acest titlu sugestiv se va reprezenta o piesă în cursul stagiunii următoare a teatrului Mathurias din Paris. Piesa este datorită lui PAUL NIVOIX.

N. N. RADOVENEANU.

*

7. **Demonstraţiuni rapide.** Iată cum se poate demonstra repede *Teorema lui* MENELAUS:

Fie triunghiul ABC tăiat de transversala A'B'C'. Avem:

$$A'B \times B'C \times C'A = A'C \times B'A \times C'B.$$

E destul a simplifica cu A, A', B, B', C, C'.

Analog se poate demonstra şi *Teorema lui* CEVA, însă ca să scăpăm de semnul — pe care-l pun unii la partea a doua a egalităţii ridicăm mai întâiu egalitatea la patrat şi simplificăm cu patratele literilor A, B, C, A', B', C'.

X.

*

8. **Paradox.** *Toate dreptele dintr'un plan sunt paralele.* Fie un triunghiu ABC tăiat de două transversale *abc, a' b' c'*. Pentru ca ele să fie paralele trebue să avem:

$$\frac{Ab}{Ac} = \frac{Ab'}{Ac'}, \quad \frac{Ca}{Cb} = \frac{Ca'}{Cb'}, \quad \frac{Bc}{Ba} = \frac{Bc'}{Ba'}.$$

Dar înmulţind aceste egalităţi găsim:

$$\frac{bA}{bC} \times \frac{aC}{aB} \times \frac{cB}{cA} = \frac{b'A}{b'C} \times \frac{a'C}{a'B} \times \frac{c'B}{c'A},$$

căci ambele părţi sunt 1 după teorema lui MENELAUS. Această egalitate fiind adevărată, şi cele trei dela care am plecat sunt adevărate.

Unde este eroarea?

I. C. VASILIU.

*

9. **Ghicitoare matematică.** Ni se cere să dăm soluţia ghicitoarei matematice din *Suplimentul* de pe lângă No. 9 din Anul XIX. Soluţia ei nu s'a primit. Iată acea chestiune:

Unde intră omul de n ori şi iese de $(n-1)$ *ori şi unde iese de* $(n+1)$ *ori? Cari oameni fac excepţiune dela primul caz şi cari dela al doilea?*

Fie L un loc închis, ca o casă, o curte, sau limitat, ca un oraş, o ţară, în care un om poate intra şi ieşi. Să însemnăm cu — 1 eşirea unui om din locul L şi cu + 1 intrarea. Pe măsură ce intră şi iese din el vom scrie numerele respective unul după altul cu semnele lor. Dacă facem suma şirului astfel obţinut la un moment dat, atunci dacă suma este 0, omul a intrat şi ieşit din L, sau invers, de n ori ; dacă suma este — 1 a intrat de n ori şi a ieşit de $(n - 1)$ ori, iar dacă suma este + 1, a intrat de n ori şi a eşit de $(n + 1)$ ori. Alte posibilităţi nu sunt. Dacă considerăm acum viaţa întreagă a omului, cazul sumei 0 e cel normal. Cazul sumei — 1 se iveşte când omul se naşte în afară de L şi moare în L, iar cazul sumei + 1 când omul se naşte în L şi moare afară din L. Cei ce se nasc în L şi mor în L, sau cari se nasc în afară de L şi mor afară din L intră în cazul sumei 0 faţă de L.

Cele spuse mai sus presupun limitele lui L fixe cu timpul. Astfel un om poate să se găsească deodată în L sau să dispară din L fără să se mişce. Acel om va face excepţie dela regulile de mai sus, căci el poate să nu mai fie în L prin reducerea limitelor lui L, iar nu prin eşirea din L, şi poate să se găsească în L fără să intre acolo. Astfel un locuitor din Ardeal, după războiu a dispărut din Ungaria şi a fost înglobat în România. Prin variaţiunile limitelor lui L, înglobând sau pierzând un alt loc L', se produc excepţiuni la regulile de mai sus.

I. I.

*

10. **Triunghiul cerc!** In ziarul *Opinia* din 5/IX 1930 găsim :

Triunghiul albastru, după definiţia dată de D-l TEODOREANU, este un *cerc*... S'ar părea că e o aberaţie geometrică, totuşi reprezintă un *cerc*, o asociaţie de fete tinere!

V. C. POPESCU.

*

11. **Taxe pe dimensiuni.** Un matematician a observat că Municipiul Bucureşti impune pe cetăţenii săi la taxe pe toate dimensiunile. Astfel există o taxă pe *metri liniari* de trotuar, o taxă pe *metri patraţi* de suprafaţă a curţilor şi o taxă pe *metri cubi* de apă consumată. Pe când taxe şi pe a patra dimensiune ?

I. I.

*

12. **O nouă geometrie!** Printre aprecierile critice asupra romanului „Intunecare" iată ce cuprinde între altele una din ele :

„Considerat în geometria sa interioară, romanul închide cea mai puternică..."

Pe când o geometrie exterioară!

H. IONESCU.

*

13. **Da = Nu.** Demonstraţia se face arătând că ambele cuvinte se compun din aceleaşi elemente. Pentru a arăta aceasta scriem cuvintele DA şi NU cu alfabetul telegrafic Morse. Avem :

— . . . — ; — . . — ,

ceea ce este o identitate, acelaşi număr de liniuţe şi de puncte fiind de o parte şi de alta!

A. I. S.

*

14. **Matematica umană. Algebra inimei. Trigonometria senzaţiilor.** In *«Serenada Călăului»* de M. DECOBRA găsim următoarele:

„Viaţa omului este *o ecuaţie cu o necunosută.* Iar *necunoscuta* este data răposării. Fără ea, fără misterul acestei *scadenţe,* cine ar încerca să rezolve *problema?* La ce ar mai servi atunci toată această *matematică umană* care merge dela *algebra inimei* la *trigonometria senzaţiilor*".

H. P. IONESCU.

*

15. **Măsurarea suprafeţelor prin timp.** In Transilvania un jugăr este o suprafaţă de teren care se poate ara cu boi în patru zile. I. I.

*

16. **Elipsa imaginară.** Când Colonelul intră în clasă găseşte că profesorul întreba pe elev, ce este curba:

$$(x^2/a^2) + (y'^2/b^2) + 1 = 0.$$

Elevul răspunde scurt: „*O elipsă*".

—'Bine, dar ce elipsă, — vrea să se lămurească profesorul.

Elevul face o mică pauză, pe care Colonelul o ia drept ezitare din neştiinţă şi crede de cuviinţă să intervie:

— Ia desemneaz-o.

Elevul încremeneşte, — dar în urma sugestiilor semnalizate din clasă răspunde totuşi: „este imaginară".

— Ei şi, — replică practical Colonelul, — n'ai decât să o faci punctată.

GH. B.

*

17. **Identitatea lui Caragiale.** In biografia lui CARAGIALE de OCTAV MINAR găsim la pag. 33:

Actor clasa I + Actor clasa II — Actor clasa III = 0.

V. CRIVĂŢ.

*

18. **Cât-îi „asta"?** Cine nu a auzit zicându-se:

«Asta şi cu nimica îi tot una»

dar câţi s'au întrebat cât face *«asta»?* Fie x necunoscuta *«asta»*.

Avem ecuţia:

$$x + 0 = 1, \quad \therefore \quad x = 1.$$

I. I.

*

19. **Infinitul.** Iată ce spune M. CHOIZY în *O lună printre femei.* La pag. 137: „Mizeria este aşa de infinită încât pare anevoie de realizat. E ca infinitul mare sau infinitul mic. Mintea noastră refuză să le înţeleagă".

La pag. 175: „Singură prostia dă o idee de infinit. Numai ea e infinită ca Dumnezeu. Numai prostia rămâne de neînţeles. Nu poţi discuta cu prostia. Ea desfide logica. Ea scapă din ghiarele metrice ale ştiinţei. Ea este în afară de planul nostru intelectual".

FATE MĂRGĂRIT.

*

20. **Infinit simplu, linear, neînţeles!** Găsim în *«Penumbre»* de PETRE STRIHAN:

„Se aşterne apa morţilor pe şes || Se prăfuesc luminile în gene || Şi albăstresc în zare dealuri || Dobrogene || Ca idealuri || In infinitul simplu, linear, neînţeles...".

ILIE T. POPESCU.

CUVÂNTAREA DOMNULUI ION IONESCU LA SĂRBĂTORIREA SA DELA 1 NOEMVRIE 1936 *)

Domnilor,

Se apropie anul de când, în Noemvrie trecut, D-nii ingineri CRISTEA NICULESCU şi GHEORGHE FILIPESCU au venit în Sala Profesorilor şi mi-au spus că unii ingineri, — în mare parte foşti elevi ai mei, — vor să mă supună la o probă ca aceea pe care Societatea Română de Ştiinţe a organizat-o acum câţiva ani colegilor G. ŢIŢEICA şi D. POMPEIU cu ocaziunea împlinirii etăţii de 60 ani. Le-am răspuns că eu am împlinit de mult această etate, că am trecut de 41 de ani de inginerie şi de 33 de ani de profesorat şi că prin urmare nu era niciun motiv de aritmetică zecimală care să justifice o sărbătorire. In plus, o boală de inimă de care sufeream ar fi putut să dea rezultate care nu se puteau calcula.

Motivul de ordin aritmetic nu mi s'a admis, întru cât în 1909 fiind pus eu să organizez o serbare a *Gazetei Matematice,* nu am reuşit să o facem decât la 13 ani, 8 luni şi 2 zile dela întemeierea acelei reviste! Motivul de ordin medical mi s'a acceptat însă, şi pe baza lui mi s'a acordat o amânare, prima amânare cerută de mine în cei 47 de ani de când umblu pe sub acoperişurile acestei Şcoli!

In Decemvrie 1935 a avut loc o serbare a *Gazetei Matematice* pentru împlinirea a 40 de ani de existenţă a acelei reviste. Cu acea ocaziune unii dintre vorbitori au spus destule despre activitatea mea ca inginer şi profesor, încât mi s'a părut că era de ajuns, şi că nu e nevoie de o nouă serie. De aceea nu am mai dat niciun răspuns delegaţilor pe cari i-am numit la început.

Cu ocaziunea deschiderii cursurilor din anul acesta, D-l Rector şi mai mulţi colegi mi-au cerut să fixez ziua sărbătoririi, şi am spus că voiu cere avizul medicului dacă pot suporta această probă. De data aceasta nu mi s'a mai acordat nicio amânare şi s'a fixat ziua de azi. Medicul mi-a dat voie cu condiţiunea de a lua medicamente fortifiante timp de 5 zile înainte.

Şi astfel, Domnilor, ne găsim acum adunaţi în acest templu de înaltă cultură tecnică naţională, ca să asistăm la tămâierile preoţilor, şi cuvântările dascălilor şi dreptcredincioşilor mei foşti

*) A se vedea *Gazeta Matematică,* Anul XLII pag. 115.

şi actuali elevi pentru activitatea mea tecnică şi culturală, inginerească şi profesorală.

Aţi făcut bine sau rău chemându-mă la o sărbătorire? Nu vă pot da un răspuns precis; mie mi se pare că era mai bine să menţineţi tradiţiunea din această Şcoală de a se face asemenea manifestări la retragerea unui profesor. Altfel, din cauza etăţii înaintate este posibil ca profesorul să nu mai fie la înălţimea de dinainte de sărbătorire; poate să nu mai dea elevilor tot ce le trebue, poate să nemulţumească pe colegii săi, etc. Apoi, sunt mai mulţi cei ce umblă după asemenea festivităţi decât aceia cari evită să le provoace.

Eu, dacă am acceptat să vin este că mă găsesc într'o situaţiune mixtă, căci pe jumătate sunt în Şcoală dar pe jumătate sunt plecat. Să mă explic:

Cursurile mele de Poduri şi Construcţiuni metalice îmi cereau în semestrul II până la 8 lecţiuni de câte $1^1/_4$ ore pe săptămână, 92 şedinţe de proiecte după program şi altele pentru complectări, prefaceri şi refaceri, în număr nemărginit. Aceasta în afară de examene peste examene, şi de timpul cerut pentru Consilii, Comitete, Comisiuni, cercetări, etc. O asemenea muncă depăşeşte puterile unui om la etatea de 65 de ani. De aceea, în Iunie 1935, după terminarea examenelor generale, mi-am dat demisiunea pentru a-mi regula drepturile la pensie. Comitetul de Direcţiune al Şcoalei şi D-l Ministru C. ANGELESCU nu m'au lăsat să plec, dându-mi ca ajutor un conferenţiar care să-mi reducă sarcina la cel puţin jumătate din ceea ce aveam înainte.

Ei bine, pentru jumătatea din curs pe care am cedat-o D-lui Conferenţiar CRISTEA NICULESCU mă puteţi considera ca plecat din Şcoală şi sunteţi în tradiţiunea ei; pentru cealaltă jumătate tradiţia este ruptă. Care este motivul pentru care aţi rupt-o?

Că am muncit mult în această şcoală este adevărat, nu o pot nega nici eu, care de 14 ani am renunţat la funcţiuni inginereşti şi am rămas să mă ocup numai de profesorat; dar muncă au depus-o şi alţi profesori şi o depun şi acuma. Apoi, pretenţia de a fi mai savant, nu o am. Care este dar caracteristica care a determinat sărbătorirea? Nu văd alta decât *severitatea* ca profesor, de care nu mă lepăd, dar care nu este în armonie cu tendinţele şi cerinţele timpurilor de astăzi. Ea însă mi-este criticată,—

chiar de colegii de profesorat, — cu destulă asprime ; suportată cu greu de elevii cari vin la cursurile mele cu pregătire insuficientă sau fără destulă ordine şi putere de muncă, şi blestemată de părinţi, rude, cunoscuţi şi protectori.

Cursul meu este destul de întins; el cere 180 lecţiuni anual şi 92 şedinţe reglementare de proiecte; el cere cunoştinţe solide dela alte cursuri anterioare. Proiectele nu se pot face dacă nu se cunoaşte mecanica şi rezistenţa materialelor, după cum cineva nu poate face aplicaţiuni de algebră dacă nu ştie aritmetica. Cursu este vast deoarece el nu se referă exclusiv la construcţia podurilor, ci la toate construcţiile supuse la greutăţi şi eforturi mari. Când în Şcoală lipsea un curs special de Beton armat, construcţiunile făcute cu acest material se tratau la cursul de Poduri, de profesor singur sau ajutat de asistenţii săi. După ce sudura a luat avânt la construcţiunile metalice, s'au introdus capitole speciale în cursul de Poduri. Cu ajutorul chestiunilor tratate la acest curs, elevii pot proiecta construcţiuni mari de lemn, de zidărie şi de metal; pot face ferme, rezervoare, etc.

Ca să vedeţi că nu mă laud şi că lucrurile stau aşa cum vi le spun aci, reproduc cele ce mi le spunea regretatul inginer ST. N. MIREA la o serbare a *Gazetei Matematice* în 1904:

„Ne-aţi dat în Şcoală tot ce ne-a trebuit pentru a putea merge cu bine în calea specialităţii noastre, şi după cum proverbul zice că toate drumurile merg la Roma, tot astfel experienţa ne spune că toate nedumeririle noastre tecnice se rezolvă dacă apucăm drumul către notiţele luate la prelegerile D-voastră“.

Este aci bine înţeles oarecare exagerare, ca de obiceiu la orice tămâiere, dar este şi ceva adevăr de care previn pe elevii mei la fiecare început de an, că la mine nu învaţă să facă numai poduri. De altfel, pregătirea serioasă a examenelor şi lucrarea conştiincioasă a proiectelor este indispensabilă oricărui viitor inginer pentru cultura şi educarea lui profesională, în orice specialitate. Am întâlnit odată la Direcţiunea Generală a Căilor Ferate pe un inginer dela Serviciul de mişcare şi l-am întrebat ce mai face. Mi-a răspuns că face ceea ce l-am învăţat eu la Şcoală. Mirat, îl întreb dacă face vreun proiect de pod şi îmi dă răspunsul: *„M'ai învăţat să muncesc şi să studiez serios“.*

Mi s'a recomandat, mi s'a cerut şi mi se cere şi azi să mai reduc din severitate; nu pot face acest lucru pentrucă severitatea face parte integrantă din alcătuirea mea psihică. Am convingerea că la o şcoală ale cărei diplome sunt şi certificate de liberă practică inginerească, diploma trebue să garanteze o instruire şi pregătire complectă pentru ca absolventul să proiecteze şi să execute lucrările inginereşti cu care este însărcinat sau pe care şi le propune să le facă el însuşi. Chestiunea aceasta am tratat-o în mai multe rânduri prin articole şi broşuri şi nu mai insist asupra ei.

Este însă aci locul să vă spun că eu sunt mai sever cu mine decât cu alţii. Eu nu-mi permit să absentez dela cursuri chiar când aş avea motive destul de serioase; nu-mi permit să intru târziu în clasă şi de multe ori am văzut elevi potrivindu-şi ceasul la urcarea mea pe catedră; nu pun pe asistenţi să-mi facă cursul decât când, — fiind funcţionar, — mi se dădea ordin să plec din oraş sau să mă duc în altă parte. De 14 ani am rămas numai profesor şi nu mai am piedici de acest fel. Nu iau pe asistenţi ca ajutoare la curs decât când trebue să se pună şi ei în curent cu lucruri noui introduse de mine, şi nu-i iau să asiste la examene, deoarece îmi pot lua singur toată răspunderea notelor ce dau. Pentru mine nota este a elevului, nu este a mea, şi i-o dau întreagă cât merită, chiar dacă atitudinea elevului la examen nu a fost tocmai ceea ce trebuia să fie; însă din acest principiu reiese că nu pot face pomană cu note, căci nimeni nu poate face pomană cu ceea ce nu-i aparţine. Absenţe nu admit elevilor decât în cazuri cu totul binecuvântate, căci nu mi le admit nici mie. Din Octomvrie 1934 până în jumătatea lui Martie 1935 am suferit de o furunculoză care cerea operaţii, arderi şi care dădea dureri teribile, şi nu mă lăsa zile întregi să mişc mâna dreaptă decât din cot. Cu toate acestea, în tot acel timp nu am lipsit o singură zi dela cursul meu. In fine nu-mi las lecţiuni nepregătite, nu las cursul să se învechească.

De altfel severitatea nu o am numai ca profesor. Iată ce a spus despre mine ANGHEL SALIGNY, — care mi-a fost director timp de 17 ani — la serbarea *Gazetei Matematice* despre care am vorbit:

„Ca şef cere mult dela subalternii săi dar merge cu pilda bună înainte şi este totdeauna mai sever cu sine însuşi decât cu ceilalţi“.

Iar mai departe a adăogat:

„El este sever dar drept şi nu cunoaşte hatârul, plaga care slăbeşte toate instituţiunile noastre şi la care numai persoane care pun datoria lor mai presus de orice alte consideraţiuni, pot rezista“.

Prin urmare, dacă prin sărbătorirea de azi voiţi să preaslăviţi severitatea pentru îndeplinirea datoriilor şi rezistenţa la favoritism, nepotism şi protecţionism, sunt alături de D-voastră, căci am adânca convingere că fără aceasta nu se poate obţine nimic serios în pregătirea culturală şi morală a viitorilor ingineri. Sunt destule tentaţiuni în viaţa practică pentru ca să mai începem şi noi cu ele de aici!. Poate că în alte părţi, unde educaţia de acasă şi din şcolile primare şi secundare sunt foarte îngrijite, severitatea să nu fie necesară; la noi fără dânsa, fără disciplină riguroasă, nu merge.

Chestiunea aceasta am desbătut-o de mai multe ori prin publicaţiuni, în care am şi arătat că regimul Şcoalelor de ingineri nu se potriveşte cu al Universităţilor, tocmai pe chestiunea disciplinei şi a severităţii.

* * *

Acum, Domnilor, după cum se face în ocaziuni similare, să-mi daţi voie să vă fac o spovedanie, referitoare la trecutul meu, pentru că cred că astfel vă veţi putea da seama mai bine de unele atitudini şi acţiuni ale mele precum şi de unde mi-am însuşit principiile de severitate la acţiuni şi de rezistenţă la insistenţe.

Tatăl meu îşi iubea copiii şi le făcea multe, — poate prea multe, — din gusturile lor; nu le tolera însă să se abată din cuvântul dat de dânsul, căci bătaia apărea imediat cu o intensitate proporţională cu actul de nesupunere făcut. Nu am regretat în urmă, şi nu regret nici azi acea severitate, căci ea a contribuit mult la formarea spiritului meu de ordine. El a murit de vreme, pe când eu nici nu împlinisem 10 ani, lăsând pe mama cu 5 copii, iar ca avere, rămasă dela funcţionarea lui cinstită de administrator de moşie, numai 5 lei în numerar şi 16 chile de orz într'o magazie!

Cu câteva zile înainte de a muri la spitalul Colţea, a cerut să fiu trimis ca să mă vază; atunci mi-a spus să citesc mult şi să învăţ bine ca să pot îngriji de mama mea când voiu fi mare. Am înţeles că simte că nu are să mai trăiască mult şi m'a apucat un plâns de nici nu ştiu când am fost dus acasă. Cuvântul lui l-am

păstrat cu sfinţenie căci am învăţat cu toată stăruinţa şi am stat cu mama până la moartea ei acum 15 ani. Pe dânsa am avut-o ca exemplu de muncă şi de conştiinţă la îndeplinirea datoriei; dela ea am luat spiritul de corectitudine, de economie, de traiu modest. Vă pot spune că în anul în care am ieşit inginer, am locuit în două odăiţe mici în Strada Călugei, şi că azi, după mai bine de 42 de ani de practică inginerească, locuesc tot acolo în două camere ceva mai mici!

Prima clasă primară am făcut-o la ţară, cu mari greutăţi din cauza schimbării învăţătorilor. Pentru clasa a doua am fost adus la Bucureşti la Şcoala dela Clemenţa, stând la o gazdă, dela care am fugit la ţară, căci până şi alimentele ce mi se aduceau de acasă, le dădea la o ceată de căţei, din părul cărora îşi făcea ciorapi contra reumatismului! Cu modul acesta am pierdut anul acela. Am fost luat în toamna următoare în gazdă de un frate al naşului meu şi dus la Şcoala primară de Roşu No. 1 care era puţin mai la Nord de actualul pod al Senatului. Acolo am terminat Şcoala primară fiind dat în anii următori pe la diferite gazde, unele la peste 2 km depărtare de şcoală.

După terminarea Şcoalei Primare am dat concurs pentru Şcoala Comercială din Bulevardul Domniţei. Nu am luat Calea Liceului, căci nu aş fi putut ajunge la o situaţie mai bună decât după 10 ani de studii până la terminarea unei Facultăţi, pe când Şcoala de Comerţ cerea pe atunci o muncă mai intensă, însă se putea termina în 5 ani, după care puteam găsi o ocupaţiune prin care să ajung să îndeplinesc astfel mai repede dorinţa tatălui meu de a ajuta pe mama. De fapt, ajutorul a venit şi mai repede, căci la acea Şcoală s'au înfiinţat burse în bani care cu puterea de cumpărare de pe atunci echivalează cu aproape 2000 lei lunar din ziua de azi. Prin concurs am luat şi eu o asemenea bursă pe care o duceam întreagă acasă. Bursa am păstrat-o, pe baza mediilor mari, până la terminarea Şcoalei. Vara apoi nu stăteam de geaba, ci făceam practică de comptabil strângându-mi unele sume care îmi erau de mare folos pentru întâmpinarea cheltuelilor din anul următor. Cât am fost în acea Şcoală am fost găzduit de un alt frate al naşului meu ce domicilia în Strada Câmpineanu, şi apoi în Strada Ştirbei Vodă, iar mai în urmă în casele pe care mama cu o soră a tatălui meu au reuşit să le cumpere în Bucureşti şi în care locuesc şi azi

La terminarea Şcoalei Comerciale unii din profesorii mei mi-au oferit locuri de comptabil în Bucureşti. M'am dus însă comptabil la moşia la care fusese administrator tatăl meu, întru cât acolo, deşi eram plătit mai puţin, totuşi puteam agonisi mai mult căci mi se dădea locuinţa şi întreţinerea şi-mi puteam ajuta mai mult familia. In timpul iernii am stat la ţară, şi cum nu aveam ce face acolo, mi-a venit în gând să mă pregătesc pentru Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele. Am refăcut cunoştinţele de matematici învăţate în Şcoala Comercială, am făcut foarte multe exerciţii şi probleme şi am învăţat singur trigonometria după cartea lui GHEORGHE CONSTANTINESCU, fost profesor la Craiova. Toamna m'am prezentat la concursul de admitere în Anul Preparator şi am reuşit. Sumele pe care le economisisem până atunci, împreună cu unele meditaţiuni, mi-au servit pentru a face faţă cheltuelilor din acel an. Veneam aci la Şcoală pe jos dimineaţa din Strada Căluşei şi mă întorceam numai seara, tot pe jos, căci drumul cu tramvaiul pe la St. Gheorghe revenea la vreo 20 de lei de azi! Vara am mai făcut în vacanţă pe comptabilul, iar în Septemvrie am dat concurs pentru Anul I, reuşind primul la clasificaţie, rang pe care l-am păstrat tot timpul, şi care mi-a asigurat un loc în Internatul Şcoalei. In Iunie 1894 am terminat Şcoala cu o medie care nu se mai realizase până atunci şi care nu a mai fost întrecută decât la 10 ani după aceea.

Ţin să spun că dela etatea de 10 ani până la etatea de 24 ani când am ieşit inginer, nu am avut pe nimeni altul decât pe profesorul din clasă care să-mi arate sau să-mi explice ceva; de meditatori nu putea încăpea vorba. In schimb pentru a-mi putea ajuta familia şi a face faţă cheltuelilor ce nu ni se dădeau dela şcoală ca interni, dădeam meditaţiuni şi făceam unele lucrări. Cu toate acestea am mai găsit timpul ca să redactez cursul de mecanica raţională al profesorului GHEORGHE KIRILOV, partea II-a a cursului de rezistenţa materialelor al Profesorului CONSTANTIN MĂNESCU (prima parte o avea tipărită) şi am tradus Tratatul de Poduri de lemn al lui E. WINKLER, care au fost litografiate cu concursul altor colegi, printre cari şi D-l TANCRED CONSTANTINESCU, care e aci de faţă.

* * *

Cu toate că sărbătorirea de azi s'a extins, dela activitatea mea profesorală, cum se pornise, şi la activitatea mea inginerească şi culturală, să-mi daţi voie să nu vă vorbesc de aceste două din urmă din lipsă de timp, ci numai despre profesorat şi chestiuni în legătură cu acesta.

La terminarea Şcoalei nu am avut nicio grijă de a-mi căuta vreo ocupaţiune, căci încă cu un an înainte, după examenul general de Poduri din Anul III, ilustrul meu profesor ANGHEL SALIGNY, mulţumit de răspunsurile pe care i le-am dat, mi-a spus că la terminarea Şcoalei mă va lua în Serviciul său pentru construcţia liniei ferate Feteşti-Cernavoda. In 1894 am intrat în acel Serviciu, iar după inaugurarea Podului peste Dunăre am fost trecut la Serviciul Podurilor Căilor Ferate. In această calitate am fost şi în streinătate, 6 luni în Franţa şi 6 luni în Germania pentru controlul construcţiunii unor poduri şi recepţiunea lor.

In anii 1897—1898 am suplinit catedra de matematici dela Şcoala de Telegrafie, iar în Februarie şi Martie 1898 am urcat pentru prima dată treptele unei catedre în Invăţământul Tecnic Superior ca suplinitor al profesorului CONSTANTIN MĂNESCU, care era bolnav. Printre elevii pe care i-am avut atunci vă menţionez pe actualii colegi C. BUŞILĂ şi D. GHERMANI.

In Februarie 1902, CONSTANTIN MĂNESCU părăseşte catedra de Rezistenţa Materialelor spre a-şi regula drepturile la pensie. Ministrul de Lucrări Publice de pe atunci, IONEL I. C. BRĂTIANU, sub ordinele căruia lucrasem la studiile podului de peste Siret la Barboşi, la construcţia gării din Râmnicul Sărat şi la „Buletinul Societăţii Politecnice", mi-a încredinţat mie suplinirea catedrei până la numirea unui titular, spunându-mi la prezentare ca să caut să strălucesc în strălucirea Şcoalei. In toamnă, când urma să se numească un titular, mi s'a propus să schimb acea catedră cu catedra de Proiecte. Aceasta era pe atunci rău organizată: toate desenele, epurele, lucrările grafice şi proiectele dela Anii I, II, III şi IV erau încredinţate unui singur profesor. Acesta nu avea niciun ajutor, aşa încât el nu putea urmări, nu putea controla şi nu putea nota pe elevii din toţi anii. Notele le dădeau adesea ori subalterni ai lui, care nici nu călcaseră prin Şcoală. Am găsit odată proiecte date spre cercetare unui inginer dela Docurile din Galaţi. Din această cauză erau mai bine cotate proiectele care reprezentau, pe poduri,

trecând vehicule şi perechi de amorezaţi aplecaţi spre parapete şi privindu-se în reflexul apelor, decât cele la care curba de presiune se apropia mai bine de fibra mediană! Să-mi daţi voie să nu vă pronunţ numele acelui profesor, căci cu toate situaţiunile şi onorurile pe care i le-a dat ţara noastră, a lucrat făţiş în contra intereselor ei în timpul pregătirii ultimului nostru războiu şi al ocupaţiunii germane şi a fugit din ţară odată cu trupele inamice.

Schimbul de catedre propus nu l-am acceptat, întru cât, pe de o parte nu eram specialist în toate ramurile tecnice şi pe de alta îmi dădeam seama că acea catedră era foarte încărcată pentru un singur om, mai ales că fiind slab plătită se cerea profesorului să mai ocupe şi altă funcţiune. Motivul dat de mine nu a părut plauzibil şi atunci schimbul s'a făcut numindu-se un profesor de Proiecte, iar, pentru ca eu să nu rămân pe din afară, am fost trecut din oficiu la catedra vacantă de caligrafie şi desemn dela Şcoala de Conductori-Desemnatori, pe atunci Secţia II a Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele.

Cum am primit numirea am şi demisionat pe ziua numirii, arătând pe petiţiune cam de ce fel de caligrafie sunt capabil! Secretar General al Ministerului de Lucrări Publice, de care depindea pe atunci Şcoala, era N. HERJEU, fost profesor al meu care m'a chemat şi a insistat să-mi retrag demisiunea, căci Ministrul are să fie foarte supărat când va vedea că i s'a recomandat numirea unui incapabil. Eu însă nu am renunţat la demisiune. Am fost apoi solicitat în acelaşi sens şi de ANGHEL SALIGNY, care îmi era director de serviciu, dar nu am revenit. Am fost atunci trimis la nişte studii pe Dunăre în judeţul Tulcea, unde am stat vreo două săptămâni. La întoarcere am găsit o numire de profesor la Secţiunea I a inginerilor pentru lucrări de statică grafică, de rezistenţa materialelor, de hidraulică şi pentru proiecte de poduri. La Aprilie 1903 am fost numit titularul acestei catedre pe care am ţinut-o până la 1914. In acest timp am mai suplinit deseori catedra de poduri a lui ANGHEL SALIGNY şi am făcut, ajutat de D-l G. FILIPESCU, pentru prima dată un curs complect de beton armat. Conferinţe şi proiecte făcusem însă din 1903.

Ca profesor de aplicaţiuni şi de proiecte am schimbat cu totul sistemul anterior, pe care-l criticasem peste tot, prin graiu şi prin scris, de când ieşisem inginer. Astfel, în „Buletinul Societăţii

Politecnice" din 1898, cu ocaziunea unei recenziuni făcute unei cărți de agrimensură, am scris următoarele:

„... *constatăm cu regret că mai în fiecare an se strecoară în corpul tecnic unii, nu numai venind din streinătate, dar și din Școala noastră de Poduri și Șosele (chiar cu diplomă) și cari sunt tot atât de puțin ingineri la ieșirea din Școală ca și la intrare. După mine unele din cauzele care contribuesc la aceasta sunt: lipsa de coeficienți pentru notele cursurilor importante, lipsa de coeficienți pentru mediile anilor superiori, lipsa, la examene, de compoziții afară din curs, și apoi prea marea importanță ce se dă desemnului față de numărul și de studiul proiectelor*".

O lipsă mare cu care ieșeau absolvenții, provenea din cauza acestei stări de lucruri, căci elevii dădeau mai multă atenție cursurilor ușoare, la care se puteau lua cu înlesnire note mari, neglijând proiectele care cereau timp mult și la care se lua notă mică. Apoi elevii simțind că proiectele nu se cercetează cu toată atenția, se ocupau mai mult de desemnarea lor decât de calculul și studiul lor. Din această cauză absolvenții întâmpinau la începutul carierii lor de ingineri dificultăți mari la facerea proiectelor și foarte rar se găsea câte unul care să îndrăznească să se apuce de întreprinderi, cât de mici. Lipsea încrederea că proiectele ce le elaborau erau complecte sau că studiul costului lucrărilor era bine făcut.

Să nu credeți că acestea le spun acum de ocazie. Iată ce am spus în 1905 la Banchetul Societății Politecnice cu ocaziunea unui toast pe care l'am ținut pentru antreprenorii români; cuvinte pe care le reproduc după sumarul publicat în Buletinul acelei Societăți:

„*Meritele corpului tecnic român ce depinde de Ministerul Lucrărilor Publice au fost de mult recunoscute. In documentul pe care Maiestatea Sa Regele Carol I l'a zidit la podul de peste Dunăre, El zice: „Mulțumită râvnei și măestriei inginerilor români am trecut pe deasupra valurilor celor două brațe ale Dunării mărețe". Am ajuns astfel la Marea Neagră unde am făcut diguri care sparg valurile ei. Ne-a rămas azi să facem o lucrare mare și patriotică: să îndiguim România în contra valurilor streinătății care tind să ne inunde pe terenul tecnic și economic.*

Lucrul acesta nu se poate obține numai dela inginerii Statului; ne trebuesc și antreprenori români fără care nu ne putem dispensa de a recurge la streini. Pentru aceasta trebue să luptăm cu toții la formarea lor. Ca profesor al Școalei de Poduri și Șosele caut să dau elevilor cunoștințe în această direcțiune. La proiectele ce le fac, le cer să caute soluțiunile cele mai avantagioase, să facă comparații de cost, măsurători amănunțite, comenzi de materiale, etc. Exemple de ce pot face antreprenorii români nu lipsesc... Doresc ca ei să meargă pe această cale și să prospere cât mai mult".

(Va urma).

O EDIȚIE A COMPENDIULUI LUI CH. WOLFF

(Urmare dela pagina 123 și sfârșit).

Elementa Arithmeticae (pag. 1 — 46) cuprinde numerarea, cele patru operațiuni, raporturi și proporții, fracții, rădăcini patrate și cubice și în sfârșit regula de trei. Felul de tratare al materialului e riguros dar prea sec și conține prea puține exemple. De altfel, lipsa de exemple și îndeosebi de exerciții este caracteristică pentru manualele din acea epocă, din toate țările.

Lui WOLFF i se datorește introducerea ca semn al înmulțirii a punctului, «semnul înmulțirii să fie numai un singur punct (.)» (pag. 16). Mai sunt de remarcat semnele pentru proporții: «Numerele care se află în proporție aritmetică se scriu astfel 3 . 5 ∴ 6 . 8, sau mai bine, după mine 3 — 5 = 6 — 8, care în cea geometrică se orânduesc în felul următor 3 . 12 :: 5 . 20, sau, mai bine, cu D-l LEIBNIZ 3 : 12 = 5 : 20» (pag. 22). Notația *a. b :: c . d* se știe că a fost introdusă, pentru proporția geometrică, de englezul OUGHTRED și se întrebuințează și azi în Anglia. In Europa însă a rămas notația lui LEIBNIZ. In ce privește numirea de proporție aritmetică, ea a dispărut, fiind superfluă.

In *Elementa Geometriae* (pag. 47 — 145 și VIII tabele) aflăm, după cum spune însuși autorul în alt loc, «sâmburele lui EUCLID», adică noțiunile fundamentale de geometrie plană și în spațiu. Acest capitol cuprinde o mulțime de aplicații practice, ceea ce a fost desigur unul din motivele pentru care LAZĂR l-a tradus în întregime.

Elementa Trigonometriae cu un *Appendix* (pag. 146—162 şi o tabelă) cuprinde noţiunile fundamentale de trigonometrie, definiţia logaritmilor având foarte puţine exemple şi în total 7 probleme practice.

Elementa Algebrae (pag. 164—205) se ocupă cu cele patru operaţiuni cu mărimi algebrice, puteri, rădăcini, numere iraţionale, rezolvarea ecuaţiilor de gradul întâiu, progresii aritmetice şi geometrice. Autorul stabileşte mai întâi 22 de teoreme «cu care trebue să se familiarizeze cel care voieşte să citească scrierile matematicienilor, sau doreşte ca el singur să descopere adevărurile matematice» (pag. 188). E interesantă şi eliminarea completă din algebră a semnului de înmulţire «vulgar» $\times$. Intr'adevăr, la pag. 164 citim: » «Dacă avem de înmulţit pe a cu b, produsul se va scrie ab, sau $a.b$, sau $a \times b$. De ultimul semn nu ne vom folosi niciodată». Acest capitol mai conţine raporturi armonice, medii proporţionale, ecuaţii de gradul al doilea, ba chiar câteva exemple simple de ecuaţii de gradul al treilea.

In *Elementa Mechanicae* (pag. 206—250 şi III tabele) autorul ne dă o mecanică practică. Incepe cu noţiunea de forţă, cu care ocazie nu uită să dea, — după LEIBNIZ, — definiţia forţei vii şi a forţei moarte; anume, dacă sub influenţa unei forţe «se produce o mişcare, forţa se numeşte *vie;* dacă însă ponderea e numai susţinută, forţa se numeşte *moartă* sau *susţinătoare*» (pag. 207). Urmează studiul diferitelor maşini simple: pârghia, şurubul, planul înclinat, roata cu sul, scriptele etc., apoi studiul centrului de greutate, al balanţei, iar ca lege fundamentală a mecanicei dă legea pârghiei. După cum vedem WOLFF crede că pentru învăţământ este de ajuns cunoaşterea staticei, neglijând complet dinamica.

Elementa Hydrostaticae (pag. 251—268) e o scurtă privire asupra vaselor comunicante, a principiului lui ARCHIMEDE şi a greutăţii lichidelor.

Noţiunile fundamentale ale aerostaticei sunt cuprinse în *Elementa Aerometriae* (269—283 şi o tabelă comună cu hidrostatica). Aflăm aici descrierea pompei pneumatice, a experienţelor cu tubul lui TORICELLI, a barometrului şi a termoscopului.

Capitolul *Elementa Hydraulicae* (pag. 284—301 şi 2 tabele) are tot un caracter practic. Conţine descrierea diverselor instrumente cari servesc la ridicarea apei, precum roata lui ARCHIMEDE, roata hidraulică, sifonul, pompa aspirătoare, etc.

Studiul opticei se împarte în *Elementa Opticae* (pag. 302—319), *Elementa Catoptricae* (pag. 320—331 şi o tabelă), după cari urmează *Elementa Perspectivae* (pag. 351 — 365 şi 3 tabele). *Optica* cuprinde propagarea luminei, reflexia, refracţia, ochiul şi dispersia luminei, în mod experimental. Nimic despre teoriile lui NEWTON sau HUYGENS. In *Catoptrică* găsim formarea imaginilor în oglinzi plane, concave, convexe şi conice. *Dioptrica* tratează formarea imaginilor în lentile concave şi convexe, apoi construcţia practică a unei lunete, a microscopului şi a lanternei magice. In *Perspectivă* autorul ne dă, prin exemple practice simple, elementele acestei ştiinţe.

Elementa Astronomiae (pag. 366—462 şi 4 tabele) le împarte WOLFF în două părţi. Partea întâia cuprinde *Astronomia Sphaerica*, în care «se arată cum se prezintă ochilor noştri universul privit de pe pământ». Partea a doua se ocupă cu *Astronomia Theorica*, în care «se consideră natura şi proprietăţile corpurilor din lume, adevărata structură a universului şi legile adevărate ale mişcării». Intâia parte ar corespunde astronomiei lui PTOLEMEU, a doua celei a lui COPERNIC. Indeosebi e interesantă partea a doua, care conţine o mulţime de date istorice şi în care se poate vedea cum se preda astronomia în Europa în veacul al XVIII-lea. Dau numai câteva exemple. Autorul, evident, admite sistemul lui COPERNIC, demonstrează că acesta nu e în contrazicere cu Sf. Scriptură şi respinge sistemul TYCHO DE BRAHE. Nu aflăm nimic despre teoriile lui DESCARTES, dar nici despre legile lui NEWTON. Dacă ţinem seama de faptul, că ediţia clujană a Compendiului a apărut la 60 de ani dela întâia ediţie germană şi după mai bine de 80 de ani dela apariţia Principiilor lui NEWTON, ne dăm seama că nici după un interval de timp aşa de lung ideile lui NEWTON nu se predau în liceele ardelene.

Despre Lună citim că «e un corp dens şi opac, care are mulţi munţi, văi şi mări» şi că «e înconjurată de atmosferă grea şi elastică, în care se ridică vapori cari sub formă de ploaie şi rouă recad într'ânsa».

Elementa Geographiae (pag. 463—481) se ocupă de figura şi mărimea Pământului şi Proprietăţile ce depind de acestea.

Elementa Chronologiae (pag. 482—503) ne iniţiază în «ştiinţa măsurării şi împărţirii timpului». Această parte corespunde la capitolul despre calendar din cărţile moderne de astronomie.

Elementa Gnomonicae (pag. 504 — 520 şi trei tabele) arată cum «să se construiască un orologiu solar în orice plan».

Urmează *Elementa Pyrotechniae* (pag. 522 — 536 şi o tabelă). Autorul aminteşte că alţii numesc această ştiinţă şi *Pyrobologia*, ea se mai numeşte şi *Artilleria*, «deşi sub această numire înţelegem în deosebi maşinile de război, cari se folosesc la asediul cetăţilor». Aflăm de aici cum se prepara praful de puşcă şi facem cunoştinţă cu artileria germană şi franceză din acea epocă. Un tablou ne indică lungimea, greutatea, calibrul, preţul, numărul cailor necesari la trasul diverselor feluri de tunuri, etc. Capitolul se încheie cu noţiuni sumare asupra bombelor, granatelor, petardelor şi a construirii pulberăriilor după VAUBAN.

Elementa Architecturae Militaris (pag. 537 — 582 şi 4 tabele) rezumă «ştiinţa apărării terenurilor, ca puţini să se poată apăra comod împotriva multor agresori». Acest capitol se împarte în patru părţi: Intâia cuprinde «regulele artei defensive», adică principiile generale ale apărării prin fortificaţii. Partea a doua arată cele două metode, cea veche şi cea nouă, a lui VAUBAN, pentru construirea cetăţilor. Partea a treia se ocupă cu fortificaţiile neregulate şi cu întăriturile mai mici. In sfârşit, partea a patra învaţă arta de a asedia şi de a apăra o cetate.

Compendiul lui WOLFF se încheie cu *Elementa Architecturae Civilis* (pag. 583 — 659 şi 12 tabele). «Architectura civilă este ştiinţa de a concepe ideea unui edificiu şi apoi a-l construi astfel ca să corespundă întru toate scopului edificatorului». Capitolul se împarte în două părţi. Intâia se ocupă cu regulele generale ale architecturii, iar a doua cu «regulele speciale cari sunt a se observa în singuraticele părţi ale unui edificiu».

Un *Index* alfabetic (pag. 660 — 680) al numelor uşurează întrebuinţarea cărţii.

* * *

Vedem din cele de mai sus ce material bogat e tratat în acest Compendiu destinat să dea cunoştinţele necesare din domeniul «matematicei universale» tinerilor cari urmau cursul academic.

In ce priveşte folosirea acestei cărţi ca manual şcolar în liceele reformate ardelene, mai adaug că din hotărârile Comisiei dela 1769 amintită mai sus şi din «Methodus Studiorum» anexat

acestora aflăm că în «Quinta Classis Rethorica et Oratoria» se preda aritmetica, iar în «Septima Classis Graeca» se cerea «mathematica» după WOLFF. In programul celorlalte clase nu e specificat manualul, ci numai materia de predat, dar foarte probabil că în toate clasele de liceu se folosea Compendiul. Scopul însuşi pentru care s'a tipărit ediţia latinească clujană era, în primul rând, ca ea să servească de manual şcolar.

VICTOR MARIAN.

ASUPRA CURBELOR PLANE

1°. Fie F şi G punctele în care o dreaptă de direcţie constantă Δ întâlneşte curbele C_f şi C_g situate în acelaş plan, C locul geometric al intersecţiei tangentelor în F şi G. Vom stabili ecuaţiile parametrice ale curbei C într'un sistem de axe rectangulare cu OY de direcţie Δ.

Ecuaţiile curbelor considerate sunt:

$$(C_f) \quad y=f(x) \quad , \quad (C_g) \quad y=g(x)$$

x abscisa punctelor F, G.

Numind M intersecţia tangentelor duse în F şi G la C_f şi C_g,

$$(FM) \qquad Y-f(x)=f'(x)\,(X-x)$$

$$(GM) \qquad Y-g(x)=g'(x)\,(X-x)$$

de unde aflăm coordonatele punctului M:

$$\begin{cases} Y=\dfrac{f(x)g'(x)-g(x)f'(x)}{g'(x)-f'(x)} \\ X=\dfrac{f(x)-g(x)-x[f'(x)-g'(x)]}{g'(x)-f'(x)} \end{cases} \tag{1}$$

deci ecuaţiile parametrice ale curbei C.

2°. *Coeficientul unghiular al tangentei la curba* C.

Din (1) deducem :

$$\frac{dY}{dx} = \frac{(g'-f')(fg''-gf'')-(g''-f'')(fg'-gf')}{(g'-f')^2}$$

$$= \frac{(f-g)(g'f''-f'g)}{(f'-g')^2}$$

$$\frac{dX}{dx} = \frac{x(g'-f')(g''-f'')-(g''-f'')[f-g-x(f'-g')]}{(f'-g')^2}$$

$$= \frac{(f''-g'')(f-g)}{(f'-g')^2} .$$

Deci :

$$\boxed{\frac{dY}{dX} = \frac{g'(x)f''(x)-f'(x)g''(x)}{f''(x)-g''(x)}} . \qquad (2)$$

Este interesant de observat că $\frac{dY}{dX}$ se obține din Y derivând în raport cu x fiecare funcțiune f, g, f', g'.

3⁰. **Teoremă.** *Tangenta într'un punct de inflexiune al curbei* C_f *sau* C_g *este tangentă și în punctul corespunzător al curbei* C.

Fac excepție punctele de inflexiune I_f , I_g *ale curbelor* C_f , C_g *pentru care* I_f , I_g *are direcția* Δ.

Fie MT tangenta în M la curba C. Pentru un punct de inflexiune al curbei C_f ,

$$f''(x)=0 \quad \text{și după (2),}$$

$$\frac{dY}{dX} = f'(x) = \frac{df}{dx} .$$

Deducem astfel paralelismul dreptelor MT, MF, deci colinearitatea lor.

Analog se desfășoară raționamentul pentru $g''(x)=0$.

Dacă pentru același x

$$f''(x) = g''(x) = 0 \quad , \quad \text{dar } f(x) \neq g(x)$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{g'(x)f'''(x)-f'(x)g'''(x)}{f'''(x)-g'''(x)}$$

expresie în general determinată și diferită de $f'(x)$ sau $g'(x)$.

4°. *Raportul razelor de curbură ale curbelor* C_f , C_g *în* F, G. Numim R_f , R_g razele de curbură ale curbelor C_f , C_g în F, G.

$$\frac{R_f}{R_g} = \left[\frac{1+f'^2(x)}{1+g'^2(x)}\right]^{\frac{3}{2}} \frac{g''(x)}{f''(x)} \tag{3}$$

Apoi

$$\overline{MF}^2 = (X-x)^2 + [Y-f(x)]^2 = (X-x)^2[1+f'^2(x)]$$

$$\overline{MG}^2 = (X-x)^2[1+g'^2(x)]$$

deci

$$\frac{\overline{MF}^2}{\overline{MG}^2} = \frac{1+f'^2(x)}{1+g'^2(x)} . \tag{4}$$

Dacă notăm X' , Y' parametrii directori ai tangentei MT,

$$\sin \widehat{TMF} = \frac{X'f'(x) - Y'}{\varepsilon \sqrt{X'^2+Y'^2}\sqrt{1+f'^2(x)}}$$

ε se ia $+1$ sau -1 pentruca membrul II să fie pozitiv

$$\sin \widehat{TMG} = \frac{X'g'(x) - Y'}{\varepsilon \sqrt{X'^2+Y'^2}\sqrt{1+g'^2(x)}}$$

de unde,

$$\frac{\sin \widehat{TMG}}{\sin \widehat{TMF}} = \frac{X'g'(x) - Y'}{X'f'(x) - Y'} \sqrt{\frac{1+f'^2(x)}{1+g'^2(x)}}$$

şi înlocuind $\frac{dY}{dX}$ prin valoarea (2),

$$\frac{\sin \widehat{TMG}}{\sin \widehat{TMF}} = \frac{g''(x)}{f''(x)} \sqrt{\frac{1+f'^2(x)}{1+g'^2(x)}} \tag{5}$$

Multiplicând relaţiile (4), (5) şi observând relaţia (3) putem scrie

$$\boxed{\frac{R_f}{R_g} = \frac{\overline{MF}^2}{\overline{MG}^2} \frac{\sin \hat{TMG}}{\sin \hat{TMF}}} , \tag{6}$$

regăsim astfel relaţia obţinută pe altă cale de M. GENTRY în Nouvelles Annales de Math. 1883 pag. 237 — unde unghiurile nu sunt legate de curba C.

C. IONESCU-BUJOR.

PREMIUL „INGINER AL. ROȘU“

Subsemnații membri în comisiunea pentru decernarea premiului «Inginer AL. ROȘU», cercetând volumul XLI al *Gazetei Matematice* pentru a desprinde activitatea cea mai rodnică în domeniul geometriei elementare avută de către abonații elevi de liceu, studenți ai Facultăților, elevi ai Școalelor Politechnice și militare din țară, am constatat următoarele:

In cursul volumului XLI singurul articol de geometrie care să îndeplinească condițiile de mai sus este articolul D-lui ILIE ION ȚIȚEICA, elev clasa VIII-a la Liceul Militar dela Mânăstirea Dealu — apărut la pag. 473—7 și purtând titlul:

«Asupra unui triunghiu special».

D-l ILIE ION ȚIȚEICA a mai publicat:

La pag. 167 problema 4582, iar la pag. 263 problema 4609 amândouă de geometrie elementară.

Deasemenea a publicat la pag. 451 exercițiul No. 21.

Printre problemele rezolvate de D-sa, trebue să menționăm la pag. 642 problema 4608 întovărășită de o frumoasă observare, la pag. 538 problema 4422 întovărășită deasemenea de o interesantă notă precum și soluțiile geometrice foarte bune date problemelor 4354, 4374, 4383, 4419, 4436 și 4454.

Pentru această activitate avută în *Gazeta Matematică* în cursul anului XLI cu deosebire în domeniul Geometriei Elementare, Domnul ILIE ION ȚIȚEICA îndeplinește cu prisosință condițiunile premiului «Inginer AL. ROȘU».

In consecință am hotărît ca premiul «Inginer AL. ROȘU» în valoare de 500 lei să se acorde D-lui ILIE ION ȚIȚEICA, elev clasa VIII-a la Liceul Militar «N. Filipescu» dela Mânăstirea Dealu.

COMISIUNEA
PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „INGINER AL. A. ROȘU“:
GH. TH. GHEORGHIU, GH. ILIESCU,
AL. A. ROȘU.

Acest raport a fost citit și aprobat în ședința lunară dela 26 Noemvrie 1936.

RAPORT PENTRU PREMIUL „H. CAPRIEL“

Nu s'a prezentat nici o lucrare pentru acest premiu până la 1 Mai 1936, aşa că n'avem pe cine recomanda Onoratei Adunări pentru premiere.

COMISIUNEA :
I. BUŞILĂ, AL. PANTAZI,
OVIDIU N. ŢINO.

Acest raport s'a citit şi aprobat în Adunarea Generală din 25 August 1936.

NOTE MATEMATICE

15. *Exerciţiu de topologie elementară.* Se întâlneşte în multe geometrii şi culegeri de probleme de geometrie, exerciţiul următor: *Prin intersecţia* M *a două cercuri* O_1, O_2 *să se ducă o dreaptă* Δ, *care să taie cercurile în* A *şi* B *astfel ca lungimea* AB *să fie maximă sau minimă.*

Problema e foarte elementară şi se rezolvă uşor. — Nu i-am găsit însă nicăieri soluţia în diferitele cazuri de figură, cu alte cuvinte nu am găsit problema complet rezolvată din punct de vedere topologic, căci această problemă intra în cadrul acelora de care vorbeşte D-l Prof. G. ŢIŢEICA în articolul *Topologie elementară,* publicat la pag. 30, Vol. XLI *Gazeta Matematică.*

Imi propun aci să o rezolv complet, completându-i enunţul aşa ca Δ să fie construită cu condiţia ca suma sau diferenţa segmentelor MA şi MB să fie maximă sau minimă.

Se deosebesc două cazuri de figură.

Cazul I. O_1, O_2 *sunt de o parte şi de alta a corzii comune* MN.

1°. *Maximul şi minimul sumei* MA + MB. Fie C, D proecţiile lui O_1, O_2 pe AB şi E proecţia lui O_1 pe O_2D.

Avem:

$$S_1 = MA + MB = 2(MC + MD) = 2 \times O_1E.$$

Maximul lui S_1 depinde de maximul şi minimul lui O_1E şi de poziţia lui O_1E. In triunghiul dreptunghic O_1EO_2 maximul O_1E este

O_1O_2 când E este în O_2 şi minimul este zero, tot când E este în O_2 şi în acest din urmă caz O_2E devin peerpendiculară pe O_1O_2.

Rezultă:

$$max.\ S_1 = 2O_1O_2$$

şi are loc când Δ este paralelă cu O_1O_2.

$$min.\ S_1 = 2 \cdot MN$$

şi are loc când Δ se confundă cu MN.

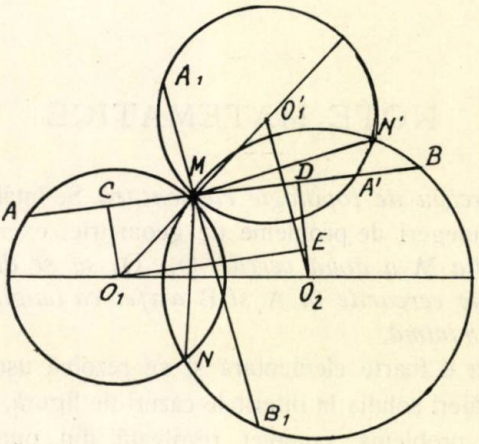


Fig. 1.

Cam aceasta este în general soluţia ce se dă problemei, lăsându-se la o parte cazul cel mai interesant, O_1 *şi* O_2 *de aceeaşi parte a lui* MN, şi care are alte rezultate.

Cazul II. O_1, O_2 *sunt de aceeaşi parte a lui* MN.

Trebue căutat maximul şi minimul sumei

$$S_2 = MA + MB$$

sau al lungimei A'B în care A' este simetricul lui A faţă de M. Locul lui A' este cercul O'_1 egal cu O_1 şi tangent lui O_1 în M. Fie N a doua intersecţie a cercurilor O_2, O'_1. De oarece O'_1 este simetricul lui O_1 faţă de M, este evident că O_2, O'_1 vor fi de o parte şi de alta a corzii comune MN.

Problema s'a readus la cazul I şi

$$max.\ S_2 = max.\ (MA + MB) = max.\ A'_1B = 2 \times O'_1O_2$$

şi are loc când Δ devine $A'_1 M$ paralelă cu $O'_1 O_2$,

$$max.\ S_2 = MA_1 + MB_1 = 2\ .\ O'_1 O_2$$

Apoi

$$min.\ S_2 = 2MN = NN'.$$

Se vede că direcţia lui Δ este alta decât în cazul I şi pentru maxim şi pentru minim.

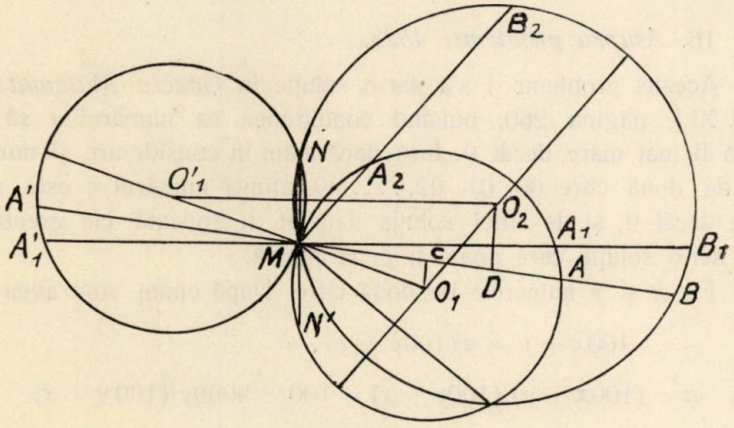


Fig. 2.

Să cercetăm acum maximul şi minimul diferenţei celor 2 segmente.

Cazul III, fig. 1. Fie

$$d_1 = MB - MA = MB - MA' = A'B$$

în care A' este simetricul lui A faţă de M. Locul lui A' este cercul O'_1 egal cu O_1 şi tangent cu el în M. Fie N' intersecţia lui O_2 cu O'_1. Evident că O_2, O'_1 sunt de o parte şi de alta a lui MN'. Şi atunci maximul şi minimul lui A'B se determină ca la cazul I.

$$max.\ d_1 = A_1B_1 = 2\ .\ O_2O'_1$$

unde A_1B_1 e paralelă cu $O_2O'_1$. Şi:

$$min.\ d_1 = 0$$

când Δ ia poziţia MN'.

Cazul IV, fig. 2. Suntem de la început în cazul I şi vom avea deci

$$max.\ d_1 = max.(MB - MA) = 2 \times O_1O_2 = A_2B_2$$

unde A_2B_2 e paralelă cu O_1O_2, iar:

$$min.\ d_1 = 0$$

pentru cazul când Δ se suprapune peste coarda comună MP a cercurilor O_1, O_2.

G-L GH. BUICLIU.

16. *Asupra problemei 4523.*

Acestei probleme i s'a dat o soluţie în *Gazeta Matematică,* Anul XLI, pagina 260, punând condiţiunea ca numărul n să nu poată fi mai mare decât 9. Insă dacă luăm în considerare şi numerele de două cifre 00, 01, 02, ..., 99, atunci numărul n este mai mare decât 9, şi de altfel soluţia dată ar fi aplicată cu greutate. Dau aci o soluţie care poate fi generalizată.

Fie x şi y numerele de două cifre. După enunţ vom avea:

$$100x + y = n(100y + x),$$

$$\therefore\ n = (100x + y)/(100y + x) = 100 - 9999y/(100y + x)$$

$$n = 100 - 9 \cdot 11 \cdot 101 \cdot y/(100y + x).$$

Din formele lui n se vede că dacă $x = y$, găsim $n = 1$, soluţii naturale; iar dacă $y = 0$, putem lua pentru x orice valoare mai mică decât 100, iar pentru n găsim 100 soluţiuni omise în soluţia dată.

Să cercetăm cazul când x şi y sunt oarecare. Putem să socotim pe x şi y primi între ei, căci în caz contrariu am simplifica cu cel mai mare divizor comun al lor şi formula lui n nu s'ar schimba. Deducem imediat că numitorul $(100y + x)$, care este prim cu y, trebue să fie un divizor al lui 9999 şi cum n trebue să rămână pozitiv trebue ca acest numitor să conţină neapărat factorul 101. Ori factorul 101 înmulţit cu orice număr de două cifre ne dă pentru numitor un număr de patru cifre în care avem $x = y$, soluţii găsite mai sus.

Rezultă deci că alte soluţii nu mai sunt.

Generalizare. Fie x şi y două numere de m cifre; valoarea lui n va fi:

$$n = 10^m - (10^{2m} - 1)\, y/(10^n y + x),$$

trebue deci ca $(10^n y + x)$ să fie un divizor al numărului $(10^{2m} - 1)$.

Pentru $m = 3$ găsim următoarele soluţii:

1. — 331002 = 142 . 2331.
2. — 849002 = 298 . 2849.
3. — 367003 = 109 . 3367.
4. — 993006 = 142 . 6993.
5. — 547008 = 64 . 8547.
6. — 101010 = 10 . 10101.
7. — 641025 = 25 . 25641.
8. — 303030 = 10 . 30303.
9. — 221001 = 181 . 1221.
10. — 443001 = 307 . 1443.
11. — 663003 = 181 . 3663.
12. — 329004 = 76 . 4329.
13. — 291009 = 55 . 5291.
14. — 873015 = 55 . 15873.
15. — 857142 = 6 . 142857.
16. — 861003 = 223 . 3861.

E de remarcat că din soluţiile date găsim altele înmulţindu-le cu diverse numere, astfel ca numerele să rămână tot de şase cifre; aşa de exemplu soluţia (1) putem să o înmulţim cu 2 şi 3 şi găsim alte două soluţii; iar soluţia (6) o putem înmulţi cu orice număr de o singură cifră şi găsim alte opt soluţii.

Prof. GH. CONSTANTINESCU.

17. *Asupra problemei 4223.* In aceleaşi condiţiuni să luăm în locul punctului O, un punct oarecare P interior triunghiului. Avem:

$$\text{tr. } B\alpha A_1 \sim \text{tr. } A\alpha C \quad \text{şi} \quad \text{tr. } C\alpha A_1 \sim \text{tr. } A\alpha B.$$

$$(1) \quad \therefore \frac{\overline{\alpha A_1}}{\overline{\alpha C}} = \frac{\overline{BA_1}}{b} \quad \text{şi} \quad (2) \quad \frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha A}} = \frac{\overline{A_1 C}}{c}.$$

Inmulţind (1) cu (2) obţinem:

$$(3) \quad \frac{\overline{\alpha A_1}}{\overline{\alpha A}} = \frac{\overline{BA_1} \cdot \overline{CA_1}}{b \cdot c}.$$

In mod analog obţinem:

$$(4) \quad \frac{\overline{\beta B_1}}{\overline{\beta B}} = \frac{\overline{B_1 C} \cdot \overline{B_1 A}}{a \cdot c} \quad \text{şi} \quad (5) \quad \frac{\overline{\gamma C_1}}{\overline{\gamma C}} = \frac{\overline{C_1 A} \cdot \overline{C_1 B}}{a \cdot b}.$$

Deci :

$$\sum \frac{\overline{\alpha A_1}}{\overline{\alpha A}} = \frac{1}{abc} \Sigma a \cdot \overline{BA_1} \cdot \overline{CA_1}.$$

Ţinem seama de formula $abc = 4RS$, şi notăm cu S_1, S_2, S_3, S, suprafeţele triunghiurilor BA_1C, CB_1A, AC_1B şi ABC.

Putem deci scrie :

$$\sum \frac{\overline{\alpha A_1}}{\overline{\alpha A}} = \frac{1}{S}(S_1 + S_2 + S_3).$$

Fie $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}$ şi $\overline{AA_2}, \overline{BB_2}, \overline{CC_2}$ două grupe de ceviene isogonale, şi $S_1, S_2, S_3, S'_1, S'_2, S'_3$ supraf. triunghiurilor BA_1C, CB_1A, AC_1B, BA_2C, ... etc.

Se vede că $S_1 = S'_1$, $S_2 = S'_2$ şi $S_3 = S'_3$. Deci pentru amândouă grupele :

$$\sum \frac{\overline{\alpha A_1}}{\overline{\alpha A}}$$ ia aceeaşi valoare.

In cazul particular al problemei când $P \equiv O$, se arată uşor că $S_1 + S_2 + S_3 = S$. Isogonalul punctului O este H. Deci în cazurile $P \equiv O$ şi $P \equiv H$, avem :

$$\sum \frac{\overline{\alpha A_1}}{\overline{\alpha A}} = 1.$$

In cazul $P \equiv I$. Se vede că :

$$\sphericalangle A_1BC = \sphericalangle A_1AC = \sphericalangle A_1AB = \sphericalangle A_1CB = \sphericalangle \frac{A}{2}.$$

Vom aplica formula : $S = Ra \sin B \sin C$, şi obţinem :

$$S_1 = Ra \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2} Ra (1 - \cos A)$$

$$\Sigma S_1 = Rp - \frac{1}{2} R (a \cos A + b \cos B + c \cos C) = Rp - S = S\left(\frac{R}{r} - 1\right)$$

(Rel. entre les élém. d'un tr. H. VUIBERT, pag. 26).

Deci :

$$\sum \frac{\overline{\alpha A_1}}{\overline{\alpha A}} = \frac{R}{r} - 1.$$

In cazul $P \equiv G$ avem

$$\overline{\alpha B} = \overline{\alpha C} = \frac{a}{2}$$

$$\frac{\overline{A_1B}}{b} = \frac{\overline{\alpha B}}{A\alpha} = \frac{a}{2m_a} \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{A_1C}}{c} = \frac{\overline{\alpha C}}{\alpha A} = \frac{a}{2m_a}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\overline{A_1B}\cdot\overline{A_1C}\sin(B+C) = \frac{1}{2}\overline{A_1B}\cdot\overline{A_1C}\sin A$$

$$= \frac{abc}{8}\cdot\frac{a}{m_a^2}\sin A = \frac{abc}{16R}\cdot\frac{a^2}{m_a^2}$$

$$\Sigma S_1 = \frac{abc}{16R}\sum\frac{a^2}{m_a^2} = \frac{4RS}{16R}\sum\frac{a^2}{m_a^2} = \frac{S}{4}\sum\frac{a^2}{m_a^2}.$$

Deci:

$$\sum\frac{\overline{\alpha A_1}}{\overline{\alpha A}} = \frac{1}{4}\sum\frac{a^2}{m_a^2}.$$

Considerând tr. ABC fix, iar P interior triunghiului se vede că maximum lui $\sum\frac{\overline{\alpha A_1}}{\overline{\alpha A}}$ are loc în cazul $P \equiv I$, căci atunci avem maximum pentru fiecare din suprafeţele S_1, S_2 şi S_3.

Considerând rezultatele în cazurile $P \equiv H$, $P \equiv I$, $P \equiv G$ putem scrie:

$$\frac{R}{r} - 1 \geqslant 1 \quad \text{(cunoscută sub forma } R \geqslant 2r\text{)}.$$

şi

$$\sum\frac{a^2}{m_a^2} \leqslant 4\left(\frac{R}{r} - 1\right)$$

egalităţile având loc în cazul $H \equiv I \equiv G$ (tr. echilateral).

Deasemenea putem scrie în general:

$$\sum\frac{\overline{\alpha A_1}}{\overline{\alpha A}} \leqslant \frac{R}{r} - 1.$$

oricare ar fi punctul P interior triunghiului.

N. N. ALDEA.

18. Articolul *„Câteva simple observaţiuni asupra teoremei lui* «VAN VLECK» publicat în *„G. M.“*, Nr. 3, Anul XLII trebue citit astfel:

Primele 25 rânduri ale paginei 126 se vor continua cu ecuaţia din rândul al treilea al paginei 128 urmărind apoi textul până la aliniatul (*b*) al paginei 129. După ce acest aliniat se va completa în modul următor:

..., atunci ecuaţia ce se obţine are p *rădăcini inferioare în modul rădăcinii pozitive a ecuaţiei:*

se va trece din nou la pagina 126, care începând cu ecuaţia dela rândul 26 se va citi până la finele ei.

Punctul (5⁰) *„Aplicaţiuni“* trebue urmărit astfel: după parcurgerea primelor două rânduri dela pagina 128 se trece direct la tabelul de la pagina 129, continuând textul până la finele articolului.

LT.-COMANDOR GH. NICULESCU.

19. *Asupra problemei 4544,* Vol. XLII, pag. 46.

Printre rezolvitorii acestei probleme s'au omis a se trece şi D-nii: AMĂRĂŞTEANU MARCEL, APOSTOL V. RADU, ARDELEANU GH. D., BOGDAN GR. I., BUCUR N. VIRGIL, BUZINCU I. I., CEAUŞESCU VASILE, CIUCĂ I. I., COJOCARU P. PETRU, COTESCU C., GRUMĂZESCU MIRCEA, CSEKE VILHELM, DAN MARIN, DOBRESCU ANDREI, DOBRESCU PAUL, ENACHE D. I., FLORESCU VICTOR, IANCULESCU OCTAV, IONESCU DUMITRU, MIHALCEA ST. D., NEGREA A. L. M., POSTELNICESCU C. M. şi ŢIŢEICA IOAN ILIE.

A. A. R.

20. După ce am trimis spre publicare soluţia problemei 4338, însă înainte de a fi apărut în Gazetă, am primit o bună soluţie pentru această problemă dela D-nul CHIRIŢĂ MIHAIL, elev la Şcoala de Ofiţeri Marină din Constanţa.

GH. V.

21. La problema 4669, s'a mai primit soluţii de la D-nii: COJOCARU P. PETRE (lic. mil. Iaşi), GAVRILESCU N. CONST. (Şc. pregăt. ofiţeri, Bucureşti) şi POPOVICIU GAVRIL (elev inginer Bucureşti).

N. N. MIHĂILEANU.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Vol. CXXII. Fasc. IV. Octomvrie 1936. Buenos Aires. Extinderea metodei de sumare a D-lui BOREL la seriile de funcţiuni de variabilă complexă dualã şi hiperbolică, de J. C. VIGNAUX. Matematica şi poezia, de JOSÉ BABINI.

Boletin Matematico. Anul IX. Nr. 7. Septemvrie 1936. Buenos Aires. Consideraţiuni asupra mecanicei vectoriale şi relativiste pentru mediile deformabile, de T. VESCAN. Contribuţiuni la studiul triunghiului, de B. I. BAIDAFF.

Buletinul „I. R. E." Anul IV. Nr. 3. Septemvrie 1936. Bucureşti.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XLII. Nr. 9. Partea I. Septemvrie 1936. Menasha, Wis.

Idem. Vol. XLII. Nr. 9. Partea II. Septemvrie 1936. Menasha, Wis. Lista membrilor.

Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliquées de l'Ecole polytechnique Roi Carol II. Bucarest. Fasc. 16, 17, 18. VI Année (1934 — 1935) No. 1, 2, 3. (Volume dédié au Professeur ION IONESCU).

Modification produites dans le mouvement d'un systèmes, par l'introduction brusque de nouvelles liaisons, par A. G. IOACHIMESCU. Une identité entre nombres complexes et un théorème de géométrie élémentaire, par D. POMPEIU. Sur quelques propriétés affines, par G. TZITZEICA. Le travail des forces électrostatiques ; tension et répulsion des lignes de force, par N. VASILESCU-KARPEN. Calcul des cadres, par GH. FILIPESCU. Sur l'attraction d'un électroaimant déformable, par D. GERMANI. Les harmoniques de tension et de courant sont-ils une réalité physique ? par C. BUDEANU. Sur le diametre économique d'une conduite de refoulement, par H. THEODORU. Note sur l'approximation des systèmes statiquement indéterminés, par A. BELEŞ. Le calcul avec les quantités complexes en géometrie et en électricité par E. ABASON. Profils longitudinaux d'égale visibilité dans la construction des salles de spectacle, par CR. MATEESCU. Sur le degré d'encastrement des poutres, par D. HANGAN. Une propriété caractéristique du paraboloïde de rotation, par N. CIORANESCU. Sur un théorème de géométrie plane élémentaire, par AL. GUTZU. Lignes de champ magnétique autour d'une ramification de courants, par S. S. STEFANESCU. Zur Theorie rechtwinkliger geodetischer Koordinaten, par GH. GH. VASILIU. Sur les triangles trihomologiques et triorthologiques, par G. D. SIMIONESCU. L'aniversaire de la « *Gazette Mathématique* ».

Buletinul Societăţii Politecnice. Anul L. Nr. 7. Iulie 1936. Bucureşti.

Idem. Anul L. Nr. 8. August 1936. Bucureşti.

Gazeta Matematică. Supliment cu Exerciţii. Anul III. Nr. 1. 1 Octomvrie 1936. Bucureşti.

Idem. Anul III. Nr. 2. 1 Noemvrie 1936. Bucureşti.

Idem. Anul III. Nr. 3. 1 Decemvrie 1936. Bucureşti.

Journal de Mathematiques Élémentaires publie par H. VUIBERT. Anul LXI. Nr. 3. 1 Noemvrie 1936. Paris.

Idem. Anul LXI. Nr. 4. 15 Noemvrie 1936. Paris.

Mathesis. Vol. L. Nr. 8. Octomvrie 1936. Gembloux. Conicele în câmpul eliptic de drepte, de PAUL DELENS. Invarianţi proiectivi ai suprafeţei de intersecţie a două hipercoadrice din S_4, de GUSSENHOVEN. Asupra geometriei tetraedrului, de R. GORMAGHTIGH. Asupra trisecţiunii unghiului, $*^*_*$. Parametrul de distribuţie relativ la o generatrice a unei normale, de R. DEAUX. O nouă demonstraţie a formulei anuităţii constante, de CL. THIRY. Asupra unei generalizări a ecuaţiei lui LAPLACE bazată pe un sistem de numere hipercomplexe. Funcţiuni olomorfe de o variabilă hipercomplexă, de L. BRUWIER.

Pitagora. Anul II. Nr. 2. Noemvrie 1936. Craiova. Formule trigonometrice, de V. POSTOLACHE.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVI. Nr. 9. Noemvrie 1936. Timişoara. Soluţii întregi ale ecuaţiei $x^2 \pm y^2 = a\,10^n$, de GH. CONSTANTINESCU.

Sphinx. Revue mensuelle des questions récréatives. Anul VI. Nr. 12. Decemvrie 1936. Bruxelles.

Ştiinţă şi Progres. Revista ştiinţifică a liceelor militare. Anul III. Nr. 6. Noemvrie 1936. Târgu-Mureş. Asupra determinanţilor, de N. N. MIHĂILEANU.

O. BOSŮVKA. II. Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante. *(Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk).* Brno. 1935.

O. BOSŮVKA. III. Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante. *(Publications de la Faculté des Sciences de l'Universite Masarik).* Brno. 1935.

GENERAL SC. PANAITESCU. Coordonatele geografice ale oraşului Iaşi. *(Academia Română, Memoriile secţiunii ştiinţifice. Vol. XII. Seria III).*

GH. POPESCU-BOTOŞANI. Problemele actuale asupra motorului de aviaţie. *(Extras din « Revista Aeronautică »).*

N. TEODORESCO. La dérivèe aréolaire (Publicată în Annales roumains de Mathèmatiques. Cahier 3). Bucureşti 1936.

CERERI

Răspuns la Cererea No. 258.

a) *Soluţie pentru firi prozaice:*

Dar o ştim, e număr important ce trebue iubit
Din toate numerele însemnate diamant neasemuit
Cei ce vor temeinic asta preţui
Ei veşnic bine vor trăi.

b) *Soluţii pentru firi romantice:*

Sus e lună
O zeiţă fermecată
Ce nebună
Peste apă trece supărată.
Cântecile toamnei parfumate
Mor de dor,
Legănate
Uşor.
Visuri de iubire
Spre cer sbor.

Ambele dau 25 zecimale.

AL. I. STOENESCU.

*

Aşa o lume o crede
Progresul şi elanul spori,
Cel antic geometru ARCHIMEDE
Arătând socotirea lui «*pi*»
Din raportul cerc — birază.

Aceste versuri dau 20 zecimale.

Iată alta spre a cunoaşte 12 zecimale pentru *e:*

Pe numărul «*e*»
Savantul îl stimează
E — academic şi formează
Bază pentru logaritmi.

Prof. FLORICĂ CĂMPAN
Cernăuţi.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii

LE CHEVALIER FRANÇOIS FAÀ DE BRUNO. Théorie générale de l'élimination. Paris 1859.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Divagazioni su di un celebre problema della meccanica celeste. Florența 1912.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2469. A, B, C *fiind unghiurile unui triunghiu variabil în care avem:*

$$\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C = \text{const.},$$

să se găsească maximul și minimul expresiei:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C.$$

L. LUCA.

Evident că maximul expresiei cerute, are loc când unul din unghiuri este drept, căci $\operatorname{tg} 90^0 = \infty$, deci când triunghiul dat este dreptunghic. Valoarea acestui maxim este infinit.

Să notăm acum expresia dată cu E, avem:

$$E = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A . \operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C = \frac{1}{\operatorname{cotg} A . \operatorname{cotg} B . \operatorname{cotg} C}.$$

(*Culegere de Probleme de Trigonometrie,* revăzută și adăugată, 1936, pag. 21, exer. 10).

Minimul lui E are loc, când produsul $\operatorname{cotg} A . \operatorname{cotg} B . \operatorname{cotg} C$ este maxim.

Ori cum suma $\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C$ este constantă, rezultă, după o teoremă cunoscută din algebră, că produsul este minim, când avem:

$$\operatorname{cotg} A = \operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} C,$$

adică:

$$A = B = C = 60^0,$$

deci când triunghiul este echilateral.

Minimul lui E este:

$$E_{min} = 3 \operatorname{tg} 60^0 = 3\sqrt{3}.$$

Soluţii date de D-nii: CĂLINESCU I. AURELIAN (Zimnicea), CONSTANTINESCU G. G. (Tecuci), DOBRESCU M. FILIP-BĂBICI, FLORESCU M. ULPIU (Craiova), GEORGESCU I. C-TIN (Craiova), GHEORGHIU C. ADRIAN, MARGULIUS MARIUS (Bucureşti), MĂNESCU I. (Bucureşti), MAVRODIN D. (lic. Eminescu, Bucureşti), POPOVICIU TIBERIU şi SAGER N. IANCU.

V. A.

PROBLEMA 3684. *Triunghiul* T′ *complimentarul lui* ABC *este omologic cu triunghiul* T_1 *format de centrele cercurilor exinscrise, centrul de omologie fiind punctul lui* LEMOINE *al triunghiului* T_1.

Să se arate că axa lor de omologie este perpendiculară pe dreapta care uneşte centrul de omologie cu centrul de greutate al perimetrului triunghiului de referinţă ABC.

C. IONESCU-BUJOR.

Notăm $I_a I_b I_c$, $A'B'C'$ triunghiurile T_1 T′ — A_b, A_c punctele în care $B'C'$ tae $I_a I_b$, $I_a I_c$ — B_a, B_c, C_a, C_b punctele analoage.

Cele şase puncte A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b *se află pe cercul lui* TAYLOR *al triunghiului* $I_a I_b I_c$.

Dacă luăm acest triunghiu ca triunghiu de referinţă, ABC este orticul său şi

$$\sphericalangle BA_cC' = \sphericalangle I_aBC = \sphericalangle A_cBC',$$

de unde

$$\overline{AC'} = \overline{C'B} = \overline{C'A_c}.$$

Cum triunghiul, în care mediana este egală cu jumătatea laturii corespunzătoare, este dreptunghiu, A_c este proecţia punctului A pe $I_a I_c$, deci un punct al cercului lui TAYLOR etc.

Notând

$$\alpha(A_b A_c, I_b I_c), \beta(B_c B_a, I_c I_a), \gamma(C_a C_b, I_a I_b),$$

din antiparalelismul dreptelor $A_b A_c$, $I_b I_c$ în unghiul I_a,

$$\overline{\alpha I_b} \cdot \overline{\alpha I_c} = \overline{\alpha A_b} \cdot \overline{\alpha A_c},$$

deci α se află pe axul radical al cercurilor TAYLOR şi $I_a I_b I_c$. Concluzie analoagă avem pentru β, γ. Dreapta $\alpha\beta\gamma$ este perpendiculară

pe dreapta care unește centrul O al cercului $I_a I_b I_c$ cu centrul T al cercului său TAYLOR. Dar $\alpha\beta\gamma$ este chiar axa de omologie a triunghiurilor T și T_1, OT conține și punctul lui LEMOINE k (centrul de omologie al celor două triunghiuri T și T_1, iar T este și centrul de greutate al perimetrului triunghiului ortic ABC. Problema este dovedită.

A soluționat problema folosind coordonate baricentrice D-l N. N. MIHĂILEANU, (Abrud 21. VI. 1933).

C. I. B.

PROBLEMA 3906. *Fie* ABC *un triunghiu oarecare și* M *un punct pe cercul său circumscris. Dreptele* BM *și* CM *întâlnesc laturile* AC *și* AB *în punctele* P *și* Q. *Să se demonstreze că.*

1°. *Există pe laturile* AC *și* AB *două puncte* I *și* J *astfel ca să avem:* $\overline{PI} \cdot \overline{QJ} = k$ *(const.).*

2°. *Dreapta* PQ *trece printr'un punct fix* N, *când* M *se mișcă pe cerc.*

Să se determine punctele I, J *și* N.

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluția I. Paralelele duse prin C la AB și prin B la AC retaie cercul circumscris în M_1 respectiv M_2. BM_1 taie pe AC în I și CM_2 taie pe AB în J.

1°. Pe figură avem:

$$\widehat{BQC} = 180^0 - \widehat{M_1CQ}$$

fiindcă aceste două unghiuri sunt interne și de aceeași parte a secantei CQ.

In patrulaterul inscriptibil M_1CMB, avem:

$$\widehat{M_1CM} = 180^0 - \widehat{M_1BM},$$

deci

$$\widehat{BQC} = \widehat{M_1BM} = \widehat{IBP},$$

sau:

$$\widehat{JQC} = \widehat{IBP}.$$

Se arată la fel că: $\overset{\frown}{JCQ} = \overset{\frown}{IPB}$. Deci triunghiurile JQC, IPB sunt asemenea, deci avem:

$$\frac{PI}{CJ} = \frac{BI}{QJ} \qquad \therefore \quad PI \cdot QJ = BI \cdot CJ = \text{const.},$$

căci produsul BI . CJ nu variază când M descrie cercul ABC.

CEZAR COŞNIŢĂ.

Triunghiul ABI este isoscel, căci $\overset{\frown}{ABI} = \overset{\frown}{ACM_1} = \hat{A}$, primele egale ca subîntinzând acelaşi arc şi ultimele, corespondente; deci $BI = AI = \frac{1}{2} AB \sec A$. Analog $CJ = AJ = \frac{1}{2} AC \sec A$, deci valoarea constantei:

$$BI \cdot CJ = AI \cdot AJ = \tfrac{1}{4} AB \cdot AC \cdot \sec^2 A.$$

2°. Paralela dusă din I la AB taie pe PQ în N şi paralela din J la AC taie pe PQ în N'; avem:

$$\frac{NQ}{NP} = \frac{AI}{IP} \; ; \; \frac{N'Q}{N'P} = \frac{QJ}{JA}$$

dar

$$PI \cdot QJ = BI \cdot CJ = AI \cdot AJ$$

sau

$$\frac{AI}{IP} = \frac{QJ}{JA}$$

deci N şi N' se confundă. Când M variază, dreapta PQ trece prin punctul fix N, al patrulea vârf al paralelogramului AIJN.

Trapezul BINJ este isoscel: $BI = AI = NJ$, deci

$$\sphericalangle BNI = \sphericalangle JIN = \sphericalangle BJI.$$

Pe de altă parte triunghiurile isoscele ABI şi ACJ, fiind asemenea — unghiul A, comun — dau $\sphericalangle AIB = \sphericalangle AJC$ şi patrulaterul BICJ este inscriptibil, deci

$$\sphericalangle BJI = \sphericalangle ACB \qquad \therefore \quad \sphericalangle INB = 180^0 - \sphericalangle ABN = \sphericalangle ACB$$

deci NB este tangenta în B la cercul ABC', analog se arată că NC' este tangenta în C şi punctul N se mai poate construi la intersecţia tangentelor în B şi C la cercul circumscris.

Soluţia II. Proprietăţile problemei se menţin în întregime, când se înlocueşte cercul cu o conică (C) *oarecare, circumscrisă triunghiului* ABC.

Punctele P şi Q se corespund într'o omografie specială pe bazele AC şi AB respectiv. In adevăr, ducând prin B o dreaptă oarecare, aceasta taie pe AC în P, iar conica (C) în încă un punct M distinct de B. Dreapta CM taie pe AB în un singur punct Q. Adică la un punct P pe AC, prin această construcţie evident algebrică, corespunde un singur punct Q pe AB. Analog se vede că la un punct Q pe AB, prin aceeaşi construcţie, corespunde un singur punct P pe AC.

Deci P şi Q se corespund omografic pe bazele AC şi AB. In această corespondenţă omografică, intersecţia A a bazelor îşi corespunde sieşi: ducând prin B dreapta BA, aceasta taie pe AC în A şi conica (C) în încă un punct A distinct de B; dreapta CA taie pe AB în un singur punct A. Deci în A sunt confundate, un punct P şi un punct Q.

Deci P *şi* Q *se corespund într'o perspectivă.*

Se ştie că atunci dreapta PQ trece printr'un punct fix.

Omoloagele punctelor dela infinit se obţin astfel: prin B se duce o paralelă la AC, aceasta taie pe AC în punctul P la infinit, iar conica (C) în M. Dreapta CM taie pe AB în J. Analog determinăm punctul I pe AC.

Se ştie că o corespondenţă omografică de puncte pe două baze, când se ia pe fiecare bază ca origine omologul punctului dela infinit de pe cealaltă bază, se scrie:

$$Axx' + B = 0.$$

Deci:

$$\overline{IP} \cdot \overline{JQ} = K \text{ (const.)} = \overline{IA} \cdot \overline{JA}.$$

Punctul fix N prin care trece dreapta PQ e intersecţia paralelelor duse prin I şi J respectiv la AB şi AC.

Sau: făcând punctul M să vină în C, în C vine şi P, dreapta CM devine tangenta în C la conica (C), iar Q e intersecţia ei cu AB. Deci tangenta în C la (C), e o dreaptă PQ; ea trece prin N. Analog se arată că tangenta în B la conica (C) e o dreaptă PQ şi deci trece prin N. *Atunci* N *e intersecţia tangentelor în* B *şi* C *la conica* (C).

AD. C. GHEORGHIU
Student, Bucureşti.

Soluții analoage date de CEZAR COȘNIȚĂ (Bârlad), MARIUS MARGULIUS (București) și N. N. MIHĂILEANU (Constanța).

Propoziția precedentă se poate arăta și altfel:

Dreapta AM taie pe BC în S; se observă că PQ e polara lui S față de conica ABC. Când M descrie conica, S descrie dreapta BC și deci polara sa PQ trece printr'un punct fix, polul dreptei BC: intersecția N a tangentelor în B și C la conica ABC.

AD. GHEORGHIU, CEZAR COȘNIȚĂ, N. N. MIHĂILEANU, S-LT. I. G. ZAMFIRESCU (Pitești) și C. P.

Corelativ. La punctele A, B, C corespund tangentele (A), (B), (C) la o conică (Γ). Punctului M corespunde o tangentă mobilă (M). Dreptelor MB și MC corespund intersecțile $\beta \equiv [(M), (B)]$ și $\gamma \equiv [(M), (C)]$. Dreptele ce se obțin unind intersecțiile $b \equiv [(A), (C)]$ și $c \equiv [(A), (B)]$ respectiv cu β și γ corespund respectiv punctelor P și Q. Dreptei PQ corespunde deci intersecția $U \equiv (b\beta, c\gamma)$ Dreapta PQ trece printr'un punct fix N; *deci punctul* U *descrie o dreaptă fixă* (N). Punctul N fiind polul dreptei BC, dreapta N e polara punctului $a \equiv [(B), (C)]$. Atunci:

Fie un triunghiu *abc* circumscris unei conice (Γ). O tangentă mobilă la aceeași conică taie pe *ac* în β și pe *ab* în γ. Intersecția $U \equiv (b\beta, c\gamma)$ descrie polara lui *a* față de conică.

Ceea ce direct se deduce ușor din teorema: Un patrulater circumscris unei conice are vârfurile două câte două pe laturile triunghiului diagonal al patrupunctului de contact; făcând să varieze tangenta la conică, una din laturile lui.

Generalizare. Consider punctul M descriind o conică (Γ) ce trece prin două din vârfurile triunghiului ABC, fie prin B și C. Fie și în acest caz P și Q respectiv intersecțiile lui AC și AB respectiv cu MB și MC. Se constată ușor că acum P *și* Q *se corespund într'o omografie propriu zisă.* Punctului A, considerat pe AC îi corespunde pe AB, a doua intersecție a sa, B', cu conica (Γ); iar considerat pe AB îi corespunde pe AC, a doua intersecție a sa, C', cu conica (Γ): *Deci dreapta* PQ *înfășoară o conică* (N) *tangentă în* B' *și* C' *respectiv la* AB *și* AC.

Se poate construi centrul și discuta această conică: Construim punctele I și J pe AC și AB respectiv omoloagele punctelor dela infinit de pe AB și AC. Paralelele duse prin I și J respectiv la AB și AC se taie în A' și sunt evident drepte PQ. Așa încât avem

paralelogramul AIA'J circumscris conicei (N) înfăşurate de PQ: intersecţia ω a diagonalelor lui este centrul acestei conice.

Dacă ω e la distanţă finită, iar B' şi C' în afara segmentelor AJ şi AI conica e o hiperbolă; iar dacă B' şi C' sunt în interiorul aceloraşi segmente conica e o elipsă. Constatându-se uşor că numai aceste două cazuri se pot ivi din egalitatea rapoartelor anarmonice:

$$(AJB'\,\infty) = (C'\,\infty\,AI)$$

de unde

$$\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'J}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'I}}\,.$$

Asimptotele conicei (N) sunt razele duble ale fascicolelor omografice de acelaşi vârf (ωP) şi (ωQ). (Şi acestea pot indica natura conicei).

Pentru ca înfăşurata (N) să fie o parabolă trebue ca dreapta dela infinit să fie o dreaptă PQ, adică punctul I să fie la infinit pe AC, căci atunci şi J e la infinit pe AB. Aceasta are loc dacă paralela lui C la AB tăind conica (Γ) în M_l, dreapta BM_l e paralelă cu AC. Deci pentru ca (N) să fie o parabolă trebue ca simetricul lui A faţă de mijlocul lui BC să fie pe conica (Γ).

Problema se poate discuta şi pentru diferite poziţii ale triunghiului ABC faţă de conica (Γ). De ex.:

Dacă A e polul lui BC faţă de (Γ) atunci conica (N) e bitangentă conicei (Γ) în B şi C.

Corelativ. Un triunghiu *abc* are laturile *ab* şi *ac* tangente la o conică (Γ). O tangentă mobilă la aceeaşi conică le taie respectiv în γ şi β. Intersecţia $U \equiv (b\beta\,,\, c\gamma)$ descrie o conică (N) tangentă în *b* şi *c* la celelalte tangente ce se duc din *b* şi *c* la conica (Γ).

AD. C. GHEORGHIU
Student Matematici.

Notă. Această din urmă corelativă şi o particularizare a ei, considerând *b* şi *c* punctele ciclice, fac obiectul Notei *«O definiţie a cercurilor directoare la conice»* a D-lui AD. GHEORGHIU, ce s'a publicat în „G. M." Vol. XXXVII, pag. 135.

PROBLEMA 4300 [1]). *Să se demonstreze că dacă* α, β *sunt axele elipsei lui* STEINER, *circumscrisă unui triunghiu de suprafață* S, *iar* ω *este unghiul lui* BROCARD *al acestui triunghiu, atunci:*

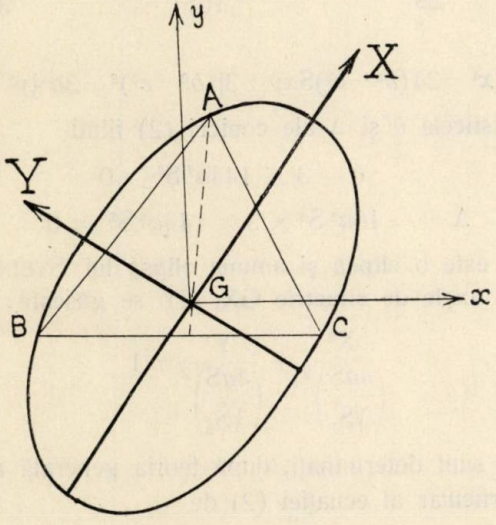
$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(\operatorname{cotg}\omega+\sqrt{3})}{2S}}\,.$$

I. C. VASILIU.

Prima soluție dată de D-l M. A. NEGREA (Brăila).

Fie $a>b>c$ laturile triunghiului ABC cu centrul de greutate în G. Iau ca axe de coordonate paralela Gx la BC și perpendiculara by pe BC. Elipsa lui STEINER este elipsa cu centrul în G și circumscrisă triunghiului ABC. Ecuația generală a unei conice raportate la două axe dreptunghiulare trecând prin centrul ei este:

$$x^2+2uxy+vy^2+w=0. \tag{1}$$



Ținând seamă de proprietățile medianei și ale înălțimei se găsește că A, B, C au coordonatele

$$A\left[\frac{b^2-c^2}{3a},\frac{4S}{3a}\right];\ B\left[-\frac{3a^2+b^2-c^2}{6a},-\frac{2S}{3a}\right];\ C\left[\frac{3a^2-b^2+c^2}{6a},-\frac{2S}{3a}\right].$$

1) Enunț rectificat în ce privește membrul II al egalității.

Scriind că A, B, C se găsesc pe conica (1), obţin următorul sistem de ecuaţii în u, v, w:

$$\frac{8(b^2-c^2)S}{9a^2}u+\frac{16S^2}{9a^2}v+w+\left(\frac{b^2-c^2}{3a}\right)^2=0$$

$$\frac{2(3a^2+b^2-c^2)S}{9a^2}u+\frac{4S^2}{9a^2}v+w+\left(\frac{3a^2-b^2+c^2}{6a}\right)^2=0$$

$$\frac{-2(3a^2-b^2+c^2)S}{9a^2}u+\frac{4S^2}{9a^2}v+w+\left(\frac{3a^2-b^2+c^2}{6a}\right)^2=0$$

pe care rezolvindu-l, obţin:

$$u=-\frac{b^2-c^2}{4S}\ ;\ v=\frac{(b^2-c^2)^2+3a^4}{16S^2}\ ,\ w=-\frac{a^2}{3}$$

aşa că (1) devine:

$$x^2-\frac{b^2-c^2}{2S}xy+\frac{(b^2-c^2)^2+3a^4}{16S^2}y^2-\frac{a^2}{3}=0$$

sau

(2) $48S^2x^2-24(b^2-c^2)Sxy+3[(b^2-c^2)^2+3a^4]y^2-16a^2S^2=0.$

Caracteristicele ∂ şi Δ ale conicei (2) fiind

$$\partial=3\times 144a^4S^2>0$$

$$\Delta=-16a^2S^2\times 3\times 144a^4S^2\neq 0$$

rezultă că (2) este o elipsă şi anume elipsa lui STEINER, pe care raportând-o la axele de simetrie GX, GY se găseşte:

(3) $$\frac{X^2}{\left(\frac{4aS}{\sqrt{S_1}}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(\frac{4aS}{\sqrt{S_2}}\right)^2}=1$$

în care S_1, S_2 sunt determinaţi, după teoria generală a conicelor şi după cazul particular al ecuaţiei (2) de

$$S_1+S_2=A+C=3[4a^2b^2-(a^2+b^2+c^2)^2+(b^2-c^2)^2+3a^4]$$

$$S_1\times S_2=\partial=432a^4S^2$$

sau ţinând seamă de relaţiunea:

$$a^2+b^2+c^2=4S\ \mathrm{cotg}\omega$$

(4) $$S_1+S_2=24a^2S\ \mathrm{cotg}\omega\ ;\ S_1S_2=432a^4S^2.$$

Mărimea axelor elipsei lui STEINER se scoate din (3) ţinând seamă de (4). Făcând calculele, găsim:

$$\alpha = \frac{8aS}{\sqrt{S_1}} \quad , \quad \beta = \frac{8aS}{\sqrt{S_2}}$$

prin urmare

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{8aS} = \frac{\sqrt{S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}}}{8aS}$$

sau ţinând seamă de (4) şi făcând calculele:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\,(\operatorname{cotg}\omega + \sqrt{3})}{2S}}$$

adică tocmai relaţia de demonstrat.

II. *Soluţie* dată de D-l M. A. NEGREA (Brăila).

Mă folosesc de rezultatele date în articolul *„Asupra axelor conicelor unui triunghiu"* dela pag. 417 *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVII unde se stabileşte, că pentru coordonate trilineare, semiaxele r ale unei conice circumscrise triunghiului ABC sunt date de ecuaţia:

$$(\alpha + \beta + \gamma)\,\Delta\, r^4 - 2\alpha\beta\gamma\,\Delta\left[\sum \frac{a^2}{\alpha + \beta + \gamma}\right] r^2 + 16S^2\,\alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0$$

unde:

$$\Delta = -\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 + 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2.$$

In sistemul trilinear, pentru elipsa lui STEINER avem

$$\alpha = \beta = \gamma = 1$$

aşa că ecuaţia precedentă devine:

$$27r^4 - 6\,(a^2 + b^2 + c^2)\,r^2 + 16S^2 = 0$$

pe care rezolvând-o şi făcând toate calculele pentru:

$$\alpha = 2r_1 \quad ; \quad \beta = 2r_2$$

se găseşte formula din enunţ.

PROBLEMA 4485. *Să se verifice egalitatea*

$$4\sin^2\frac{\pi}{9} + \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{9} = 2\,.$$

C. IONESCU-BUJOR.

Partea I a egalității se poate scrie succesiv

$$2\left[2\sin^2\frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{9}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{9}\right]$$

$$=2\left[2\sin^2\frac{\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9}\right]$$

$$=2\left[2\sin^2\frac{\pi}{9}+\cos 2\frac{\pi}{9}\right]=2\left[2\sin^2\frac{\pi}{9}+\cos^2\frac{\pi}{9}-\sin^2\frac{\pi}{9}\right]=2.$$

Au soluționat problema: D-ra BIBY UNTER (P. Neamț) și D-nii: M. F. AMĂRĂȘTEANU (Craiova), V. N. BUCUR (Ploești), V. CEAUȘESCU (Tg. Mureș), C. I. CHIRIAC și GR. MARTEȘ (Școala Navală), M. CHIRIȚĂ (Șc. of. marină), V. L. FLORESCU și I. I ȚIȚEICA (Lic. Mânăstirea Dealu), C. I. GHIȘOIU (student, București), O. S. IANCULESCU (Timișoara), D. IGNAT (Botoșani), I. V. IULIAN (Roman, P. MAZILU, M. A. NEGREA (Brăila), V. PĂDUREȚ, F. V. POPESCU (C.-Lung-Muscel), D. T. RADA (Arad), T. STOICESCU, — dela liceul militar Iași: V. G. BOGZA, I. S. BUZINCU, I. GR. BOGDAN, C. COTESCU, P. P. COJOCARU, C. I. DIMITRIU, D. DUMBRĂVESCU, V. D. ENĂȘESCU, C. N. GAVRILESCU, V. IONESCU, E. IORDACHE, S. KNALL, D. I. LEAHU, D. Ș. MIHALCEA, C. G. PRODAN, V. I. ȘIARA, F. E. VASILOSCHI, I. E. ZĂHĂRESCU, — de la liceul militar Cernăuți: N. P. BOITAN, V. D. CARAMAN, A. G. CEHAN, P. S. CRAIU, V. N. MOCANU, C. I. OPRAN, N. I. ROMAN, G. G. ROTARU, G. STĂNCIULESCU, M. D. VUSATIUC, G. ZGÂRCEA.

C. I. B.

PROBLEMA 4609. *Cevienele unui punct* P *din planul triunghiului* ABC *taie laturile* BC, CA, AB *și cercul circumscris triunghiului respectiv în* A_1, B_1, C_1 *și* A_2, B_2, C_2. *Se proiectează punctul* A_1 *în* α', α'' *pe* A_2B, A_2C. *Perpendiculara din* A_2 *pe* $\alpha'\alpha''$ *taie pe* BC *în* A_3. *Analog se obțin punctele* β', β'', B_3 *și* γ', γ'', C_3. *Să se arate că:*

1°. *Dreptele* AA_3, BB_3, CC_3 *sunt concurente.*

2°. *Care este condiția ca dreptele* $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ *să întâlnească laturile triunghiului* ABC *în trei puncte colineare?*

I. I. ȚIȚEICA

1°. Fie $AA' - A'$ pe BC — isogonala cevienei AP. Triunghiurile BA_2A_3 și BAA' sunt asemenea căci

$$\sphericalangle(BA, AA') = \sphericalangle(CA, PA) = \sphericalangle(BC, BA_2)$$

şi

$$\sphericalangle (AB, BC) = \sphericalangle (AA_2, A_2C) = \sphericalangle (A_1\alpha', \alpha'\alpha'') = \sphericalangle (BA_2, A_2A_3),$$

ultimele ca având laturile perpendiculare, celelalte din patrulaterele inscriptibile formate. Analog sunt asemenea triunghiurile CA_2A_3 şi CAA' deci

$$BA_3 \cdot BA' = AA' \cdot A_2A_3 = CA_3 \cdot CA'$$

însă isogonalele cevienelor concurente sunt deasemenea concurente deci A', B', C' sunt picioarele a trei ceviene concurente; relaţia precedentă arată că şi A_3, B_3, C_3 au aceeaş însuşire

$$\frac{BA_3}{CA_3} \cdot \frac{CB_3}{AB_3} \cdot \frac{AC_3}{BC_3} = \frac{CA'}{BA'} \cdot \frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{BC'}{AC'} = 1.$$

2°. Fie încă a', a'' proiecţiile lui A_1 pe AB, AC şi α intersecţia $a'\,a''$, $\alpha'\,\alpha''$. $A_1\,a'$ şi $A_1\,\alpha'$ sunt bisectoare în unghiurile $\alpha'\,a'\,a''$ şi $a'\,\alpha'\,\alpha''$ căci se urmăreşte succesiv egalitatea unghiurilor $\alpha' a' A_1$, $A_1 B \alpha'$, $a''\,AA_1$, $a''\,a'\,A$, patrulaterele $A_1 B a' \alpha'$ şi $AA_1 a' a''$ fiind inscriptibile. Rezultă că B şi A_1 sunt centrele cercurilor înscris şi exînscris în triunghiul $\alpha\,a'\,\alpha'$ deci α este pe BC.

Propoziţia enunţului este deci echivalentă cu cazul de colinearitate al intersecţiilor dreptelor BC, $a'\,a''$ şi analoagelor.

Insă

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{a' B \cdot a'' A}{a' A \cdot a'' C}$$

şi fiindcă punctele A_1, a', A, a'', şi piciorul înălţimii A_h sunt conciclice, $B a' \cdot BA = BA_1 \cdot BA_h$ şi $C a'' \cdot CA = CA_1 \cdot CA_h$; pe de altă parte, a, b, c fiind proiecţiile lui P pe laturi, $b\,c$ e paralelă cu $a'\,a''$ deci $a''A : a'A = bA : cA$ rezultă

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{BA_h}{CA_h} \cdot \frac{bA}{cA}$$

şi făcând produsul analoagelor, simplificând şi ţinând seamă că A_1, B_1, C_1 şi A_h, B_h, C_h sunt picioare de ceviene concurente, rezultă că

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{A b}{A c} \cdot \frac{B c}{B a} \cdot \frac{C a}{C b}$$

şi observând că dacă a e între B şi C, α e exterior şi invers rezultă că condiţia de colinearitate a punctelor α, β, γ este ca proiecţiile lui

P pe laturile a, b, c să fie picioarele a trei ceviene concurente deci P să aparţină cubicei DARBOUX a triunghiului.

Notă. Din relaţia precedentă se observă condiţia ca α, β, γ să fie picioarele a trei ceviene concurente; P să fie pe cercul circumscris: A_1 se proiectează pe B P, C P în α', α''; dreptele $\alpha'\alpha''$ şi analoagele taie laturile triunghiului ABC' după picioarele a trei ceviene concurente.

Soluţii foarte bune date de D-nii M. C. POSTELNICESCU (liceul militar „Mânăstirea Dealu") şi AL. D. STOICA (liceul „Marele Voevod Mihai" Bucureşti).

D-l POSTELNICESCU dă soluţie trigonometrică pentru 1° şi află

$$\frac{A_3B}{A_3C} = \frac{\sin A_2CB}{\sin A_2BC} \cdot \frac{\sin A_3A_2B}{\sin A_3A_2C} = \frac{\sin A_2AB}{\sin A_2AC} \cdot \frac{\sin B}{\sin C}$$

deci

$$\frac{A_3B}{A_3C} \cdot \frac{B_3C}{B_3A} \cdot \frac{C_3A}{C_3B} = \frac{\sin PAB}{\sin PAC} \cdot \frac{\sin PBC}{\sin PBA} \cdot \frac{\sin PCA}{\sin PCB} = 1,$$

iar pentru 2°

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{\cos B}{\cos C} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{\cos CAA_2}{\cos BAA_2}$$

şi găseşte condiţia

$$\frac{\cos PAB}{\cos PAC} \cdot \frac{\cos PBC}{\cos PBA} \cdot \frac{\cos PCA}{\cos PCB} = 1$$

care caracterizează cubica DARBOUX.

Intr'o a doua soluţie, D-l POSTELNICESCU, după ce recunoaşte că dreptele A_1A_2, A_2A_3 sunt izogonale în unghiul BA_2C, aplică teorema lui STEINER

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{BA_3}{CA_3} = \left(\frac{A_2B}{A_2C}\right)^2$$

şi ajunge la

$$\Pi \frac{A_3B}{A_3C} = \Pi \frac{\sin^2 PAB}{\sin^2 PAC} = 1.$$

D-l STOICA găseşte pentru 1° că fascicolul $A_2(B, A_1, A_3, C)$ cu două unghiuri egale are raportul anarmonic

$$\frac{\sin^2 C}{\sin^2 A} = \frac{A_1B}{A_1C} : \frac{A_3B}{A_3C} \cdots,$$

iar pentru 2° indică metoda urmată în soluţia de faţă.

N. M.

PROBLEMA 4653. *Să se găsească numai cu ajutorul compasului, pe un cerc dat, vârfurile unui patrat.*

GH. BASACOV.

Începând dintr'un punct A al cercului O, se descrie trei arce AB = BC = CD care subîntind coarde egale cu raza cercului; A şi D sunt la capetele unui diametru. Fie E unul din punctele de intersecţie ale cercurilor (A, AC) şi (D, DB). OE este latura patratului căci

$$OE^2 = AE^2 - OA^2 \text{ şi } AE = AC = l_3,\ OA = l_6,$$

iar latura patratului $l_4 = R\sqrt{2}$ este legată de latura exagonului $l_6 = R$ şi a triunghiului echilateral $l_3 = R\sqrt{3}$, prin relaţia $l_4^2 = l_3^2 - l_6^2$. Odată cunoscută latura, vârfurile patratului se determină imediat.

Notă. 1°. Problema este cunoscută: Culegere de Probleme de Geometrie: 6X.

2°. Dacă centrul cercului nu este cunoscut prin enunţ, el se poate găsi numai cu compasul. C. d. P. 119 IX.

Au rezolvat problema D-nii: EUGEN F. GRABOVSCHI (Orheiu), IOAN S STOIAN (cl. VII liceul militar „Mihaiu Viteazu" Târgu Mureş), ION STĂNCULESCU (cl. VII: liceul „Spiru Haret" Bucureşti) şi NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU, VICTOR FLORESCU, ILIE IOAN ŢIŢEICA, ŞTEFAN NEGULESCU, OCT. GH. RĂDULESCU (elevi ai liceului militar „Nicolae Filipescu" Mânăstirea Dealu).

PROBLEMA 4662. *Să se demonstreze că între patru soluţiuni particulare ale ecuaţiei diferenţiale*

$$(1) \qquad y' = A\sin y + B\cos y + C,$$

în care A, B, C *sunt funcţiuni de o variabilă* x, *există relaţiunea*

$$(2) \qquad \frac{\sin\left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{y_1 - y_4}{2}\right)} : \frac{\sin\left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{y_3 - y_4}{2}\right)} = \text{const.}$$

2. *Să se determine o schimbare de funcţiune* $u = f(y)$, *care să transforme ecuaţia dată într'una de tip* RICCATI.

3. *Să se arate că, reciproc, ecuaţia cea mai generală de tip* RICATTI *se poate transforma în una de forma de mai sus* (1).

4. *Să se integreze complet ecuaţia* (1) *în cazurile* $B \pm C = 0$.

M. CHERMĂNESCU.

1. *Soluție* dată de D-ra CĂLINESCU PARASCHIVA (profesoară Cluj) și de D-nii: CĂLINESCU AURELIAN (profesor Roșiori de Vede) CONSTANTINESCU G. G. (profesor Tecuci), DIM. MAVRODIN (student), A. ARȘAVSCHI, O. SACTER.

Observăm că relația (2) se mai poate scrie

$$\frac{\sin\frac{y_1}{2}\cos\frac{y_2}{2}-\sin\frac{y_2}{2}\cos\frac{y_1}{2}}{\sin\frac{y_1}{2}\cos\frac{y_4}{2}-\sin\frac{y_4}{2}\cos\frac{y_1}{2}}:\frac{\sin\frac{y_3}{2}\cos\frac{y_2}{2}-\sin\frac{y_2}{2}\cos\frac{y_3}{2}}{\sin\frac{y_3}{2}\cos\frac{y_4}{2}-\sin\frac{y_4}{2}\cos\frac{y_3}{2}}=\text{const.}$$

sau

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{y_1}{2}-\operatorname{tg}\frac{y_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{y_1}{2}-\operatorname{tg}\frac{y_4}{2}}:\frac{\operatorname{tg}\frac{y_3}{2}-\operatorname{tg}\frac{y_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{y_3}{2}-\operatorname{tg}\frac{y_4}{2}}=\text{const.}$$

care dacă facem înlocuirile

$$\operatorname{tg}\frac{y_i}{2}=u_i,\qquad i=1,2,3,4$$

devine

$$(2')\qquad \frac{u_1-u_2}{u_1-u_4}:\frac{u_3-u_2}{u_3-u_4}=\text{const.}$$

Dar această relațiune exprimă tocmai proprietatea caracteristică a integralelor ecuației lui RICCATI. Rezultă atunci că dacă efectuăm schimbarea de funcțiune

$$u=\operatorname{tg}\frac{y}{2}$$

ecuația diferențială (1) trebue să se transforme într'una de tip RICCATI, ceeace se întâmplă efectiv căci în baza formulelor cunoscute

$$(3)\qquad \sin y=\frac{2u}{1+u^2},\ \cos y=\frac{1-u^2}{1+u^2},\ y'=\frac{2u'}{1+u^2},$$

obținem ecuația

$$2u'=2Au+B(1-u^2)+C(1+u^2)$$

sau

$$(1')\qquad u'=\frac{(C-B)}{2}u^2+Au+\frac{C+B}{2}$$

care este, în adevăr, o ecuație de tipul prevăzut.

Urmează de aci că integralele ecuației (1) satisfac realația (2).

Reciproc să considerăm o ecuație tip RICCATI cea mai generală

$$u' = X_1 u^2 + X_2 u + X_3$$

în care X_1, X_2, X_3 sunt funcțiuni de x. Efectuând schimbarea de funcțiune $u = \operatorname{tg} \frac{y}{2}$ obținem

$$y' = 2X_1 \sin^2 \frac{y}{2} + X_2 \sin y + 2X_3 \cos^2 \frac{y}{2},$$

iar formulele cunoscute

$$2 \sin^2 \frac{y}{2} = 1 - \cos y \quad , \quad 2 \cos^2 \frac{y}{2} = 1 + \cos y$$

o transformă în

$$y' = X_2 \sin y + (X_3 - X_1) \cos y + X_3 + X_1 = 0,$$

ecuație de tipul (1).

Pentru a integra complet ecuația (1) în cazurile $B \pm C = 0$, o transformăm, prin schimbarea de mai sus, (1').

Dacă $B - C = 0$, (1') devine

$$u' = Au + B.$$

ecuație lineară cu integrala grnerală cunoscută

$$u = e^{\int A dx} \left[k + \int B e^{\int A dx} dx \right] \qquad \therefore \quad y = 2 \operatorname{arctg} u,$$

unde k este o constantă arbitrară.

Dacă $B + C = 0$, (1) devine

$$u' = -Bu^2 + Au,$$

ecuația de tip BERNOULLI, care prin schimbarea de funcțiune $u = \frac{1}{v}$ se reduce la ecuația lineară

$$v' = -Av + B$$

cu integrala generală

$$v = e^{-\int A dx} \left[k + \int B e^{\int A dx} dx \right]$$

deci

$$u = \frac{e^{\int A dx}}{k + \int B e^{\int A dx} dx} \qquad y = 2 \operatorname{arctg} u,$$

în care k este o constantă arbitrară.

2. *Soluție* dată de D-l CONST. SĂNDULACHE.

Să însemnăm cu $U(x)$ primul membru al relației (2); putem scrie

$$U(x) = \frac{\sin\frac{y_1 - y_2}{2} \sin\frac{y_3 - y_4}{2}}{\sin\frac{y_1 - y_4}{2} \sin\frac{y_3 - y_2}{2}}.$$

Pentruca $U(x) = \text{const.}$ este necesar şi suficient ca derivata $U'(x)$ să fie identic nulă. Anulând numărătorul acestei derivate, vom avea

$$\begin{aligned} 0 = {} & (y'_1 - y'_2) \cos\frac{y_1 - y_2}{2} \sin\frac{y_3 - y_4}{2} \sin\frac{y_1 - y_4}{2} \sin\frac{y_3 - y_2}{2} \\ & + (y'_3 - y'_4) \sin\frac{y_1 - y_2}{2} \sin\frac{y_3 - y_4}{2} \sin\frac{y_1 - y_4}{2} \sin\frac{y_3 - y_2}{2} \\ & - (y'_1 - y'_4) \cos\frac{y_1 - y_4}{2} \sin\frac{y_3 - y_4}{2} \sin\frac{y_1 - y_2}{2} \sin\frac{y_3 - y_2}{2} \\ & - (y'_3 - y'_2) \sin\frac{y_1 - y_4}{2} \cos\frac{y_3 - y_4}{2} \sin\frac{y_1 - y_2}{2} \sin\frac{y_3 - y_4}{2}. \end{aligned}$$

Insă ținând seama de ecuația (2),

$$\begin{aligned} y'_i\, y'_{-j} &= A(\sin y_i - \sin y_j) + B(\cos y_i - \cos y_j) \\ &= 2A \sin\frac{y_i - y_j}{2} \cos\frac{y_i + y_j}{2} - 2B \sin\frac{y_i - y_j}{2} \sin\frac{y_i + y_j}{2}, \end{aligned}$$

astfel că relațiunea de mai sus devine

$$\begin{aligned} 0 = \sin\frac{y_1 - y_2}{2} \sin\frac{y_3 - y_4}{2} \sin\frac{y_1 - y_4}{2} \sin\frac{y_3 - y_2}{2} \Bigg[A \Bigg(& 2 \cos\frac{y_1 - y_4}{2} \cos\frac{y_1 - y_2}{2} \\ & + 2 \cos\frac{y_3 + y_4}{5} \cos\frac{y_3 - y_4}{2} - 2 \cos\frac{y_1 + y_4}{2} \cos\frac{y_1 - y_4}{2} - 2 \cos\frac{y_3 + y_2}{2} \cos\frac{y_3 - y_2}{2} \Bigg) \end{aligned}$$

$$+B\left(2\sin\frac{y_3+y_2}{2}\cos\frac{y_3-y_2}{2}+2\sin\frac{y_1+y_4}{2}\cos\frac{y_1-y_4}{2}-2\sin\frac{y_1+y_2}{2}\cos\frac{y_1-y_2}{2}\right.$$

$$\left.-2\sin\frac{y_3+y_4}{2}\cos\frac{y_3-y_4}{2}\right)\Big]\cdot$$

Identitățile

$$2\sin\frac{y_i+y_j}{2}\cos\frac{y_i-y_j}{2}=\sin y_i+\sin y_j$$

$$2\cos\frac{y_i+y_j}{2}\cos\frac{y_i-y_j}{2}=\cos y_i+\cos y_j$$

arată că parantezele mici sunt nule, iar egalitatea devine o identitate. In acest mod este *verificată* existența relației (2) pentru integralele ecuației (1).

Restul ca la prima soluție.

3. *Soluție* dată de D-l MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Profesor Brăila).

Dacă y_1, y_2, y_3, y_4 sunt integrale ale ecuației (1), avem relațiunile:

$$y'_i=A\sin y_i+B\cos y_i+C\quad,\quad i=1,2,3,4$$

cari formează un sistem de patru ecuații lineare cu trei necunoscute A, B, C. Condiția de compatibilitate este:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\sin y_1 & \cos y_1 & 1 & y'_1\\ \sin y_2 & \cos y_2 & 1 & y'_2\\ \sin y_3 & \cos y_3 & 1 & y'_3\\ \sin y_4 & \cos y_4 & 1 & y'_4\end{vmatrix}=0.$$

Desvoltând acest determinant după elementele ultimei coloane și observând că minorii corespunzători sunt determinanți de forma

$$\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & 1\\ \sin\beta & \cos\beta & 1\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1\end{vmatrix}=-4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2},$$

obținem după mai multe transformări succesive,

$$-\frac{\Delta}{8} = \sin\frac{y_1-y_4}{2}\sin\frac{y_3-y_2}{2}\left[\frac{y'_3-y'_4}{2}\sin\frac{y_1-y_2}{2}\cos\frac{y_3-y_4}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{y'_1-y'_2}{2}\sin\frac{y_3-y_4}{2}\cos\frac{y_1-y_2}{2}\right] - \sin\frac{y_1-y_2}{2}\sin\frac{y_3-y_4}{2}$$

$$\left[\frac{y'_3-y'_2}{2}\sin\frac{y_1-y_4}{2}\cos\frac{y_3-y_2}{2}+\frac{y'_1-y'_4}{2}\sin\frac{y_3-y_2}{2}\cos\frac{y_1-y_4}{2}\right].$$

Notăm:

$$(\varkappa) \qquad u = \sin\frac{y_1-y_2}{2}\sin\frac{y_3-y_4}{2},$$

$$v = \sin\frac{y_1-y_4}{2}\sin\frac{y_3-y_2}{2},$$

astfel că

$$\Delta = -8(vu'-uv') = 0$$

de unde $vu'-uv'=0$, sau

$$\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}=0 \qquad \therefore \quad \lg u - \lg v = \text{const}$$

sau în fine

$$\frac{u}{v} = \text{const.}$$

care ținând seama de notațiile ($\varkappa$), nu este decât relația (2) din enunțul problemei, relația care este astfel *demonstrată*.

Restul ca la prima soluție.

4. *Soluție* dată de D-l EUGEN VIȘA (profesor).

Să găsim mai întâiu transformarea $u = f(y)$, care schimbă ecuația diferențială (1) într'o alta de tip RICCATI. Deducem, derivând în raport cu x

$$u' = \frac{du}{dy}y',$$

iar ecuația (1) devine, înlocuind pe y',

$$(1') \qquad u' = A\sin y\frac{du}{dy} + B\cos y\frac{du}{dy} + C\frac{du}{dy}.$$

Pe de altă parte, ecuația cea mai generală de tip RICCATI fiind

$$(1'') \qquad u' = \alpha u^2 + \beta u + \gamma$$

în care α, β, γ sunt funcțiuni de x, pentru a transforma (1') în (1'') va fi *suficient* să avem

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} \sin y \frac{du}{dy} &= l_1 u^2 + m_1 u + n_1, \\ \cos y \frac{du}{dy} &= l_2 u^2 + m_2 u + n_2, \\ \frac{du}{dy} &= l_3 u^2 + m_3 u + n_3, \end{aligned}$$

în care l_i, m_i, n_i sunt constante nedeterminate.

Eliminând $\sin y$, $\cos y$ și $\frac{du}{dy}$ între relațiile (α), obținem

$$(l_3 u^2 + m_3 u + n_3)^2 = (l_1 u^2 + m_1 u + n_1)^2 + (l_2 u^2 + m_2 u + n_2)^2$$

relația care poate fi satisfăcută pentru o infinitate de sisteme de valori atribuite constantelor l_i, m_i, n_i.

Vom alege un sistem de valori care să ne dea un rezultat cât mai simplu. Pentru aceasta vom lua

$$\begin{aligned} l_1 &= 0 \quad , m_1 = 1 \ , n_1 = 0, \\ l_2 &= -\tfrac{1}{2} \ , m_2 = 0 \ , n_2 = \tfrac{1}{2}, \\ l_3 &= \tfrac{1}{2} \quad , m_3 = 0 \ , n_3 = \tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

cu care relațiile (α) devin

$$(\alpha') \qquad \sin y \frac{du}{dy} = u \ , \ \cos y \frac{du}{dy} = \frac{1 - u^2}{2} \ , \ \frac{du}{dy} = \frac{1 + u^2}{2} \ .$$

Din ultima deducem $u = \operatorname{tg} \frac{y}{2}$ care este astfel relația de transformare căutată și care verifică și celelalte două relații (α').

Restul ca la prima soluție.

Notă. 1°. D. D. MAVRODIN mai consideră și ecuația diferențială

$$y' = A \operatorname{sh} y + B \operatorname{ch} y + C$$

pentru care stabilește proprietăți analoage, înlocuind funcțiunile circulare prin cele iperbolice corespunzătoare.

2. D-l G. G. CONSTANTINESCU crede că problema de faţă a fost inspirată de o problemă propusă recent în *Mathésis*, pe care ar generaliza-o. Este o simplă coincidenţă, problema aceasta ca şi cea propusă sub No. 4521, derivând dintr'un studiu mai general al ecuaţiilor diferenţiale de primul ordin, studiu inspirat de cercetările D-lui G. MIHOC, despre cari am vorbit în Nota dela finele soluţiei date problemei 4521 la pag. 634 a Vol. XLI din „G. M.“

3. In toate soluţiile date acestei probleme, cu excepţia ultimei, elementul principal îl constitue *dibuirea*, pe o cale sau alta, a transformării $u = \operatorname{tg} \frac{y}{2}$, ceeace a fost posibil, datorită funcţiunilor particulare din enunţ. Singur; D-l Profesor E. VIŞA a căutat să determine această transformare print'o metodă cât mai apropiată de calea generală ce se urmează în asemenea chestiuni.

D-l E. VIŞA ar mai fi trebuit să adauge — pentru a fi cât mai riguros,— că impunerea condiţiilor (α) este permisă de faptul că relaţia $u = f(y)$ este independentă de x şi că deci, privind în (1'), coeficienţii A, B, C cari sunt funcţiuni de x, nu trebue să figureze în calculele cari determină pe $f(y)$.

Deasemeni, singurul care a dat o demonstraţie directă relaţiei (2) din enunţ, independentă de consideraţiunea ecuaţiei lui RICCATI, a fost D-l Profesor M. NEGREA. Calea urmată de D-sa este analoagă celeia urmată în soluţia ce a trimis problemei 4521. Soluţia D-lui C. SĂNDULACHE, deşi originală ca idee, constitue o simplă *verificare* a relaţiei (2), căci presupune relaţia aceasta cunoscută.

4. In fine, ţin să subliniez cu foarte multă plăcere şi satisfacţie, faptul că majoritatea rezolvitorilor acestei probleme sunt *profesori*, adică persoane cu cultura matematică formată, pe cari dragostea ce au avut pentru *Gazeta Matematică* din timpul când erau elevi şi apoi studenţi nu i-a părăsit. Este un exemplu frumos pentru corespondenţii noştrii mai tineri şi pe cari dorim să-l vedem imitat de cât mai mulţi!

M. G.

PROBLEMA 4700. *Se cere patratul perfect* a b c d *în care* a *este indicatorul lui* d, c *indicatorul lui* a, *iar* d *indicatorul lui* b.

EM. MEREUŢĂ.

Conform enunţului

$$(1) \qquad a = \varphi(d) \ , \ c = \varphi(a) \ , \ d = \varphi(b) \ .$$

Dăm lui b toate valorile dela 0 la 9 şi calculăm pe d corespunzător. — Din valorile lui d eliminăm pe acelea care nu sunt

terminaţiuni de patrat perfect şi cu restul valorilor calculăm pe a şi pe c prin relaţiile (1). Rezultatele obţinute sunt

a	b	c	d
0	0	0	0
1	1, 2	1	1
2	5, 8	1	4
2	7, 9	1	6

Dintre numerele $abcd$ ce se pot forma cu acest tabel se elimină *0000* care nu are nici un sens şi acelea terminate în 11 şi 14. Rămân numerele 2716 şi 2916 din care

$$2916 = 54^2$$

este soluţia problemei.

Au rezolvat problema pe această cale D-nii: D. MAVRODIN, C. SĂNDULACHE şi I. ŢIŢEICA.

D-l D. MAVRODIN luând $\varphi(1) = 0$ a dat şi soluţia

$$0100 = 10^2$$

Aceasta este o soluţie falşă căci $\varphi(1) = 1$, după cum cred că s-a convins oricine a citit nota D-lui ION IONESCU de la pag. 77 din acest an.

EXERCIŢII

6. Să se rezolve în numere raţionale ecuaţia:

$$x(x + y)(x^2 + xy + 2) = m.$$

m fiind un întreg.

HAR. P. IONESCU.

R. Ştiind că: α, β, γ, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 sunt numere întregi convenabil alese, avem:

$$x = \frac{a_1 a_2}{b_1 c_1}\alpha \ , \quad x + y = \frac{b_1 b_2}{a_1 c_2}\beta \ , \quad x^2 + xy + 2 = \frac{c_1 c_2}{a_2 b_2}\gamma,$$

$$m = \alpha\beta\gamma,$$

cari dau soluţiile:

$$x = \frac{a_1 a_2}{b_1 c_1}\alpha \ , \quad y = \frac{b_1 b_2}{a_1 c_2}\beta - \frac{a_1 a_2}{b_1 c_1}\alpha \ , \quad z = \frac{c^1 c_2}{a_2 b_2}\gamma - \frac{a_2 b_2}{c_1 c_2}\alpha\beta.$$

Pentru $\alpha = \beta = \gamma = a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 1$ avem problema 4616.

Exerciţiul subsistă şi pentru m un număr raţional, atunci însă α, β, γ sunt trei numere raţionale.

7. Să se afle limita:

$$\lim_{x=0} \frac{a \sin\alpha x + b \operatorname{tg}\beta x + c\, sh\gamma x + d\, th\delta x + kx^m}{a' \sin\alpha' x + b' \operatorname{tg}\beta' x + c' sh\gamma' x + d' th\delta' x + k' x^m}.$$

HAR. P. IONESCU.

R. Exerciţiul este o extindere a problemei 4349. Dacă notăm

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = \mu \ ; \ a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + d'\delta' = 0$$

avem:

<table>
<tr><th></th><th>$m > 1$</th><th>$m = 1$</th><th colspan="2">$1 > m \geqslant 0$</th><th colspan="2">$m < 0$</th></tr>
<tr><td>$m' > 1$</td><td>$\frac{\mu}{\nu}$</td><td>$\frac{\mu + k}{\nu}$</td><td colspan="2">$\pm\infty$</td><td colspan="2">$\pm\infty$</td></tr>
<tr><td>$m' = 1$</td><td>$\frac{\mu}{\nu + k'}$</td><td>$\frac{\mu + k}{\nu + k'}$</td><td colspan="2">$\pm\infty$</td><td colspan="2">$\pm\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$1 > m' \geqslant 0$</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">0</td><td>$m > m'$</td><td>0</td><td colspan="2" rowspan="3">$\pm\infty$</td></tr>
<tr><td>$m = m'$</td><td>k/k'</td></tr>
<tr><td>$m < m'$</td><td>$\pm\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$m' < 0$</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">0</td><td colspan="2" rowspan="3">0</td><td>$m > m'$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$m = m'$</td><td>k/k'</td></tr>
<tr><td>$m < m'$</td><td>$\pm\infty$</td></tr>
</table>

unde $\pm\infty$ este luat după semnul lui k.

8. Fie Δ un determinant simetric stâng de ordin $2n-1$. Să se arate că

$$\begin{vmatrix} & & \lambda_1 \\ & \Delta^2 & \lambda_2 \\ & & \vdots \\ & & \lambda_{2n-1} \\ \lambda_1 & \lambda_2 \ldots \lambda^2_{n-1} & 0 \end{vmatrix} = (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \ldots + a_{2n-1}\lambda_{2n-1})^2$$

a_i fiind independenţi de λ_j.

C. IONESCU-BUJOR.

R. Se va observa că Δ^2 este simetric şi nul.

9. Să se stabilească identităţile:

$$2\cos^2\frac{A-2B-3C}{4}=1=\sin\left(\frac{3}{2}B+C\right)$$

$$2\sin^2\frac{A-2B-3C}{4}=1-\sin\left(\frac{3}{2}B+C\right)$$

A, B şi C fiind unghiurile unui triunghiu.

SUB.-LT. SAVIN C. IOAN.

R.: Intr'un triunghiu:

$$A+B+C=180^0.$$

Această relaţie se mai poate scrie

$$\frac{A-2B-3C}{4}=\frac{180^0-3B-4C}{4}=45^0-\frac{3}{4}B-C$$

De unde:

$$\sin\frac{A-2B-3C}{4}=\sin\left[45^0-\left(\frac{3}{4}B+C\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(\frac{3}{4}B+C\right)-\cos\left(\frac{3}{4}B+C\right)\right]$$

$$\cos\frac{A-2B-3C}{4}=\cos\left[45^0-\left(\frac{3}{4}B+C\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(\frac{3}{4}B+C\right)+\cos\left(\frac{3}{4}B+C\right)\right].$$

Ridicând la patrat ambii membri ai acestor egalităţi şi inmulţind cu 2 se găseşte:

$$2\sin^2\frac{A-2B-3C}{4}=1-\sin\left(\frac{3}{2}B+C\right)$$

$$2\cos^2\frac{A-2B-3C}{4}=1+\sin\left(\frac{3}{2}B+C\right).$$

Q. E. D.

10. Să se stabilească identităţile:

$$r=\frac{p-a}{\operatorname{cosec}A+\operatorname{cotg}A}=\frac{p-b}{\operatorname{cosec}B+\operatorname{cotg}B}=\frac{p-c}{\operatorname{cosec}C+\operatorname{cotg}B}$$

$$p=r_a\,(\operatorname{cosec}A+\operatorname{cotg}A)=r_b\,(\operatorname{cosec}B+\operatorname{cotg}B)=r_c\,(\operatorname{cosec}C+\operatorname{cotg}C).$$

SUB-LOCOT. IOAN C. SAVIN.

R. Se porneşte de la identitatea

$$b^2+c^2-a^2=2bc\,\cos A.$$

Care se mai poate scrie

(1) $$(b+c-a)(b+c+a)=2bc+2bc\,\cos A.$$

Insă

$$2bc = \frac{4S}{\sin A}.$$

In consecinţă (1) devine:

(2) $$p(p-a) = S(\operatorname{cosec} A + \operatorname{cotg} A).$$

Ţinând seamă că:

$$S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c.$$

(2) devine

$$p - a = r(\operatorname{cosec} A + \operatorname{cotg} A)$$

$$p = r_a(\operatorname{cosec} A + \operatorname{cotg} A).$$

Prin permutări circulare se obţin şi celelalte relaţii din care se vede uşor că se deduc identităţile.

PROBLEME PROPUSE

4747. Se cere a se găsi numerele de patru cifre, aşa ca cifra a doua şi a treia a lor să fie media aritmetică a cifrelor între care se găsesc scrise.

I. IONESCU.

4748. Se formează tabloul:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

în care numerele $a, b, c, d, e, \ldots, h, i$ sunt întregi consecutive şi în ordine crescândă. Să se găsească cea mai mică valoare a lui a, astfel încât suma produselor numerelor din fiecare linie şi din fiecare coloană să fie un patrat perfect.

V. THÉBAULT.

4749. Se cere patratul de 16 cifre

$$a\,b\,c\,b\,a\,b\,d\,e\,d\,b\,f\,a\,b\,c\,b\,a$$

ştiind că:

$$b\,d\,e\,d\,b = m.a\,b\,c\,b\,a,$$

m fiind întreg.

HAR. P. IONESCU.

4750. In cercul de centru O, fie A şi B capetele a doi diametri perpendiculari; un diametru oarecare D taie tangentele din A şi B, în T şi U. Simetricul diametrului OA faţă de D, taie pe BU în V; simetricul lui B faţă de V, fie W.

Să se arate că $\overline{UW} = \overline{AT}$.

N. N. MIHĂILEANU.

4751. Fie D, E, F punctele de contact ale laturilor triunghiului ABC cu cercul înscris lui. Dacă O este un punct oarecare din planul triunghiului ABC, dreptele OB şi OC intersectează pe EF respectiv în punctele F' şi E'.

Notând cu M şi N intersecţiile dreptelor DE' şi DF' respectiv cu OB şi OC, să se arate că dreapta MN trece printr'un punct fix când punctul O se mişcă în plan.

THEODOR GH. COCEA.

4752. Dacă pe laturile AB şi AC ale unui triunghiu oarecare ABC luăm segmentele $\overline{BM}$ şi $\overline{CN}$ respectiv proporţionale cu acele laturi $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ şi de sens opus faţă cu A, segmentul $\overline{MN}$ este împărţit în părţi egale de a treia latură, BC.

O. N. ŢINO.

4753. Profesorul PICCARD s'a ridicat într'un balon stratosferic până la înălţimea de 16.201 m. Care este suprafaţa zonei pe care el ar fi putut-o cuprinde cu vederea?

AL. AL. ROŞU.

4754. Fie

$$P \equiv Ax + By + Cz \;;\; Q_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1;$$

$$R_1 \equiv A'_1x + B'_1y + C'_1z + D'_1 \;;\; Q_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2$$

$$R_2 \equiv A'_2x + B'_2y + C'_2z + D'_2.$$

Să se demonstreze că, dacă

$$Q_1 \cdot \begin{vmatrix} A & B & C & -P \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 & D'_2 \end{vmatrix} - R_1 \cdot \begin{vmatrix} A & B & C & -P \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 & D'_2 \end{vmatrix} = 0,$$

atunci şi:

$$Q_2 \cdot \begin{vmatrix} A & B & C & -P \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 & D'_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \end{vmatrix} - R_2 \cdot \begin{vmatrix} A & B & C & -P \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \end{vmatrix} = 0.$$

M. GHERMĂNESCU.

4755. Se dă un cerc şi un punct fix A pe el. Să se găsească locul punctelor P, care împart o coardă $\overline{AB}$ în acelaşi raport în care ea împarte diametrul perpendicular ei.

ION C. SCHILERU-DILI.

4756. Să se arate că dacă

$$2\,\mathrm{tg}^2\,\theta = \mathrm{tg}^2\,a + \mathrm{tg}^2\,b$$

atunci avem şi:

$$(1 - \cos 2\theta) \cdot \cos(a+b)\cos(a-b) = \cos 2\theta - \cos 2a \cos 2b.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

4757. Pe catetele unui triunghiu dreptunghic ABC, ca diametru, se descriu cercuri. Să se arate că patratul construit pe tangenta comună a acestor cercuri, cuprinsă între punctele de contacte, este echivalent cu aria triunghiului ABC, şi că avem:

$$\cos^2\varphi = \sin 2B,$$

φ fiind unghiul tangentei cu ipotenuza.

ALEXANDRU V. NICULESCU.

4758. Prin punctul p (3, 2, 1) să se ducă o dreaptă care să taie dreapta dată d *(4, 5, — 3) (7, 2, 6)* în punctul a şi să înţepe planul β *(4, — 8, 8)* în b aşa fel ca să avem:

$$\overline{pa} : \overline{ab} = 3 : 2.$$

GH. VASILIU.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăşteanu F. Marcel (4495, 694, 718); *Apostol O. R.* (4642); *Bazac I. Alex.* (4728); *Bazac I. D.* (4714); *Bivolaru M. Liviu* (4485, 585, 712); *Bogdan Ion* (4423); *Călinescu Aurelian* (4665, 79, 82, 91, 99, 705, 12, 13, 14, 16, 18, 21, 32); *Caraman Vasile* (4545, 85); *Cârdeiu D. Gh.* (4714, 28); *Cioc I. D-tru* 4728, 29); *Ciurescu I. Radu* (4718); *Comloşanu Cornelia* (4714); *Constantinescu G. G.* 1563, 2274, 81, 98, 645, 955, 99, 3260, 664, 4438, 590, 93, 728, 30, N); *Constantinescu Gh.* (N); *Cornăţeanu I. Aurel* (4518, 681, 714, 16, 18, 28); *Cotigher Iacov* (4654, 59, 714, 16); *Crişan A. I.* (4728); *Deciulescu D. G.* (4714, 18, 28); *Deutsch M. Adolf* (4701, 16, 17, 18, 19, 21); *Diaconescu D. Mihail* (4728); *Firu Paul* (4485, 585, 714); *Florescu L. Victor* 4705, 13, 14, 18, N); *Gavrilescu N. Const.* (4661, 713, 29); *Gheorghiu P. Petre* (4714, 28); *Grumăzescu Mircea Subloc.* (4625, 61); *Herman Victor* (4713, 14, 28); *Ignaţiu Traian* (4485, 714, 16); *Jareghie V. Ion* 4714, 28); *Jipa C. A.* (4423, 556, 85, 714); *Lăzărescu P. S.* (4714); *Mavrodin D-tru* (4125, 35, 308, 545, 99, 709, 12, 28, 30, 32, 78); *Nadolu T. Andrei* (4714, 29); *Negrea A. Mircea* (2063, 108, 4732, 46); *Pantelimon V. Const.* (4714, 28); *Pascaru I. Const.* (4714, 28); *Pascu V. H.* (4714); *Petrescu Achile* (4714, 28, 29); *Popa D. Mircea* (4714, 28, 29); *Popoviciu I. Gavril* (4599, 677, 79, 714, N); *Postelnicescu M. C.* (4629, 714, 16, 17, 28, 32, E); *Pungă I. Nicolae* (4485, 585, 714); *Rădulescu Gh. Oct.* (4679, 714, 18, 28); *Roşeanu G.* (2106); *Runceanu N. C.* (4545); *Savin C. Ion* (N); *Stănculescu I.* (4714, 25); *Stănculescu M.* (4714); *Stănculescu Virgil* (4485, 585, 714); *Ştefănescu D. Nic.* (4633, 701, 32); *Stoian I.* (4714); *Tanasiciuc V. Claudius* (4545); *Thébault V.* (A); *Tilică Ştefan* (4743); *Tomescu Th. Horaţiu* (4728); *Trufin C. Traian* (4714, 28, 29); *Turcu R. Sandu* (4714, 28, 29): *Ţiţeica I. Ilie* (4697, 715, 37); *Vasilescu Al. Alexandra* (A); *Vasilescu-Stabu A. Mircea* (4577, 86, 631, 91); *Vlad I. C. M. Subloc.* (4714, 18, 35).

Manuscrisele se vor scrie pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele ***se vor lipi sau coase în partea stângă,*** împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. ***Foile vor avea format de sfert de coală,*** iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE"

Colecţiunea *„Gazetei Matematice"* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor GR. ZAPAN

C. 42831

IV 2533

Biblioteca ASTRA
- SIBIU -

22.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLII

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1937

BIBLIOTECA CENTRALĂ
ASTRA
SIBIIU

SUMARUL

1. Cuvântarea Domnului *Ion Ionescu* la sărbătorirea sa dela 1 Noemvrie 1936 (urmare şi sfârşit).
2. Cărţi vechi de matematică . . . . . *I. Ionescu.*
3. Eforturi suferite de avion pe timpul resursei . *Maior I. Linteş.*
4. Note Matematice: 22 — 27.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 262.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 2510, 3134, 3330, 4205, 4306, 4413, 4443, 4500, 4501, 4528, 4600, 4606, 4629, 4659, 4668, 4716.
9. Exerciţii: 11 — 12.
10. Probleme propuse: 4759 — 4770.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1937

74311

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer-Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1936 şi nerezolvate sunt enumărate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4724, 26, 27, 31, 33, 34, 38, 40, 42, 44, 45, 51, 54, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	220	260	80
5— 8 „	375	425	100
9—16 „	620	700	160
Coperta	120	160	80

CUVÂNTAREA DOMNULUI ION IONESCU LA SĂRBĂTORIREA SA DELA 1 NOEMVRIE 1936

(Urmare dela pagina 179)

Pentru motivele pe care vi le arătaiu, imediat ce am venit la Şcoală ca Profesor de proiecte, am rupt-o definitiv cu vechiul sistem. Nu am voit ca, după ieşirea lor din Şcoală, foştii mei elevi să mă acuze că au pierdut zadarnic cu mine o parte din tinereţea lor, fără să le folosească în practică. De aceea am introdus lucrări de câte o şedinţă făcute sub controlul direct şi continuu al profesorului şi am pus ca principiu de a nu lua în considerare niciun proiect dacă nu este complect terminat, conform programului dat, acordându-se elevilor cari nu le puteau termina, sau nu le-au făcut bine, şedinţe suplimentare după terminarea examenelor generale. Pentru proiectele importante am introdus susţinerea lor în faţa profesorului, neavând la început timpul necesar ca să aplic acest principiu la toate lucrările şi proiectele. Aveam de făcut anual 12 epure de statică grafică, 12 lucrări de rezistenţa materialelor, 6 lucrări mici de poduri, 1 proiect industrial, 3 proiecte de podeţe şi 3 proiecte de poduri, care cereau 15 ore săptămânal. Aceasta în afară de unele conferinţe necesare pentru lucrări şi proiecte, şi de suplinirea cursului de poduri care cerea 4 lecţiuni săptămânal de câte $1^1/_2$ ore.

Acest timp nu putea fi luat tot, din orele mele libere ca inginer funcţionar la Stat. Mi s'a dat însă tot timpul de care aveam nevoie la Şcoală graţie lui ANGHEL SALIGNY, Directorul meu, care era un om cu vederi foarte largi. Expunându-i odată intenţia de a părăsi Şcoala din cauză că unii din superiorii mei găseau că lipsesc prea mult dela serviciu, şi că Statul pierde prin aceasta, el mi-a spus că ceea ce pierde Statul prin acele absenţe este supracompensat prin o pregătire solidă a zecilor şi sutelor de ingineri pe care Şcoală îi aruncă pe ogoarele tecnicei naţionale. Când el, fiind obosit, preocupat de lucrări, sau nu se simţea tocmai bine mă ruga să-i fac cursul de Poduri la Şcoală; spunea atunci superiorilor mei că face ca Serviciul să câştige căci el era plătit de cinci ori mai bine ca mine, pe când la Şcoală eram plătiţi la fel.

Schimbarea bruscă pe care am făcut-o în regimul lucrărilor de aplicaţiuni şi a proiectelor a produs bineînţeles oarecare mişcare printre elevi. Pe pereţi şi pe table se expuseseră proiecte vechi, ca să mi se arate cum se făceau înainte; parcă eu nu aş fi ştiut asta! Reclamaţiuni la Direcţiune nu au lipsit, chiar din primul an şi au continuat până azi. Şi era natural, pentrucă controlul serios nu este plăcut; lucrările de o şedinţă nu se puteau face de alţii, nu puteau primi ajutoare; proiectele trebuiau bine studiate şi bine cunoscute căci altfel nu rezistau la susţinere! Murmure şi plângeri primeam de peste tot. Doi Miniştri m'au chemat să dau repede notele pe motiv că-i trebuesc ingineri. Am răspuns că pe proiecte incomplecte nu dau note şi atunci dânşii i-au promovat prin decizie ministerială.

Cu toate acestea programul propus mi l'am putut realiza încă dela început, şi aceasta datorită la două împrejurări. Una din ele era aceea că elevilor celor buni din Şcoală le fusesem profesor necunoscut mai înainte, pe când erau corespondenţi ai *Gazetei Matematice*. Ei ştiau de pe atunci că nu le admit decât lucrări bine tratate, complecte şi frumos redactate. O altă cauză este că s'a nemerit ca reforma să găsească în Şcoală serii care conţineau foarte multe elemente de valoare şi tineri cu multă putere de muncă. Nu am mai pomenit de atunci încoace ca, după terminarea cursurilor, să le mai fac lecţiuni suplimentare, după cererea lor. La expoziţia Asociaţiunii Române pentru Inaintarea şi răspândirea Ştiinţelor, din Bucureşti de pe atunci, am expus lucrări şi proiecte de ale elevilor pe numele lor şi toate au fost premiate de juriul examinator.

Cu înmulţirea numărului elevilor sarcina mea devenise foarte grea. Am arătat Ministrului V. MORŢUN aceste dificultăţi şi atunci mi s'a dat doi asistenţi. Am fost astfel primul profesor care am introdus asistenţi pe lângă cursuri în Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele. Primii asistenţi au fost regretatul TRAIAN LALESCU pentru lucrări de statică grafică şi D-l G. EM. FILIPESCU pentru lucrări de rezistenţa materialelor şi proiectele de poduri.

In anul 1914, în urma unui act de indisciplină al elevilor, am demisionat. Consiliul profesoral a trimis la mine o delegaţiune compusă din ANGHEL SALIGNY, ELIE RADU, TEODOR DRAGU şi D-l D. EMMANUEL, care să intervină să mă hotărască să nu

părăsesc Şcoala. In acest scop a insistat şi D-l C. ANGELESCU, Ministrul Lucrărilor Publice, de care depindea Şcoala. Am comunicat tuturor că după o indisciplină nesancţionată sever nu se ma poate menţine disciplina. Mi s'a spus că s'au luat toate măsurile necesare. Am revenit; însă la primul examen elevii nu s'au prezentat, aşa că teoria mea a fost invederată! Am dat în vacanţă notele la lucrările şi proiectele ce făcusem cu elevii şi am părăsit Şcoala la 1 Septemvrie 1914. De altfel şi Consiliul profesoral găsise o soluţie mai diplomatică de a nu mai fi eu profesor de proiecte. S'a hotărât atunci ca proiectele să se facă sub conducerea profesorului de curs respectiv, aşa încât profesorii de proiecte urmau să fie scoşi din bugetul viitor şi înlocuiţi cu asistenţi.

Insă socoteala din târg nu se prea potriveşte cu cea de acasă. Profesorul de Poduri ANGHEL SALIGNY nu putea primi supraîncărcarea ce urma să i se ceară de a conduce proiectele de poduri şi a demisionat pe ziua de 1 Octomvrie 1914. Fiind chemat de D-l C. ANGELESCU, Ministru, a fost rugat să-şi desemneze singur succesorul său. I s'a răspuns că nu are de recomandat pe altul decât pe mine care mă cunoaşte de 22 ani. Cum eu îi spusesem că în o Şcoală fără disciplină nu voiesc să funcţionez, rămânea ca să se aleagă altul de către Ministru cu avizul Direcţiunii, cum erau normele pe atunci. D-l Dr. C. ANGELESCU m'a chemat şi mi-a spus că mă numeşte chiar contra voinţei mele şi că să pun un suplinitor până când voiu crede eu că mă pot duce la Şcoală. In aceste condiţiuni am primit numirea, dar cursurile nu le-am reluat decât în Noemvrie anul următor, fiind numit suplinitor D-l Inginer NICULAE GEORGESCU. „Cu numirea mea ca Profesor de Poduri, măsura luată de Consiliu nu şi-a mai avut efectul dorit căci eu fiind titularul catedrei de Poduri, proiectele referitoare urmau să se facă tot sub conducerea mea.

După războiu s'a mai dat un asalt în această chestiune a proiectelor. Sistemul pe care-l aplicam eu trebuia desfiinţat, şi atunci Consiliul Profesoral, în lipsa mea, în unanimitate, a dat o aprobare unei vechi cereri a elevilor ca proiectele să se ridice la termen şi să li se dea note pe starea în care ele se găsesc atunci, fără a se mai da înapoi pentru complectare, şi eventuale rectificări la cele greşite. Neputând admite de loc acest mod de

a vedea, mi-am prezentat demisiunea, căci nu voiam să-mi iau răspunderea unei lipse de pregătire pentru viitorii ingineri în domeniul construcţiunilor mari, şi a unei superficialităţi în redactarea proiectelor. S'a convocat un nou Consiliu, la care am fost chemat şi eu, mi-am expus din nou vederile; s'a căutat un compromis, dar nu am cedat cu nimic; am spus chiar cum zice francezul: *c'est à prendre ou à laisser.* Consiliul a revenit asupra hotărârii luate şi eu am renunţat la demisiune în urma insistenţelor D-lui N. VASILESCU-KARPEN, Directorul Şcoalei pe atunci, şi a lui ANGHEL SALIGNY.

La înfiinţarea Şcoalei Politecnice am făcut în primul an cursul de construcţiuni metalice la toate secţiunile. Din cauză că examenele şi proiectele îmi cereau prea mult timp, acest curs nu l'am mai făcut anii următori, rămânând profesor numai la Secţia Construcţiilor.

Cu sporirea numărului elevilor, cu înmulţirea numărului examenelor admisibile, cu nenumărate teze, reexaminări, complectări şi refaceri de proiecte şi cu acte de indisciplină care au dus chiar la lăsarea corigentă a unei clase întregi, sarcina de profesor îmi devenise insuportabilă. O boală a intervenit să mă decid să mă retrag la pensie pentru a putea trăi liniştit puţinii ani pe care îi mai am de vieţuit. De aceea, după terminarea examenelor generale din anul trecut am demisionat. Comitetul de Direcţiune al Şcoalei şi D-l Ministru C. ANGELESCU nu m'au lăsat să plec, dându-mi în schimb un conferenţiar ataşat pe lângă catedra de poduri care să-mi reducă sarcina de profesor la cel puţin jumătate din ceea ce aveam. In aceste condiţiuni am mai continuat cursul anul trecut şi am început acum un an nou. Nu ştiu dacă o să o pot duce mult înainte, deoarece boala de inimă de care sufăr nu se împacă cu starea de nelinişte pe care trebue să o îndur aici. Tendinţa majorităţii elevilor de a pune mâna repede, repede pe o diplomă, cu cunoştinţe superficiale şi insuficiente, a devenit îngrijitoare pentru învăţământ şi în tot cazul insuportabilă pentru mine. Am fost nevoit să intervin la parchet pentru ca să opresc lucrarea chiar în localul Şcoalei, de către ingineri, a proiectelor pe care trebue să le facă elevii. Mulţi elevi găsesc că e jignitor să fie controlaţi; alţii cer ca notele să se dea hârtiilor pe care le prezintă iar nu capacităţii lor de a proiecta şi a studia.

Ei nu vor să mai fie chemaţi la susţinerea proiectelor, spre a fi întrebaţi ce au făcut, ce n'au făcut şi cum trebuia făcut ceea ce au greşit. Asta e ca şi cum ţi-ar spune: ai opera de artă în mână, uită-te la ea şi o apreciază; ce-ţi pasă care e artistul? Din nefericire, noi nu facem aici opere de artă ci aplicaţiuni tecnice, şi din ele ni se cere să apreciem dacă creierul viitorului absolvent este capabil să elaboreze proiecte inginereşti. S'a mers până acolo încât un elev, constatat incapabil de a face un proiect, de către asistenţi şi profesor, a făcut somaţie prin portărei de a i se da să facă alt proiect, înainte de a face probele cerute că este în stare să facă un asemenea proiect!

Acestea sunt ideile care m'au condus de când sunt profesor în învăţământul tecnic şi dificultăţile pe care le-am avut pentru a le putea aplica. Foştii elevi şi superiorii lor au avut ocaziunea să fi apreciat în ce măsură au contribuit ele la menţinerea reputaţiunii tecnicei române.

* * *

Acum, câteva cuvinte despre activitatea mea în Consiliile şi Comitetele Şcoalei. Ca unul care dela etatea de 10 ani m'am condus singur în şcoalele prin care am trecut, am căpătat oarecare încredere în judecata mea proprie şi în părerile mele scoase din experienţa vieţii. Din această cauză mă conduc foarte greu după părerile altora, mai ales când simt că sunt interesate. De aceea, veţi găsi în procesele verbale ale Consiliilor şi Comisiunilor la care particip că cele mai multe opinii separate sunt ale mele. In chestiunea alegerii profesorilor nu am avut în vedere decât interesele învăţământului tecnic superior. Nu am ezitat să spun celor cari au venit să-mi ceară votul pentru o catedră că nu fac sau că cunosc alţi candidaţi mai buni. Am luptat însă mult pentru achisiţiunea unor elemente valoroase ca D-nii A. G. IOACHIMESCU, C. BUŞILĂ, GH. EM. FILIPESCU şi A. IOANOVICI. In schimb am spus adevăruri crude pentru unii candidaţi la care le-am examinat lucrările prezentate. Am fost chiar dus, cu regretatul meu profesor GRIGORE CERKEZ şi cu D-l G. E. FILIPESCU, în judecata penală până la Curtea de Apel de către un candidat căruia i-am criticat lucrările prezentate.

In două rânduri colegii mi-au făcut cinstea de a mă alege Președinte al Secțiunii Construcțiunilor. Nu am putut ocupa mult timp această demnitate din cauză că ideile mele de severitate diferă foarte mult de ale majorității membrilor Consiliului acestei Secțiuni.

* * *

Și acum, înainte de a încheia să-mi mai acordați încă câteva minute pentru a-mi manifesta cu această ocaziune sentimentele de recunoștință și de mulțumire.

Nu pot lăsa să treacă momentele actuale de mulțumire sufletească ce mi le-au procurat vorbitorii de azi, fără să aduc mai întâiu un prinos de recunoștință memoriei mamei mele, care cu mari greutăți, după moartea tatălui meu, a făcut tot ce i-a stat prin putință ca să-mi pot împlini dorința de a mă instrui și să pot absolvi o școală tecnică superioară pentru a deveni inginer. Imi sunt și acum neuitate nopțile lungi în care îmi pregăteam lecțiile și examenele, sau făceam unele lucrări și în care nopți dânsa stătea lucrând alături de mine și îmi dedea din când în când câte un păhăruț cu vin sau o cafea, spre a mă întări.

Aduc aci expresiunea recunoștinței mele memoriei acelora dintre profesorii mei, cari prin munca lor, prin conștiinciozitatea lor și prin știința lor au contribuit la cultura și educația mea profesională.

Nu pot uita azi pe foștii mei asistenți repauzați TRAIAN LALESCU, ȘTEFAN MIREA, VINTILĂ EVOLCEANU și ION POPESCU pentru concursul pe care mi l'au dat la îndeplinirea sarcinilor mele de profesor.

Trecând acum la cei în viață, gândul meu se îndreaptă cu deosebite sentimente de recunoștință către Maiestatea Sa REGELE CAROL II, care cu ocaziunea acestei sărbătoriri a binevoit să-mi acorde înalta distincțiune care mi-a fost înmânată azi. Vă rog să vă uniți cu mine ca în această Școală, care îi poartă numele ca înalt protector, să strigăm: Trăiască MAIESTATEA SA REGELE CAROL II.

Mulțumesc D-lui Ministru FRANASOVICI care a raportat Maiestății Sale asupra vechei mele activități în Serviciul Ministerului

Lucrărilor Publice şi ca profesor al fostei Şcoale Naţionale de Poduri şi Şosele ce depindea de acel Minister, precum şi pentru cuvintele ce mi le-a transmis prin D-l Secretar General TRAIAN PÂRVU. Ii mulţumesc şi D-sale pentru sentimentele pe care şi le-a exprimat ca fost elev al meu.

Exprim toată recunoştinţa mea D-lui Ministru C. ANGELESCU care, după cum am spus, în trei rânduri şi-a exprimat încrederea în aptitudinile mele profesorale, punându-se barieră la plecarea mea din Şcoală, şi pentru încrederea pe care mi-a arătat-o numindu-mă în mai multe rânduri în Consiliul permanent al Instrucţiunii publice, pentru partea industrială. Ii mulţumesc pentru cuvintele pe care mi le-a transmis prin D-l Secretar General C. KIRIŢESCU, precum şi D-sale pentru cuvintele de laudă pe care mi le-a adresat din partea sa.

Exprim aci sentimentele mele de recunoştinţă profesorului meu, D-l D. EMMANUEL, dela prelegerile căruia am rămas cu cele mai plăcute amintiri, care s'a grăbit să mă felicite pentru această sărbătorire încă dela 10 Septemvrie şi care nu a lipsit nici azi dela dânsa; precum şi foştilor mei profesori în viaţă D-nii C. M. MIRONESCU şi O. BOIAN; de asemenea D-lor AL. DAVIDESCU şi General G. VĂLEANU, cari au suplinit câtva timp pe ANGHEL SALIGNY şi GENERALUL CULCER.

Mulţumesc D-lui Rector N. VASILESCU-KARPEN pentru concursul ce mi-a dat de a aplica principiile conducătoare în chestiuni de profesorat. De şi de multe ori am avut şi am încă diferenţe de vederi cu D-sa, acestea se datoresc mai mult forţelor exterioare care ne solicită şi la care eu pot rezista mai bine având un moment de inerţie mai mare; diferenţe fundamentale de idei între noi pentru desvoltarea culturii naţionale tecnice nu am putut constata. Ii mulţumesc pentrucă s'a asociat la dorinţa foştilor mei elevi de a se face această sărbătorire precum şi colegilor mei profesori, conferenţiari şi asistenţi cari au aderat la dânsa. Ii mulţumesc pentru cuvintele pe care mi le-a adresat ca reprezentant al Şcoalei şi pentru volumul omagial pe care mi l'a înmânat. Aduc totdeodată mulţumirile mele autorilor articolelor din acest volum care au ţinut să publice ceva din sforţările minţii D-lor într'un număr din Buletinul Şcoalei purtând la început o imagine a mea.

Mulţumesc D-lor reprezentanţi ai Instituţiunilor tecnice prin care am funcţionat odată, şi cari au profitat de această ocaziune ca să ne vorbească din viaţa mea ca inginer funcţionar al Statului şi ca membru în diferite Comisiuni şi Consilii şi să-mi laude, cu oarecare exagerări, activitatea depusă de mine în Serviciile publice.

Mulţumesc de asemenea D-lor reprezentanţi ai Instituţiunilor ştiinţifice şi culturale pe la care funcţionez încă şi cărora am căutat să le dau totdeauna tot sprijinul meu în măsura puterilor, mijloacelor şi timpului disponibil. In special mulţumesc Academiei Române, care încă din 1919, pe baza activităţii mele în domeniul cultural, mi-a făcut distinsa cinste de a mă număra printre membrii ei corespondenţi.

O surpriză a fost pentru mine cuvântarea plină de căldură a D-lui MIHAIL MANOILESCU, Preşedintele Asociaţiunii generale a Inginerilor. Mai întâiu eu nu fac parte din acea Asociaţiune, întru cât dela înfiinţarea ei la Iaşi am găsit că are scopuri paralele cu Societatea Politecnică, la care eram vechiu membru. Azi scopurile lor tind să se diferenţieze. Apoi, după cum v'a declarat-o aci, D-sa mi-a fost un elev căruia în Şcoală nu-i plăcea cum eram eu şi ar fi voit să fiu cum voia D-sa. Ii mulţumesc că a venit aci să dea un exemplu elevilor că multe din cele ce li se par rele în şcoală nu sunt rele pentru viitoarea carieră de inginer. De altfel, pe D-l MANOILESCU l'am cunoscut de când era elev în clasa V liceală, când s'a prezentat la un concurs al *Gazetei Matematice,* supraveghiat de mine la Şcoala fiilor de militari din Iaşi. Căuta să deslege o problemă de aritmetică pe care o propusesem şi pe care nu ştia de unde să o ia. Mă întreabă atunci dacă nu este greşit enunţul şi eu îi răspund că e bun. Il întreb însă de unde a dedus că ar fi enunţul greşit. Mi-a răspuns că o problemă bine enunţată este pe jumătate deslegată. Eu i-am spus atunci că am pus astfel problema ca să fie rezolvată în întregime, cum a şi făcut în urmă. Azi venind în şcoală am citit în un ziar că pe D-l MIHAIL MANOILESCU îl preocupă rezolvarea a trei probleme mari în calitatea de Preşedinte al Asociaţiunii generale a Inginerilor privitoare la Invăţământul tecnic, la Corpul tecnic şi la titlul de inginer. Ii urez să rezolve în întregime aceste trei mari probleme.

Mulţumesc foştilor mei elevi cari au ţinut ca şi pe calea sărbătoririi de azi să-şi manifesteze recunoştinţa şi simpatia faţă de sforţările pe care le-am făcut în această Şcoală pentru învăţământul tecnic şi pentru educarea profesională. Le mulţumesc pentru simpatia pe care mi-o manifestă în diferite ocaziuni şi pentru mulţumirea sufletească pe care mi-o procură când văd că fac lucrări mari şi frumoase care contribuesc la faima tecnicei noastre naţionale.

Am rămas cu totul plăcut impresionat când mi s'a comunicat ieri că actualii mei elevi s'au asociat la această sărbătorire şi că un reprezentant al lor va vorbi azi. Eram obişnuit să aud la adresa mea şi a ajutoarelor mele cuvinte aspre ca: şicanator, terorist, barbar, călău, etc. Acţiunea foştilor mei elevi de din afară să fi produs oare un reviriment şi în interiorul Şcoalei? In acest caz serbarea de azi, pe lângă caracterul ei de manifestare culturală ar rămâne şi de o mare utilitate pentru învăţământul tecnic superior la noi în ţară, căci ar fi arătat actualilor elevi că monumentele pe care le vor ridica în practica lor inginerească se vor aşeza pe temeliile ştiinţifice şi tecnice căpătate aci în Şcoală. De altfel nu pot nega că în fiecare an avem elevi cari ne fac o adevărată plăcere prin atenţiunea pe care o dau la cursuri, prin modul serios în care îşi pregătesc examenele, prin munca conştiincioasă şi chiar plăcută cu care redactează şi studiază proiectele, şi al cărora elevi unul dintre reprezentanţii de frunte este şi vorbitorul de azi. Vă mulţumesc pentru pergamentul pe care mi l-aţi înmânat şi pe care-l voiu păstra ca o plăcută amintire.

Mulţumesc tuturor acelora cari aţi venit să asistaţi la tămâierea care mi s'a făcut şi la spovedania pe care v'am făcut-o. In special zăresc înaintea mea pe D-l General MIHAIL IONESCU sub ale cărui ordine am fost o bună parte din timpul războiului nostru pentru întregirea neamului şi îi mulţumesc din inimă că a venit să ia parte la această sărbătorire.

Şi acum termin făcând urarea ca Invăţământul nostru tecnic superior să propăşească continuu şi să strălucească fără eclipse.

CĂRȚI VECHI DE MATEMATICĂ

D-l Inginer D. LEONIDA a donat *Gazetei Matematice* o carte veche de matematică intitulată:

„CL. GEORG. IGNAT. DE METZBURG, | *In Universitate Viennensis* AA. LL. ET | *Philosophiae Doctoris, Matheseos Professo* | *ris Caes. Regii Publici, et ordinarii* | INSTITUTIONES | MATHEMATICAE | *in usum* | *Tironus Conscriptae.* | *Viennae,* | *Tipis Joan Thomae nob. de Trattnern* | *Caes. Reg. Aulae Typogr. et Bibliopolae*".

Cartea e legată și coprinde trei tomuri, de 254, 202 și 150 pagini de 90 × 160 mm. Fiecare tom își are planșe separate cu figurile necesare. Cele trei tomuri au apărut în limba latină în anii 1776 — 1777. Primul coprinde 7 capitole de aritmetică și 11 de algebră; al doilea 5 despre linii, 3 despre arii, 3 despre solide și 35 despre secțiuni conice; al treilea 4 capitole de trigonometrie și 10 de geometrie practică.

In prima parte, după o prefață către cititori, se definește *matematica* după grecescul μάθησις (disciplină) și se arată că ea coprinde *aritmetica* pentru mărimile *discrete* și *geometria* pentru cele *continui.* Matematica poate fi *pură* sau *abstractă* și *mixtă* sau *aplicată.* Se explică ce se înțelege prin *definiție, axiomă, teoremă, problemă, postulat, ipoteză, lemă, experiență, corolar, scholion, analiză, sinteză.*

In Aritmetică se ocupă cu *numerația* și chiar cu *numerația palpabilă* a matematicianului orb SAUDERSON; de *speciile aritmeticei* (operațiunile). Inmulțirea o dispune ca și azi; la împărțire se repetă împărțitorul sub fiecare deîmpărțit parțial, iar câtul îl scrie la dreapta deîmpărțitului. Iată aci cum împarte pe 36448 prin 68:

36448	(536
68	
340	
244	
68	
204	
408	
68	
408	
0	

Urmează apoi numerele prime, *părțile alicuotte,* divizori, divizorul maximum comun, *numerele eterogene* (complexe); se trece la fracții ordinare care e *proprie* dacă nu trece de 1 și *improprie* în caz contrariu; ele pot fi *simple* dacă se iau din unitate și *compuse* când se ia fracții de fracții. Fracțiile însoțite de întregi sunt *mixte.* Se ocupă cu *simplificarea* fracțiilor, cu *aducerea la același numitor* și cu *operațiile* asupra fracțiilor. Aritmetica se termină cu *fracțiile zecimale.*

Algebra este *aritmetica universală*, şi i se mai zice *calculul literal* sau *aritmetica specioasă*. Ea se ocupă cu *cantităţi, operaţiuni* şi *relaţiuni*. Urmează operaţiile algebrice, fracţii, puteri şi rădăcini, ecuaţii, *ecuaţii patratice*, rapoarte, proporţii, *regula de aur* (de trei), regula de societate, progresii, combinări, permutări, logaritmi, o tabelă cu *bastoanele lui* NEPER, table cu logaritmii numerelor 1 — 10000 cu 6 zecimale şi table trigonometrice.

In tomul II se tratează geometria, care e definită ca ştiinţa cantităţilor continui. Se începe cu definiţiuni, cu unităţile de lungime în diferite ţări, cu postulate, altă serie de definiţiuni pentru cerc, asemănare, etc., şi apoi încep teoreme, cu demonstraţii şi corolarii. După unele demonstraţiuni se dau probleme ca aplicaţiuni ale teoremelor. Se studiază triunghiurile, patrulatere, poligoane, liniile proporţionale şi de *scala geometrica*. După o scurtă expunere în legătură cu planul, trece la măsurarea ariilor, la compararea şi transmutarea lor. Se ocupă apoi de geometria solidelor, de măsurarea suprafeţelor şi volumelor lor. Tomul se încheie cu descrierea secţiunilor conice. Cu această ocaziune dă şi noţiuni de geometria analitică.

In tomul III se studiază trigonometria plană cu exemple de rezolvarea numerică a triunghiurilor. Tot în acest tom se tratează geometria practică pentru ridicarea şi măsurarea câmpurilor, facerea hărţilor, probleme de planimetrie şi altimetrie, cu nivelment, parcelări. Tomul se termină cu tabele pentru uşurarea reducerii şi determinării unghiurilor.

Din această scurtă expunere se vede că colecţiunea de matematici a lui METZBURG era destul de complectă pentru uzul inginerilor şi oficerilor din secolul XVIII.

I. IONESCU.

EFORTURI SUFERITE DE AVION PE TIMPUL RESURSEI

1. Stabilirea ecuaţiilor generale.

Problema determinărei eforturilor suportate de un avion pe timpul sborurilor şi mai cu seamă pe timpul *resursei* (o redresare bruscă dintr'un picaj vertical cu viteză limită), prezintă încă foarte multe dificultăţi. In cele ce urmează mi-am propus să determin

aceste eforturi, eliminând dificultăţile de integrare, adoptând metoda de calcul prin «arce elementare».

Metoda calculelor traiectoriei unui proiectil, prin «arce elementare» este singura care a dus la rezultate satisfăcătoare în *Balistica Exterioară*.

Această metodă fiind foarte laborioasă, a fost sistematic înlăturată, căci nu se poate trage concluziuni elegante dintr'un studiu general, ci din numeroase şi obositoare cazuri particulare.

Metoda arcelor elementare a fost pentru prima dată utilizată în mare, pe timpul războiului mondial, în Franţa, pentru rezolvarea problemelor de Balistică Exterioară (când s'au stabilit aşa numitele *reţele balistice),* deoarece serviciul de Studii Balistice dispunea de un foarte mare număr de matematicieni mobilizaţi.

Am căutat să aplic această metodă şi în calculele aerodinamice, ori de câte ori mi-a fost posibil şi am căpătat rezultate foarte satisfăcătoare. O primă serie de rezultate au făcut chiar obiectul unei comunicări la *Cercul Aerotechnic Român* la 5 Februarie 1931.

* * *

Ecuaţiunile generale ale mişcărei unui avion, socotite numai în planul vertical de simetrie (aşa cum se mişcă avionul în cazul resurselor), sunt:

1) $$T + F_i = F_x + f_x - P \cdot \sin\theta$$

2) $$P \cdot \cos\theta + F_c - F_z + f_z = 0$$

3) $$\mathfrak{M}_g = 0$$

4) $$\frac{d\delta}{dt} = -\alpha \cdot \beta \cdot V \cdot \sin\theta \cdot \delta^{\frac{\beta-1}{\beta}}$$

unde:

$T = \frac{\eta \cdot W \cdot \nu}{V}$, este tracţiunea propulsorului;

$F_i = m \cdot \frac{dV}{dt}$, este inerţia;

$F_c = m \cdot \frac{V^2}{\rho} = m \cdot V \cdot \frac{d\theta}{dt}$, este forţa centrifugală;

$F_x = \frac{\delta}{16} C_x . S . V^2$, este rezistența la înaintare a avionului fără profundor;

$f_x = \frac{\delta}{16} . c_x . s . V^2$, este rezistența la înaintare a profundorului;

$F_z = \frac{\delta}{16} . C_z . S . V^2$, este portanța avionului fără profundor;

$f_z = \frac{\delta}{16} . c_z . s . V^2$, este portanța profundorului;

η, este randamentul elicei;

W, este puterea în *kgm* a motorului;

ν, un coeficient linear al densității δ a aerului, după care variază puterea motorului la diverse altitudini;

V, viteza avionului pe tangentă, în m/sec.

$m = \frac{P}{g}$, massa avionului;

θ, înclinarea tangentei pe traectorie;

, raza de curbură a traectoriei;

C_x, C_z, c_x, c_z, coeficienți aerodinamici de rezistență la înaintare și de portanță ai avionului fără profundor.

5) $$\mathfrak{M}_g = \mathfrak{M}(F) + \mathfrak{M}(T) + \mathfrak{M}(f)$$

unde F este rezistența aerului asupra avionului fără profundor și f rezistența asupra profundorului, iar $\mathfrak{M}$ (I) înseamnă momentul forței I în raport cu centrul de greutate al avionului.

α și β sunt coeficienți numerici ai *atmosferei standard,* unde se presupune că evoluiază avionul.

Caracteristicile geometrice ale avionului sunt:

S, suprafața totală portantă;

s » profundorului;

l, profunziunea medie a aripei.

Pe timpul *resursei,* avionul descrie o traiectorie curbă, pe care noi o vom substitui cu un contur poligonal, împărţind-o în «arce elementare», pentru un dt = *constant* dat şi admiţând că avionul merge pe coarda arcului.

La fiecare colţ al conturului poligonal vom presupune că înclinarea θ se schimbă brusc, apoi rămâne constant până parcurge latura conturului.

Cu această ipoteză înlăturăm influenţa ecuaţiei momentelor şi influenţa oscilaţiunilor.

In acest caz, ecuaţiunile rămase se mai pot scrie :

$$6)\quad dV = -\frac{dt}{m}\cdot\frac{\eta\,.\,W\,.\,\nu}{V}+\frac{dt}{m}\cdot\frac{C_x+c_x\cdot\frac{s}{S}}{16}\,.\,S\,V^2\delta - g\,.\,dt\,.\,\sin\theta.$$

$$7)\quad d\theta = \frac{dt}{m}\cdot\frac{C_z-c_z\cdot\frac{s}{S}}{16}\,.\,S\,.\,V\,.\,\delta-\frac{g\,.\,dt}{V}\,.\cos\theta.$$

$$8)\quad d\delta = -\alpha\,.\,\beta\,.\,V\,.\sin\theta\,.\,\delta^{\frac{\beta-1}{\beta}}\,.\,dt.$$

$$9)\quad \rho = \frac{dt}{d\theta}\,.\,V.$$

Coordonatele unui punct de pe traiectorie sunt:

$$10)\quad \begin{cases} x = \Sigma dx & \text{unde } dx = V\,.\,dt\,.\cos\theta \\ z = \Sigma dz & \text{unde } dz = V\,.\,dt\,.\sin\theta. \end{cases}$$

Cunoscând datele iniţiale, adică :

$V = V_0$ (viteza limită în picaj) ;

$\theta = 90^0$;

$\eta = \eta_0$ (randamentul în picaj) ;

$\left.\begin{matrix} C_x = C_{x_0} \;;\; c_x = c_{x_0} \\ C_z = C_{z_0} \;;\; c_z = c_{z_0} \end{matrix}\right\}$ (elementele aerodinamice în picaj) ;

$\delta = \delta_0$ (densitatea la altitudinea unde începe resursa) ;

dt = constant (dat) ;

Atunci elementele unui punct pe traiectorie, după un timp dt, vor fi :

$$V_1 = V_0 - dV \quad ; \quad \delta_1 = \delta_0 + d\delta$$

$$\theta_1 = 90^0 - d\theta \quad ; \quad \rho_1 = \frac{dt}{d\theta} \cdot V_1 ,$$

iar valorile caracteristicelor aerodinamice ale avionului se vor calcula plecând dela valoarea :

$$11) \qquad C_{z_1} = \frac{m \cdot \frac{V_1^2}{\rho_1} + P \cdot \cos\theta_1 + \frac{c_z S}{16} \cdot V_1^2 \cdot \delta_1}{\frac{\delta_1}{16} \cdot S \cdot V_1^2}$$

unde vom admite c_x şi c_z constanţi pe timpul resursei şi egali cu valoarea maximă a lor, profundorul fiind bracat la maximum.

Cunoscând pe C_{z_1}, pe polară vom deduce uşor şi pe C_{x_1}.

In modul acesta vom determina succesiv şi restul de puncte, de pe traiectoria de redresare a avionului.

Cunoscând deci o serie de puncte pe traiectorie, la intervale de timp dt, înseamnă că vom cunoaşte C_x, C_z, V, dV, ρ, θ, $d\theta$ în fiecare din aceste puncte, adică vom cunoaşte *eforturile* suferite de avion, *centrele de presiune* ale acestor eforturi şi coordonatele punctelor respective.

Observaţiune :

In calculele elementelor de arce intervine şi η, adică randamentul propulsorului care variază cu viteza şi cu numărul de ture, sau mai simplu variază cu expresiunea :

$$12) \qquad \gamma = \frac{V}{N \cdot D} .$$

Ţinând însă seamă că această variaţiune se petrece pe ramura coboritoare a curbei randamentului, dincolo de η *max.*, atunci, examinând aliura curbei, vedem că o putem substitui cu o ramură parabolică, ceeace ne permite să scriem că :

$$13) \qquad \eta = a \cdot \gamma + b \cdot \gamma^2$$

unde a şi b sunt doi coeficienţi numerici, determinaţi lesne dacă cunoaştem două valori particulare ale lui η, ceeace este uşor, căci ne este dat η *max.* şi η_0 care corespunde frânării ce o produce elicea, în cazul picajului cu viteză limită.

Astfel cunoscând N şi D, atunci formula 13) devine :

$$14) \qquad \eta = a' \cdot V + b' \cdot V^2$$

formă comodă în calculele cu arce elementare, unde :

$$a' = \frac{a}{N \cdot D} \quad \text{şi} \quad b' = \frac{b}{(N \cdot D)^2} .$$

2. Determinarea „factorilor de încercare statică".

Prin *factor de încercare statică* înţelegem raportul dintre efortul total al avionului şi greutatea lui, înmulţite cu un coeficient de siguranţă ε, care variază între 1,5 şi 2,5.

Din analiza rezultatelor de calcul ale unei resurse, voiu reţine deci valorile maxime ale eforturilor suportate de avion (aripă, ampenaje sau fuselaj) şi depărtarea maximă a centrului lor de presiune, la centrul de greutate al avionului.

Orice resursă însă se poate face în mai multe feluri :

a) — normal

b) — pe spate.

Apoi pentru fiecare caz în parte putem avea :

1) — picaj şi redresare cu elicea colată ;

2) — » » » » motorul în plin ;

3) — » » » » elicea liberă ;

4) — » cu motorul în ralanti şi redresare cu motorul în plin.

In toate cazurile se presupune situaţia cea mai defavorabilă a unui pilot care ar lucra brusc şi la maximum profundorul.

Iată acum şi rezultatele la care am ajuns :

1. *Eforturi suferite de aripă :*

FAZA RESURSEI	Factorul de încercare statică	Depărtarea centrului de presiune de centrul de greutate	Cazul de sbor după regulamentul actual
La începutul resursei normale	$2{,}5 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{C_{m_0}}{C_{x_0}}$	∞	III
Când tangenta la resursă este orizontală (resursă normală)	$1{,}10.\varepsilon_2 . \frac{\sqrt{C_{x_2}^2 + C_{z_2}^2}}{C_{x_0}}$	$\frac{l \, . \, C_{m_2}}{\sqrt{C_{x_2} + C_{z_2}}}$	II
La finele resursei normale	$0{,}44.\varepsilon_1 . \frac{\sqrt{C_x^2 + C_{z_1}^2}}{C_{x_1}}$	$\frac{l \, . \, C_{m_1}}{\sqrt{C_{x_1}^2 + C_{z_1}^2}}$	I
La finele resursei pe spate	$1{,}16.\varepsilon_4 . \frac{\sqrt{C_{x_4}^2 + C_{z_4}^2}}{C_{x_0}}$	$\frac{l \, . \, C_{m_4}}{\sqrt{C_{x_4}^2 + C_{z_4}^2}}$	Acest caz nu este în actualul regulament

$C_{x_{1,2,4}}$ şi $C_{z_{1,2,4}}$ sunt caracteristice aerodinamice ale avionului citite pe *polară,* iar $C_{m_{1,2,3}}$ coeficienţi de moment. In picaj cu viteza limită avem C_{x_1} şi C_{m_0} minime.

2. *Eforturi suferite de ampenaje şi deci de fuselaj :*

$$f_{z\,\max.} = k_z \cdot \frac{s}{S} F_I$$

$$f_{x\,\max.} = k_x \cdot \frac{s}{S} \cdot F_I$$

unde F_I este efortul total suferit de aripă la finele resursei normale (cazul I după actualul regulament), iar :

$k_z = 1{,}32$ (în actualul regulament este egal cu : $\frac{3}{5}$);

$k_x = \frac{1}{5}$ (în actualele regulamente se neglijează).

Observaţiuni.

Valoarea coeficientului de siguranţă nu este aceeaşi pentru fiecare fază a resursei, căci pericolul *vibraţiunilor* este cu atât mai mare, cu cât viteza V este mai mare, de aceea vom admite că valorile coeficientului de siguranţă vor varia direct proporţional cu viteza. Prin urmare vom lua :

$$\varepsilon = 2 \quad \text{pentru V maxim}$$

$$\varepsilon = 1{,}5 \quad \text{» V minim.}$$

Făcând deci o serie de aplicaţiuni am ajuns la concluzia că, pentru actualele avioane putem lua :

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_2 = 2{,}0 \text{ sau } 2{,}50$$

$$\varepsilon_1 = \frac{4}{5}\varepsilon_0 = 1{,}6 \text{ sau } 2{,}00$$

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 = 1{,}0 \text{ sau } 1{,}25$$

valori medii — valori maxime

Concluziuni :

1. Valorile factorilor de încercare statică, calculaţi prin metoda arcelor elementare, sunt incontestabil mai reale, decât valorile actualelor regulamente de calcul.

2. Analiza resursei pe spate, calculată prin arce elementare, relevă un efort foarte periculos, suferit de avion, neglijat în actualele regulamente.

MAIOR I. LINTEŞ.

NOTE MATEMATICE

22. *Asupra unei ecuaţiuni în numere întregi.* GERONO a dat o elegantă soluţie în numere întregi pozitive ecuaţiunei:

$$1 + x + x^2 + x^3 = y^2 \tag{1}$$

propusă de H. BROCARD [1]).

Raţionamentul întrebuinţat de GERONO conduce cu uşurinţă la rezolvarea în numere întregi pozitive a ecuaţiunei generale

$$1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} = y \tag{2}$$

în care n este un întreg oarecare.

Ecuaţia (2) se poate scrie

$$(x^n + 1)(x^{2n} + 1) = y^2 .$$

Numerele întregi $x^n + 1$ şi $x^{2n} + 1$ au neapărat un divizor comun altul de cât unu, căci dacă ar fi prime între ele ar fi patrate perfecte. Ori $(x^n)^2 + 1$ nu poate fi patrat perfect.

Cum

$$x^{2n} + 1 = (x^n - 1)(x^n + 1) + 2$$

divizorul comun al lui $x^n + 1$, $x^{2n} + 1$ este 2.

Rezultă că fiecare din numerele $x^n + 1$, $x^{2n} + 1$ este dublul unui patrat, aşa că

$$x^n + 1 = 2a^2 \ , \ x^{2n} + 1 = 2b^2 .$$

Eliminarea lui x^n între aceste egalităţi conduce la ecuaţiunea

$$a^4 + (a^2 - 1)^2 = b^2 \tag{3}$$

care arată că b este un număr nepereche, prim cu a şi cu $a^2 - 1$, căci dacă ar avea un divizor comun cu unul din aceste numere acel divizor ar divide şi pe celălalt, ceeace este imposibil căci a şi $a^2 - 1$ sunt prime între ele.

---

1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1875—288 şi 1877—230.

Ecuaţiunea (3) nu admite însă de cât soluţiile pozitive [1]) :

$$a = 1 \quad \text{şi} \quad a = 2$$

pentru care

$$x^n = 1 \quad \text{şi} \quad x^n = 7$$

ceeace atrage.

$$n = 0 \quad \text{şi} \quad n = 1.$$

Rezultă că ecuaţiunea (1) nu admite decât următoarele 2 soluţiuni pozitive:

$$x = 1 \ , \ y = 2, \quad \text{pentru } n = 0$$

$$x = 7 \ , \ y = 20, \quad \text{pentru } n = 1.$$

V. THÉBAULT
(Le Mans, Franţa).

23. *Câteva egalităţi multigrade de ordin superior.* I. Numim egalitate multigradă un sistem diofantian de forma

$$a_1^p + a_2^p + \ldots = b_1^p + b_2^p + \ldots$$

în care numerele a_i , b_i , p sunt întregi, p având diferite valori întregi consecutive. Pentru astfel de relaţiuni întrebuinţăm notaţiunile :

$$(a_1, \ a_2, \ \ldots) = (b_1, \ b_2, \ \ldots)$$

$$(p = 1, \ 2, \ldots)$$

S_p, fiind valoarea sumei pentru valorile corespunzătoare ale lui p. Numărul valorilor lui p dă ordinul egalităţii.

Iată câte-va exemple de egalităţi multigrade:

1°. O egalitate multigradă de ordinul doi cu câte trei termeni

$$(1, \ 4, \ 4)^p = (2, \ 2, \ 5)^p$$

$$(p = 1, \ 2)$$

$$S_1 = 9 \ ; \ S_2 = 33.$$

---

1) GERONO, loc. cit.

2°. O egalitate *decigradă* cu câte 14 termeni

$$(1, 9, 21, 41, 71, 83, 95, 103, 107, 115, 157, 165, 187, 189)^p =$$

$$(3, 5, 27, 35, 77, 85, 89, 97, 109, 121, 151, 171, 183, 191)^p$$

$$(p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$$

$$S_1 = 1344 \ ; \ S_2 = \ldots$$

3°. Exemplu de egalitate *undecigradă* cu câte 20 termeni în fiecare membru:

$$(1, 11, 13, 21, 41, 43, 71, 83, 93, 95, 105, 107, 117, 129,$$

$$157, 159, 179, 187, 189, 199)^p =$$

$$(3, 5, 17, 27, 29, 49, 77, 79, 89, 91, 109, 111, 121, 123,$$

$$151, 171, 173, 183, 195, 197)$$

$$[p = 1, 2, 3, \ldots, 10, 11]$$

$$S_1 = 2000, \text{ etc.}$$

4°. O egalitate *duodecigradă* cu câte 26 termeni în fiecare membru:

$$(1, 7, 11, 19, 21, 31, 41, 51, 71, 81, 83, 93, 93, 105, 113,$$

$$117, 125, 129, 153, 157, 175, 179, 185, 187, 199, 199)^p =$$

$$(3, 3, 15, 17, 23, 27, 45, 49, 73, 77, 85, 89, 97, 109,$$

$$109, 119, 121, 131, 151, 161, 171, 181, 183, 191, 195, 201)$$

$$[p = 1, 2, 3 \ldots, 11, 12]$$

$$S_1 = 2626, \text{ etc.}$$

Am format de asemeni o relație adevărată pentru ($p = 1, 2, 3, \ldots,$ 12, 13) cu 36 termeni în fiecare membru și una adevărată pentru ($p = 1, 2, 3, \ldots$ 13, 14) cu câte 46 termeni în fiecare membru

II. Plecând de la egalitatea *duodecigradă* indicată la numărul precedent voi forma o altă egalitate multigradă, adevărată numai pentru valorile neperechi 1, 3, 5, 7, 9, 11 ale lui p. Pentru aceasta am scăzut din fiecare termen, câtul sumei termenilor prin numărul

termenilor relativ la un membru al egalității *duodecigrade*. In cazul de față $2626 : 26 = 101$ și am relațiunea adevărată

$$(-100, -94, -90, -82, -80, -70, -60, -50, -30,$$
$$-20, -18, -8, -8, +4, +12, +16, +24, +28, +52,$$
$$+56, +74, +78, +84, +86, +98, +98)^p = (-98, -98,$$
$$-86, \ldots +90, +94, +100).$$

Această egalitate, după o proprietate generală a egalităților multigrade, adevărată pentru valori consecutive ale exponentului și începând cu 1, are loc pentru $p = 1, 2, 3, \ldots 10, 11, 12$. — Dar, cum termenii membrului al doilea sunt respectiv termenii membrului întâi cu semne schimbate, are loc evident pentru toate valorile perechi ale exponentului. — Mai mult, se poate scrie, împărțind toți termenii cu 2:

$$(4, 4, 9, 10, 15, 25, 30, 35, 40, 41, 45, 47, 100)^p =$$
$$(2, 6, 8, 12, 14, 26, 28, 37, 39, 42, 43, 49, 49)$$
$$[p = 1, 3, 5, 7, 9, 11)$$
$$S_1 = 355, \quad S_3 = 543601, \quad S_5 = 1032137305, \text{ etc.}$$

Plecând de la o relație adevărată pentru primele 14 grade, am format prin același procedeu pe următoarea, care are câte 23 de termeni de membru:

$$(1, 7, 7, 11, 13, 13, 13, 15, 19, 21, 25, 27, 27, 29, 36, 37, 38,$$
$$43, 44, 48, 50, 50)^p =$$
$$(3, 4, 10, 10, 10, 12, 16, 16, 18, 22, 24, 24, 30, 32, 33, 35,$$
$$39, 45, 46, 46, 47, 53, 53)$$
$$[p = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13]$$
$$S_1 = 628; \quad S_3 = 942412, \text{ etc.}$$

A. GLODEN.
(Luxemburg).

24. *Numere interesante cu 10 cifre diferite.* D-l V. THÉBAULT a propus în *Mathesis*, Vol. XLVIII pag. 462, problema 2875, căreia nu i s-a publicat încă soluţia. Enunţul acestei probleme este :

Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 luate câte o singură dată să se formeze un număr care divizat prin 3, 6 sau 9, să dea un cât format din cele opt cifre diferite de 3, 6 sau 9.

Am dat acestei probleme o extensiune care se publică sub formă de note în *Revista Matematică din Timişoara* cu începere de la pag. 80 Vol. XVI.

In cele ce urmează îi voiu da o nouă extensiune şi anume :

Utilizând câte o singură dată pe cele 10 cifre ale sistemului zecimal să se formeze un număr N, *care să fie egal cu produsul dintre una din cifre* p *şi un număr* N_p format din celelalte 9 cifre.

$$(1) \qquad N = p \times N_p .$$

Se vede de la început ca $p \neq 0$ şi $\neq 1$.

Deoarece

$$(2) \quad 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$$

N se divide prin 9 şi (1) arată că în membrul al doilea avem următoarele posibilităţi :

1°. p multiplu de 9, ceeace are loc când $p = 9$.

2°. p multiplu de 3 şi N_p multiplu de 3, are loc când $p = 3$, 6 sau 9.

3°. p prim cu 3 şi N_p multiplu de 9. Acest caz este imposibil căci (2) arată că dacă p este prim cu 3 şi suma cifrelor lui N_p este primă cu 3.

Concluzia este că problema ce ne-am pus nu poate avea soluţii decât pentru

$$p = 3,\ 6 \text{ sau } 9.$$

Vom da, în numerele următoare, soluţii pentru fiecare din aceste valori ale lui p.

G-L GH. BUICLIU.

25. *Asupra problemei 2421. G. M. Vol. XLII, pag. 140.*

Pentru ca determinantul Δ, care face obiectul susnumitei probleme, să fie nul, nu e nevoie numai de cât ca numerile din trei coloane consecutive să facă parte din şirul lui FIBONACCI, cum s'a arătat în generalizarea problemei dată la rezolvare, ci este destul ca numerele din trei coloane oarecare să îndeplinească condiţiunea:

$$k\,a_i = m\,a_p + n\,a_q$$

(indicii indicând coloane sau linii) căci şi în acest caz determinantul se descompune în doi determinanţi nuli ca având două linii sau coloane egale.

A. A. R.

26. *Asupra problemei 1058.* In articolul *„Asupra curbelor plane“* din G. M. Vol. XLI, p. 613 am tratat problema 1058 propusă de D-l Prof. G. ŢIŢEICA. Această problemă se poate deci considera ca rezolvată. In timpul din urmă D-l Prof. N. ABRAMESCU s'a ocupat de această chestiune în nota D-sale intitulată *„Sur l'étude de la forme d'une courbe ou d'une surface dans le voisinage de l'un de ses points“* şi apărută în Comptes Rendus de l'Acad. Sc. Paris, Tome 202, Nr. 17 (27 Aprilie 1936), p. 1937. Motivul pentru care în articolul meu lucrarea D-lui N. ABRAMESCU nu este citată, este că acest articol a fost trimis redacţiei Gazetei încă în anul 1927 însă, din motive necunoscute mie, nu a apărut atunci.

T. P.

27. *Indicatricea lui* BACALOGLU.

In articolul despre curbele sferice, publicat în *Grunerts Archiv der Mathematik und Phisyk,* v. 35 (1860), EMANOIL BACALOGLU porneşte de la cunoscuta *relaţie a lui* EULER — care dă raza de curbură a unei secţiuni normale într'o suprafaţă Σ —:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}$$

— φ fiind azimutul secţiunii considerate, R_1, R_2 cele două curburi principale. Considerând un sistem de coordonate polare plane

(spre exemplu în planul tangent) pentru care ρ şi $2\varphi = \omega$ sunt raza polară, respectiv unghiul polar, la variarea secţiunei φ va fi dat de

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\omega} \text{ unde } p = \frac{1}{r},\ e = \frac{t}{r},\ r = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

= curbura medie, $t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ torsiunea medie, adică punctul (ρ, ω) descrie o conică având focarul în pol şi semiaxele $\frac{R_1 + R_2}{2}$, $\sqrt{R_1 R_2}$. Se vede deci o analogie de procedare ca pentru găsirea indicatoarei lui DUPIN.

Indicatoarea lui BACALOGLU se reduce la dreapta $\rho = \frac{R_1}{\cos}$ pentru suprafeţele minima $(R_1 + R_2 = 0)$.

Ar fi interesant de găsit o interpretare geometrică simplă pentru această indicatoare a lui BACALOGLU.

ILIE POPA.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Vol. CXXII. Fasc. V. Noemvrie 1936. Buenos Aires. Sistem de inecuaţiuni lineare şi aplicaţiunile lor la studiul corpurilor convexe, de FRANCISCO LA MENZA.

Boletin Matematico. Anul IX. Nr. 8. Octomvrie 1936. Buenos Aires. Curba logicei, de L. IVANISSERICH. Reprezentarea geometrică a numerelor raţionale şi încercarea posibilităţii unei aritmetizări a geometriei, de M. O. GONZALEZ. Ecuaţii speciale, de A. MOESSNER. O nouă metodă de rezolvarea unui sistem de două ecuaţii de gradul întâiu cu două necunoscute, de F. ANGUITA.

Buletinul Societăţii Politecnice. Anul L. Nr. 9. Septemvrie 1936. Bucureşti.

Buletinul I. B. C. D. Anul I. Nr. 10 — 12. Octomvrie — Decemvrie 1936. Bucureşti.

Journal de Mathématiques Élémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul LXI. Nr. 5. 1 Decemvrie 1936. Paris.

Idem. Anul LXI. Nr. 6. 15 Decemvrie 1936. Paris.

Mathesis. Vol. L. Nr. 9. Noemvrie 1936. Gembloux. Asupra unei generalizări a ecuației lui LAPLACE bazată pe un sistem de numere ipercomplexe. Funcțiuni olomorfe de o variabilă ipercomplexă, de L. BRUWIER. Reprezentarea polinoamelor prin determinanți, de E. HEUCHAMPS. Curiozități aritmetice, de G. FISTIÉ. Exerciții de geometrie vectorială: parametru de distribuție relativ la o generatrice a unei normale, de R. DEAUX. Asupra inversiunii și asupra geometriei triunghiului și tetraedrului. de R. GOORMAGHTIGH.

Mathematica. Volumul XII. Publicată de Seminarul de Matematici al Universității Cluj. Cluj 1936. Remarque sur la définition fonctionelle d'un polynome d'une variable réelle, par T. POPOVICIU. Effecto que produce un campo magnetico en el movimento estacionario de una planeta en la mecanica einsteiniano, por GODOFREDO GARCIA. Das Sygygetische Büschel von Kurven 3. ordnung und die Figur von drei conjugierten Kegelschnitten, von E. A. WEISS. Sur la définition de la monogénéité et les fonctions monogènes aréolairement, par NICOLAS CIORĂNESCU. Sur une démonstration d'existence des ensembles infiniment universels, par W. SIERPINSKI. Sur les intégrales d'une équation différentielle du second ordre, par Z. BUTLEWSKI. Sur les fonctions univalentes, par M. BIERNACKI. Ueber Mittelwerten an Eikörpern, von W. BLASCHKE und O. VARGA. Notes sur les fonctions d'ordre supérieur, par TIBERIU POPOVICIU. Sur l'intégrale de M. A. DENJOY, par TH. ANGHELUTZA. Courbes sphériques de M. G. TZITZÉICA. On the arithmetic of surds among ancient Hindus, by A. N. SLUGHT. Une démonstration d'existence des suites transfinies décroissantes d'ensembles F_σ, par W. SIERPINSKI. Sur une classe d'équations algébriques par M. M. GHERMĂNESCU. Sur les fonctions analytiques dont les surfaces de RIEMANN ont des frontières totalement discontinues, par S. STOILOV. Sur quelque propriétés algébriques des courbes du faisceau DARBOUX-SEGRE par F. VYCICHIO. Quelques constatations sur le rôle des correspondances et des groupes dans la comparaison de deux collections infinies et sur l'utilité des procédés de couplage en analyse, par GEORGES BOULIGAND. Sur une famille d'ensembles parfaits, par W. SIERPINSKI. Sur certains invariants attachés aux fonctions analytiques, par GEORGES CALUGAREANO. Sur les fonctions génératrices des polynomes d'HERMITE, par GH. TH. GHEORGHIU. Sur la transformation asymptotique des courbes gauches, par ILIE T. POPA. Recherches analytiques des surfaces réglées appliquable sur le plan, par HENRI LEBÉSGUE. Sur „l'indétermination" du facteur général dans la théorie de SPEARMAN, par G. DARMOIS. Sur l'étude de la forme d'une courbe ou d'une surface dans le voisinage de l'un de ses points et une nouvelle interpretation de la cubique donnant les tangentes de DARBOUX et de SEGRE, par N. ABRAMESCO. Notes sur le fonctions convexes d'ordre supérieur (II), par TIBERIU POPOVICIU.

Revista Matematică din Timișoara: Anul XVI. Nr. 10. Decemvrie 1935. Timișoara. Soluțiile întregi ale ecuației $x^2 \pm y^2 = a\,10^{\alpha}$, de GH. CONSTANTINESCU.

Sphinx. Revue mensuelle des questions récréatives. Anul VII. Nr. 1. Ianuarie 1937. Bruxelles.

MAIOR I. LINTEŞ. Sintetizarea progreselor realizate în construcţia gurilor de foc. (Extras din „Revista Artileriei"). Timişoara 1936.

JOSE BARRAL SOUTO. Determinación de la paridad entre empréstitos con distintos sistemas de rescates. (Extras din „Revista de Ciencias Economicas"). Buenos Aires. 1936.

RENÉ GARNIER. *Leçons d'Algèbre et de Géométrie,* Tome II, Coniques et Quadriques, Paris, Gauthier-Villars, Editeur, 1936.

Ca şi Tomul I e vorba de un curs făcut la Facultatea de Ştiinţe din Paris şi redactat de D-l BADRIG GUENDJIAN, inginer. Chestiunile tratate sunt grupate în jurul polarităţii faţă de conice şi cuadrice, raportului anarmonic pe aceste două feluri de configuraţii patratice în plan şi în spaţiu, a punctelor ciclice şi ombilicalei, adică a elementelor absolute din plan şi spaţiu, în fine a fascicolelor de conice şi cuadrice.

Expunerea e clară şi elegantă şi merită să fie cetită de studenţii de anul I dela secţia matematică a Facultăţii de Ştiinţă. G. Ţ.

CERERI

262. Se afirmă că la Societatea de chirurgie din Bucureşti s'ar găsi manuscrise matematice ale Doctorului CAROL DAVILA, întemeietorul învăţământului medical la noi în ţară. Ar fi de dorit să se cerceteze exactitatea acestei afirmaţiuni şi dacă e întemeiată să ni se facă o dare de seamă a lor.

I. IONESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii

PAUL GAUTHIER. Mouvement d'un projectile dans l'air. Thèse. Paris 1867.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

S. NEWCOMB. La théorie du mouvement de la lune, son histoire et son état actuel. Rome 1908.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2510. *Se consideră un determinant de ordinul* n *în care prima linie este formată de nişte polinoame întregi în* x, *de gradul* $(n-1)$, *iar celelalte linii sunt respectiv derivatele de ordinul* 1, 2, ..., $(n-1)$. *Să se demonstreze că valoarea acestui determinant este independentă de* x.

S. KAUFMAN.

Prima soluție. Fie $P_1, P_2, \ldots, P^n$ n polinoame oarecare de gradul $(n-1)$ și considerăm determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_n \\ P'_1 & P'_2 & \ldots & P'_n \\ P''_1 & P''_2 & \ldots & P''_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_1^{(n-2)} & P_2^{(n-2)} & \ldots & P_n^{(n-2)} \\ P_1^{(n-1)} & P_2^{(n-1)} & \ldots & P_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

unde $P_k^{(i)}$ sunt derivatele de ordinul i a polinoamelor P_k și deci elementele ultimei linii din D sunt constante.

Pentru a dovedi că determinantul D nu depinde de x, vom demonstra că derivata acestui determinant este zero.

In adevăr, folosim teorema cunoscută, anume:

Dacă elementele unui determinant de ordinul n *sunt funcțiuni de o aceiași variabilă* x, *derivata determinantului, în raport cu această variabilă, este egală cu suma a* n *determinanți care se obțin, înlocuind elementele unei linii (sau coloane) prin derivatele respective ale acestor elemente.*

In virtutea acestei teoreme putem scri:

$$D' = \begin{vmatrix} P'_1 & P'_2 & \ldots & P'_n \\ P'_1 & P'_2 & \ldots & P'_n \\ P''_1 & P''_2 & \ldots & P''_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_1^{(n-2)} & P_2^{(n-2)} & \ldots & P_n^{(n-2)} \\ P_1^{(n-1)} & P_2^{(n-1)} & \ldots & P'^{n-1)}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_n \\ P''_1 & P''_2 & \ldots & P''_n \\ P''_1 & P''_2 & \ldots & P''_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_1^{(n-2)} & P_2^{(n-2)} & \ldots & P_n^{(n-2)} \\ P_1^{(n-1)} & P_2^{(n-1)} & \ldots & P_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$+ \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_n \\ P'_1 & P'_2 & \ldots & P'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_1^{(n-2)} & P_2^{(n-2)} & \ldots & P^{(n-2)} \\ P_1^{(n)} & P_2^{(n)} & \ldots & P^{(n)-n} \end{vmatrix}.$$

Dar primii $(n-1)$ determinanți sunt nuli ca având fiecare câte două linii egale, iar ultimul determinant este și el nul, căci elementele din ultima linie sunt zero, $P_k^{(n)} \equiv 0$, pentru $(k=1, 2, \ldots n)$.

Astfel avem:

$$D' \equiv 0,$$

de unde rezultă:

$$D = \text{const.},$$

și deci D nu depinde de x.

Soluții analoage date de D-nii: BARBĂLAT M. B., FLORESCU M. ULPIU (Craiova), FOCȘĂNEANU I. MIHAIL (Lt.), GEORGESCU I. C-TIN (Craiova), GHEORGHIU TH. GH., GHERMĂNESCU MIHAIL, KATZ SYMON, MĂTIEȘ V. ION, MIHĂIESCU S. ȘT., NICOLAU TH. AUREL, NICOLAU-DOBRIDOR C. I., NICULESCU MIRON, PANȚU Z. ION și TEODORESCU N.

Soluția 2-a. Considerăm determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(x) & F_2(x) & \ldots & F_n(x) \\ F'_1(x) & F'_2(x) & \ldots & F'_n(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_1^{(n-1)}(x) & F_2^{(n-1)}(x) & \ldots & F_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

unde $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$ sunt polinoame în x de gradele $(n-1)$.

Se adaogă elementelor din prima linie, suma produselor celorlalte linii înmulțite respectiv cu:

$$-x, \frac{x^2}{2!}, -\frac{x^3}{3!}, \ldots, (-1)^{n-1}\frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!},$$

și cum după formula lui BERNOULLI, avem:

$$F_k(x) - \frac{x}{1}F'_k + \frac{x^2}{2!}F''_k - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)}F_k^{(n-1)} = F_k(0),$$

rezultă că Δ devine:

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(0) & F_2(0) & \ldots & F_n(0) \\ F'_1(x) & F'_2(x) & \ldots & F'_n(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_1^{(n-1)}(x) & F_2^{(n-1)}(x) & \ldots & F_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Analog procedăm, adăogăm elementelor din linia 2-a, suma produselor celorlalte linii înmulţite respectiv cu:

$$-x, \frac{x^2}{2!}, -\frac{x^3}{3!}, \ldots, (-1)^{n-2}\frac{x^{n-2}}{(n-1)!},$$

şi se obţine folosind tot formula lui BERNOULLI:

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(0) & F_2(0) & \ldots & F_n(0) \\ F'_1(0) & F'_2(0) & \ldots & F'_n(0) \\ F''_1(x) & F''_2(x) & \ldots & F''_n(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_1^{(n-1)}(x) & F_2^{(n-1)}(x) & \ldots & F_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Continuând aceste operaţiuni, găsim:

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(0) & F_2(0) & \ldots & F_n(0) \\ F'_1(0) & F'_2(0) & \ldots & F'_n(0) \\ F''_1(0) & F''_2(0) & \ldots & F''_n(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_1^{(n-2)}(0) & F_2^{(n-2)}(0) & \ldots & F_n^{(n-2)}(0) \\ F_1^{(n-1)}(0) & F_2^{(n-1)}(0) & \ldots & F_n^{(n-1)}(0) \end{vmatrix}.$$

Observând că toate elementele din Δ nu depind de x, deci determinantul Δ este independent de x.

Soluţii date de D-nii: AGRONOMOF N., GHERMĂNESCU MIHAIL şi NICULESCU MIRON.

In ultimul timp s'a primit o foarte bună soluţie dela D-l D. MAVRODIN (Bucureşti).

V. A.

PROBLEMA 3134. *Să se rezolve în numere întregi sistemul.*

$$ax + b = by + c = cz + d = du + a.$$

I. IONESCU.

Luăm sistemul generalizat cu n necunoscute:

(1) $a_1 x_{11} + a_2 = a_2 x_{12} + a_3 = a_3 x_{13} + a_4 = \ldots = a_n x_{1n} + a_1$.

Presupunem că a_1, a_2, a_3, ..., a_n, luaţi în totalitatea lor, nu au nici un divizor comun; altfel îi împărţim pe toţi cu cel mai mare comun divizor al lor. Din prima egalitate se vede apoi că orice divizor al lui a_1 şi a_2 trebue să împartă şi pe a_3 căci altfel nu putem satisface prima egalitate în numere întregi. Acelaş raţionament, aplicat la oricare alte egalităţi, ne conduce la concluzii analoage. De aci conchidem că coeficienţii necunoscutelor trebue să fie primi între ei doi câte doi luaţi în toate modurile posibile. Să presupunem dar că această condiţiune este îndeplinită; altfel problema nu admite soluţiuni în numere întregi.

Fie a_{ki} şi a_{ik} o soluţie particulară a ecuaţii:

$$a_i\, x_{1i} - a_k\, x_{1k} = 1.$$

Rezultă dar că ecuaţia:

$$a_i\, x_{1i} + a_{i+1} = a_k\, x_{1k} + a_{k+1},$$

are soluţia generală:

$$x_{1i} = a_i\, x_{2k} + b_{ki}, \qquad x_{1k} = a_1\, x_{2k} + b_{ik},$$

unde:

$$b_{ki} = a_{ki}(a_{k+1} - a_{i+1}) \quad , \quad b_{ik} = a_{ik}\,(a_{k+1} - a_{i+1}).$$

Luăm acum prima parte din şirul de egalităţi (1) şi o egalăm pe rând cu celelalte părţi şi găsim:

$$(2)\quad \begin{cases} x_{11} = a_2\, x_{21} + b_{12} = a_3\, x_{22} + b_{13} = \ldots = a_n\, x_{2,n-1} + b_{1n}, \\ x_{12} = a_1\, x_{21} + b_{21} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_1\, x_{2,n-1} + b_n\,. \end{cases}$$

Am găsit aci soluţiile generale pentru x_{1i} în funcţiune de $(n-1)$ parametre x_{2i}, care trebue să satisfacă sistemul (2). Acest sistem are soluţii, căci coeficienţii a_1, a_2, a_3, ..., a_n sunt primi între ei doi câte doi.

Cu acest sistem de $(n-1)$ necunoscute procedăm la fel ca şi cu sistemul dat şi găsim:

$$(3)\quad \begin{cases} x_{21} = a_3\, x_{31} + c_{23} = a_4\, x_{32} + c_{24} = \ldots = a_n\, x_{3,n-2} + c_{2n}, \\ x_{22} = a_1 x_{31} + c_{32},\ x_{23} = a_1 x_{32} + c_{42} \ldots,\ x_{2,n-1} = a_1 x_{3,n-2} + c_{n2} \end{cases}$$

Continuând tot așa vom ajunge la o ecuație cu două necunoscute:

$$a_{n-1}\, x_{n-1,1} + k_{n-2,n-1} = a_n\, x_{n-1,2} + k_{n-1,n},$$

a cărei soluție este:

$$x_{n-1,1} = a_n\, x_{n1} + 1_{n-1,n}\ ,\quad x_{n-1,2} = a_1\, x_{n1} + 1_{n,n-1}.$$

Pentru a găsi toate soluțiunile lui x_{11} vom lua următoarele egalități din cele stabilite mai înainte:

$$x_{11} = a_2\, x_{21} + b_{12};\ x_{21} = a_3\, x_{31} + c_{23};\ \ldots;\ x_{n-1,1} = a_n\, x_{n1} + 1_{n-1.n}.$$

Inmulțim aceste egalități respectiv cu 1; a_2, $a_2 a_3$, $a_2 a_3 a_4$, ..., $a_2 a_3 \ldots a_{n-1}$ și adunându-le găsim:

$$x_{11} = m x_{n1} + n_1,$$

în care:

$$m = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n\ ,\quad n = b_{12} + c_{23}\, a_2 + d_{34}\, a_2 a_3 + \ldots + 1_{n-1,n}\ a_2 \ldots a_n\ .$$

In acelaș mod procedăm pentru a găsi pe celelalte necunoscute. Obținem astfel:

$$\begin{cases} x_{12} = (m/a_2)\, x_{n1} + n_2, \\ x_{13} = (m/a_3)\, x_{n1} + n_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} = (m/a_n)\, x_{n1} + n_n. \end{cases}$$

Cu modul acesta am găsit soluțiile lui x_{11} în funcțiune de un singur parametru arbitrar x_{n1}.

Exemplu numeric. Fie sistemul de trei ecuații:

$$2x + 3 = 3y + 5 = 5z + 7 = 7u + 2.$$

Din ecuațiile:

$$2x + 3 = 3y + 5,\quad 2x + 3 = 5z + 7,\quad 2x + 3 = 7u + 2,$$

scoatem prin procedeul indicat:

$$x = 3x' + 4 = 5y' + 12 = 7z' - 4\ ,\ y = 2x' + 2\ ,\ z = 2y' + 4\ ,\ u = 2z' - 1.$$

Din ecuațiile:

$$3x' + 4 = 5y' + 12,\quad 3x' + 4 = 7z' - 4,$$

scoatem:

$$x' = 5x'' + 16 = 7y'' - 40,\quad y' = 3x'' + 8,\quad z' = 3y'' - 16.$$

Din ecuaţia:

$$5x'' + 16 = 7y'' - 40,$$

deducem:

$$x'' = 7x''' - 168, \qquad y'' = 5x''' - 112.$$

Dacă acum înmulţim respectiv cu 1, 3, 15 ecuaţiile:

$$x = 3x' + 4, \qquad x' = 5x'' + 16, \qquad x'' = 7x''' - 168,$$

şi le adunăm, găsim:

$$x = 105x''' - 2468.$$

Dacă înmulţim cu 1, 2 şi 10 ecuaţiile:

$$y = 2x' + 2, \qquad x' = 5x'' + 16, \qquad x'' = 7x''' - 168,$$

şi le adunăm, găsim:

$$y = 70x''' - 1646.$$

Dacă înmulţim cu 1, 2 şi 6 ecuaţiile:

$$z = 2y' + 4, \qquad y' = 3x'' + 8, \qquad x'' = 7x''' - 168,$$

şi le adunăm, găsim:

$$z = 42x''' - 988.$$

Dacă înmulţim cu 1, 2, şi 6 ecuaţiile:

$$u = 7z' - 1, \qquad z' = 3y'' - 16, \qquad y'' = 5x''' - 112,$$

şi le adunăm, găsim:

$$u = 30x''' - 705.$$

Ca să facem termenii liberi, pozitivi şi cât mai mici căutăm pe cel mai mare x''' care să facă pe x, y, z, u pozitivi. Impărţind termenii liberi cu coeficienţii lui x''' se găseşte că numărul 24 îndeplineşte această condiţiune. Punând $x''' = t + 24$ soluţiunile capătă forma:

$$x = 105t + 52, \quad y = 70t + 34, \quad z = 42t + 20, \quad u = 30t + 15.$$

Soluţiile minime pozitive ale necunoscutelor sunt dar pentru $t = 0$, şi anume 52, 34, 20, 15.

PROFESOR GH. CONSTANTINESCU.

Notă. La această problemă s'au primit numeroase soluţiuni incomplete sau eronate. Nici unul din cei ce au încercat-o nu au avut curiozitatea să vadă dacă formulele verifică cel puţin una din ecuaţiile date. Unii din corespondenţi au spus chiar că sistemul nu este posibil decât dacă $a = b = c = d$!

I. I.

PROBLEMA 3330. *Să se găsească integrala generală a ecuației diferențiale*

$$xy'' - 2y' - xy = 0,$$

exprimată cu ajutorul funcției exponențiale.

A. ANGELESCU.

Soluție dată de D-l GH. TH. GHEORGHIU.

Fie

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Să determinăm coeficienții a_k în așa fel ca y să fie o soluție a ecuației diferențiale dată. Va trebui să avem

$$(1) \quad x\Sigma n(n-1)a_n x^{n-2} - 2\Sigma n a_n x^{n-1} - x\Sigma a_n x^n = 0,$$

egalitate care trebuind să aibă loc pentru orice valori ale lui x, ne spune că

$$n(n-3)a_n = a_{n-2} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

de unde, printr'un procedeu cunoscut, din aproape în aproape, găsim valorile coeficienților, după cum indicele este cu soț sau fără soț:

$$a_{2p} = \frac{2(2p-1)}{(2p)!} a_2 \quad , \quad a_{2p+1} = \frac{6p}{(2p+1)!} a_3 \qquad (p > 1).$$

Egalând acum cu zero termenul liber din (1) deducem că $a_1 = 0$; iar coeficientul lui x egalat cu zero ne dă:

$$a_2 = -\frac{1}{2} a_0. \text{ Avem deci}$$

$$(2) \quad y = a_0 - a_0 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2p-1}{(2p)!} x^{2p} + 3a_3 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2p}{(2p+1)!} x^{2p+1},$$

a_0 și a_3 fiind două constante arbitrare. (2) este deci integrala generală a ecuației diferențiale propusă.

Să căutăm a exprima pe y cu ajutorul funcției exponențiale.

Se vede cu uşurinţă că avem succesiv

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2p-1}{(2p)!} x^{2p} = x \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

$$= x \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 \right),$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2p}{(2p+1)!} x^{2p+1} = x \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$= x \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 \right) - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x \right)$$

$$= x \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

şi deci

$$y = \frac{a_0}{2} [e^x + e^{-x} - x(e^x - e^{-x})] + \frac{3a_3}{2} [x(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})]$$

care se mai poate scrie sub forma

$$y = A(1-x)e^x + B(1+x)e^{-x},$$

A şi B fiind două constante arbitrare.

O altă formă a integralei generale este

$$y = (C_1 + C_2 x) \operatorname{ch} x - (C_1 x + C_2) \operatorname{sh} x,$$

C_1 şi C_2 fiind două constante arbitrare.

Alte soluţii date de D-nii: M. I. FOCŞENEANU şi E. ŞTEFĂNESCU.

PROBLEMA 4205. *Prin vârfurile triunghiului* ABC *se duc paralele pe care se înseamnă trei puncte* A′, B′, C′. *Să se exprime aria triunghiului* $\alpha\beta\gamma$ *ale cărui vârfuri divid segmentele* AA′, BB′, CC′ *în acelaşi raport* k *şi apoi să se determine* k *pentru care punctele* α, β, γ *sunt în linie dreaptă.*

V. THÉBAULT.

Iau ca axe de coordonate semiaxele BC şi BB′ care fac între ele unghiul θ şi fie

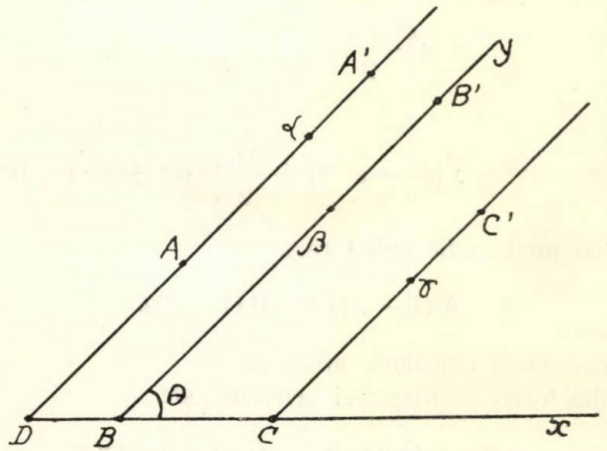
$$A\ (a, b) \quad ; \quad B\ (0, 0) \quad ; \quad C\ (c, 0)$$
$$A'\ (a, \lambda) \quad B'\ (0, \mu) \quad C'\ (c, \nu).$$

Deoarece

$$\frac{\alpha A}{\alpha A'} = \frac{\beta B}{\beta B'} = \frac{\gamma C}{\gamma C'} = k$$

rezultă pentru α, β, γ coordonatele

$$\alpha\left(x_1 = a, y_1 = \frac{b + \lambda k}{1 - k}\right); \beta\left(x_2 = 0, y_2 = \frac{-k\mu}{1-k}\right); \gamma\left(x_3 = c, y_3 = \frac{-k\nu}{1-k}\right).$$



Aşa că suprafaţa triunghiului $\alpha\beta\gamma$ va fi

$$S_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin\theta = \frac{\sin\theta}{2}\Delta.$$

Inlocuind în Δ pe x_i, y_i prin valorile lor şi dezvoltând se găseşte

$$\Delta = -k\{a(\mu - \nu) + c(\lambda - \mu)\} + bc$$

aşa că răspunsul la prima întrebare este

$$(1) \qquad S_1 = \frac{\sin\theta}{2}\{bc - k[a(\mu - \nu) + c(\lambda - \mu)]\}$$

Pentru partea a doua trebue ca Δ să fie nul, adică

$$k = \frac{bc}{a(\mu - \nu) + c(\lambda - \mu)} \cdot$$

Observaţiuni: 1°. Notând cu S, S' suprafaţa triunghiului ABC şi a triunghiului A' B' C' se observă că

$$S = \frac{\sin\theta}{2} bc \quad \text{şi} \quad S' = \frac{\sin\theta}{2} [a(\mu - \nu) + c(\lambda - \mu)]$$

şi introducând în valoarea lui S_1 se găseşte

$$S_1 = S - S', \tag{2}$$

iar valoarea lui k pentru care α, β, λ sunt colineare se pune sub forma

$$k = \frac{S}{S'} \cdot$$

2°. Relaţia (2) arată că punctele α, β, γ şi A', B', C' nu pot forma două sisteme de puncte colineare decât dacă şi A, B, C sunt colineare.

3°. Tot relaţia (2) arată că dacă A', B', C' sunt colineare atunci triunghiurile ABC şi $\alpha\beta\gamma$ sunt echivalente.

4°. D-l D. MAVRODIN a rezolvat foarte bine problema întrebuinţând coordonate dreptunghiulare şi găsind formule mai complicate pentru S_1 şi k. D-sa nu a observat relaţiunea care există între S, S' şi S_1.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4306. *Fie* A', B', C' *proiecţiile vârfurilor triunghiului de referinţă* ABC *pe laturile respective ale triunghiului podar* $A_1B_1C_1$ *al unui punct* M *din planul său.*

Axul de omologie al triunghiurilor ABC *şi* A'B'C' *este ax radical al cercurilor* A'B'C' *şi* $A_1B_1C_1$.

CONST. IONESCU-BUJOR.

Soluţie dată de D-l N. N. MIHĂILEANU (student, Bucureşti), CEZAR IVĂNESCU, I. I. ŢIŢEICA şi M. C. POSTELNICESCU (Liceul militar Mânăstirea Dealu), V. F. CEAUŞESCU (Lic. militar Tg. Mureş), D. LEBĂDĂ (Lic. militar Iaşi).

Problema este o aplicaţie a următoarei proprietăţi [1]),

---

1) C. IONESCU-BUJOR: „Asupra unor triunghiuri podare şi antipodare".— Revista Matematică din Timişoara, pag. 87, Vol. XIII.

„Fie M și N două puncte în planul unui triunghiu, simetrice în raport cu centrul cercului său circumscris.

Triunghiul podar al punctului M este omologic cu triunghiul antipodar al punctului N, centru de omologie fiind M, iar ax de omologie fiind axul radical al cercurilor circumscrise triunghiului de referință și triunghiului podar al lui M.

In cazul prezentei probleme, dreptele AA', BB', CC', concură în N, reciprocul punctului M; Cele două puncte M, N sunt simetrice în raport cu centrul cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$, iar A'B'C' și ABC sunt respectiv triunghiurile podar și antipodar al lui M în raport cu $A_1B_1C_1$ — deci putem aplica proprietatea generală enunțată.

C. I. B.

PROBLEMA 4413. *Să se construiască un triunghiu dreptunghiu având o ipotenuză dată și știind că o catetă este medie aritmetică a celorlalte două laturi ale triunghiului. Aceeași problemă pentru cazul când cateta este medie geometrică a celorlalte două laturi.*

O. N. ȚINO.

Soluțiune dată de Domnii: MIRCEA-LEONTE A. NEGREA, IANCU N. SAGER, ILIE IOAN ȚIȚEICA (Lic. Militar Mânăst. Dealu); VASILE CEAUȘESCU (Lic. Milit. „M. V." Tg. Mureș); M. C. POSTELNICESCU (Lic. Milit. Mânăst. Dealu); ION ȘABAC; MARCEL F. AMĂRĂȘTEANU; VINTILĂ GRIGORESCU; IOAN I. PETRESCU; GH. BOIANGIU.

1°. Insemnând măsura ipotenusei date cu a, cu x a catetei medie aritmetică a celorlalte două laturi și cu y a celei de-a doua catetă, avem pentru determinarea lui x și y sistemul:

$$x = \frac{a+y}{2}\,; \quad x^2 + y^2 = a^2 \tag{1}$$

care conduce la aflarea rădăcinii pozitive a ecuațiunii:

$$5y^2 + 2ay - 3a^2 = 0 \tag{2},$$

adică $y = \frac{3a}{5}$ și apoi obținem $x = \frac{4a}{5}$.

Aşa dar, *soluţiunea problemei* (în primul caz) *este un triunghiu dreptunghiu, asemenea cu triunghiul dreptunghiu cu laturile 3, 4, 5, construit pe lungimea* a *ca ipotenusă.*

2⁰. Pentru cazul când x este medie geometrică între a şi y, cele două catete sunt date de sistemul:

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \tag{3}$$

a cărui rezolvare conduce la rezolvarea ecuaţiunii:

$$y^2 + ay - a^2 = 0 \tag{4}$$

Rădăcina pozitivă a ecuaţiunii (4) fiind: $y = a \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, urmează că pentru construirea ei vom împărţi ipotenusa în medie şi extremă raţie. Având ipotenusa a şi cateta y, construirea triunghiului dreptunghiu cerut este imediată.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4443. *Intr'un patrulater inscriptibil* ABCD *avem relaţiile:*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{AM}+\overline{AD}\cdot\overline{BM}}{\overline{BC}\cdot\overline{DM}+\overline{AD}\cdot\overline{CM}} \; ; \; \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CD}\cdot\overline{BM}+\overline{AB}\cdot\overline{CM}}{\overline{CD}\cdot\overline{AM}+\overline{AB}\cdot\overline{DM}},$$

unde M *este punctul de întâlnire al diagonalelor.*

AVRAM N. CONSTANTIN.

Soluţiune dată de Domnii: MIRCEA A. NEGREA (Brăila); PANAIT C. MAZILU (Elev inginer); VINTILĂ GRIGORESCU (Mânăst. Dealu); VIRGIL S. METEA, VASILE F. CEAUŞEANU (Lic. Milit. Tg. Mureş); NICOLAE P. BOITARU, GHEORGHE I. MĂGALĂ, EMILIAN G. CRISTEA, A. P. C. I. DUMITRESCU, CONSTANTIN OPRAN, NICOLAE I. ROMAN, GHEORGHE STĂNCIULESCU (Lic. Milit. Cernăuţi); COSTEL COTESCU, PETRE P. COJOCARU, D. GR. DUMBRĂVESCU, IOAN STREDER, GHEORGHE I. VASILACHE, ALEXANDRU C. JIPA, AUREL I. CORNĂŢEANU, IOAN GR. BOGDAN, VIRGIL BUCUR, IOAN D. BUZINCU, C. I. C. DIMITRIU, VICTOR D. ENĂŞESCU, D. ŞT.

MIHALCEA, IORDACHE E. ENACHE, VASILE GR. BOGZA (Lic. Milit. Iaşi); ILIE IOAN ŢIŢEICA, M. C. POSTELNICESCU, M. MĂNAC, NIC. D. ŞTEFĂNESCU, P. DOBRESCU, GH. MIHĂILESCU, I. GH. ŞABAC, RADU V. APOSTOL, GH. I. BOIANGIU, M. NĂSTASE, VICTOR L. FLORESCU (Lic. Milit. „N. Filipescu"); ALEXANDRU D. STOICA (Lic. „Marele Voevod Mihai" Bucureşti); CONSTANTIN N. GAVRILESCU (Bacău); ERNEST GH. BEIU PALADI (Lic. „Mihai Viteazu" Bucureşti); DUMITRU C. ISAC (Acadânlar-Durostor); MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU (Lic. „Fr. Buzeşti, Craiova); B. UNTER.

Triunghiurile AMB şi CMD, având $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CDM$ şi $\sphericalangle AMB = \sphericalangle CMD$, sunt asemenea, adică avem şi proporţionalitatea laturilor omoloage:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{DM}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} \qquad (1)$$

Amplificând raportul al doilea cu $\overline{BC}$ şi pe cel de al treilea cu $\overline{AD}$ şi aplicând o proprietate a rapoartelor egale, avem imediat:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AM}\cdot\overline{BC} + \overline{BM}\cdot\overline{AD}}{\overline{DM}\cdot\overline{BC} + \overline{CM}\cdot\overline{AD}}$$

prima relaţiune cerută.

Pentru a stabili a doua relaţiune este de ajuns să observăm că ea devine prima dacă facem asupra literelor A, B, C, D cu care am notat vârfurile patrulaterului o permutare circulară. Deci ea este tot prima relaţiune aplicată însă celei de-a doua pereche de triunghiuri asemenea cu vârful în M.

Observare. Domnii: P. C. MAZILU şi VINTILĂ GRIGORESCU au observat că în locul segmentelor $\overline{BC}$ şi $\overline{AD}$ cu care am amplificat cele două rapoarte ale relaţiunii (1), puteam lua orice alt segment al figurii sau orice multiplu al unei puteri a lui. De exemplu, putem înlocui laturile $\overline{BC}$ şi $\overline{AD}$ prin diagonalele $\overline{AC}$ şi $\overline{BD}$ sau prin $\overline{BD}$ şi $\overline{AC}$. In acest caz încă proprietatea poate fi privită ca aceea cerută, însă stabilită pentru patrulaterul stelat inscris în cercul dat.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4500. *Dacă într'un triunghiu* ABC *raza cercului exînscris în unghiul* A *este egală cu diametrul cercului circumscris, dreapta care uneşte picioarele bisectoarelor interioare ale unghiurilor* B *şi* C *taie linia centrelor cercurilor înscris şi circumscris în centrul de similitudine extern al acelor cercuri.*

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de D-l M. L. A. NEGREA (Brăila).

Fie O, I, I_a centrele cercurilor circumscris, înscris şi exînscris de raze R, r, r_a. Notez cu Q_b, Q_c picioarele bisectoarelor din B şi C, şi cu M intersecţia lui $Q_b Q_c$ cu OI şi cu Δ_a, ∂_a distanţele lui O şi I la $Q_b O_c$.

Pe o figură se vede că:

$$(1) \qquad \frac{OM}{OI} = \frac{\Delta_a}{\partial_a}.$$

Dar formulele (7) şi (9) dela pag. 146, 147 Vol. XL. G. M. (articolul *Sur les bissectrices du triangle* de V. THÉBAULT) dau:

$$\Delta_a = \frac{R(R - r_a)}{d_a}, \quad \partial_a = \frac{-Rr}{d_a}$$

unde d_a este distanţa OI_a. Ducând aceste valori în (1) se găseşte:

$$(2) \qquad \frac{OM}{OI} = \frac{r_a - R}{r}.$$

Dacă:

$$r_a = 2R$$

(2) devine:

$$\frac{OM}{OI} = \frac{R}{r}$$

ceeace demonstrează teorema.

PROBLEMA 4501. *Să se găsească un cub de patru cifre, a cărui rădăcină cubică să fie egală cu suma cifrelor cubului căutat.*

M. GHERMĂNESCU.

Fie a, b, c, d cifrele cubului căutat, iar N rădăcina sa cubică. Din

$$N = a + b + c + d,$$

$$N^3 = 1000a + 100b + 10c + d,$$

deducem

$$N^3 - N = (N-1)\,N\,(N+1) = 999a + 99b + 9c = 9(111a + 11b + c).$$

Cum $N-1$, N, $N+1$ sunt trei numere consecutive, trebue ca unul din ele să fie divizibil cu 9. Pe de altă parte, deoarece N^3 are patru cifre, urmează

$$10 \leqslant N \leqslant 21.$$

Dacă $N-1 = 9$, urmează $N = 10$, $N^3 = 1000$, însă $1+0+0+0 \neq 10$.

Dacă $N-1 = 18$, urmează $N = 19$, $N^3 = 6859$, însă $6+8+5+9 \neq 19$.

Dacă $N = 18$, urmează $N^3 = 5832$, $5 + 8 + 3 + 2 = 18 = N$ şi obţinem soluţia $5832 = 18^3$.

Dacă $N+1 = 18$, urmează $N = 17$, $N^3 = 4913$, $4+9+1+3 = 17 = N$ şi obţinem a doua soluţie $4913 = 17^3$.

Problema are deci numai cele două soluţii de mai sus.

Notă. Au găsit soluţiile de mai sus, pe căi cu totul insuficiente însă, D-nii: D. CERCELARU, I. LEBĂDĂ şi P. MAZILU.

M. G.

PROBLEMA 4528. *Dacă într'un patrulater complet o latură trece prin centrul cercului circumscris triunghiului* ABC *format de celelalte trei laturi, atunci punctele comune cercurilor descrise pe digonalele patrulaterului ca diametre se găsesc: unul* ω *pe cercul* ABC, *celălalt* ω' *pe cercul celor nouă puncte ale triunghiului* ABC.

G-L GH. I. POPESCU.

Fie O centrul cercului ABC, M, N, P intersecţiile laturilor acestui triunghiu cu diametrul $\Delta\Delta'$ şi A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului ABC.

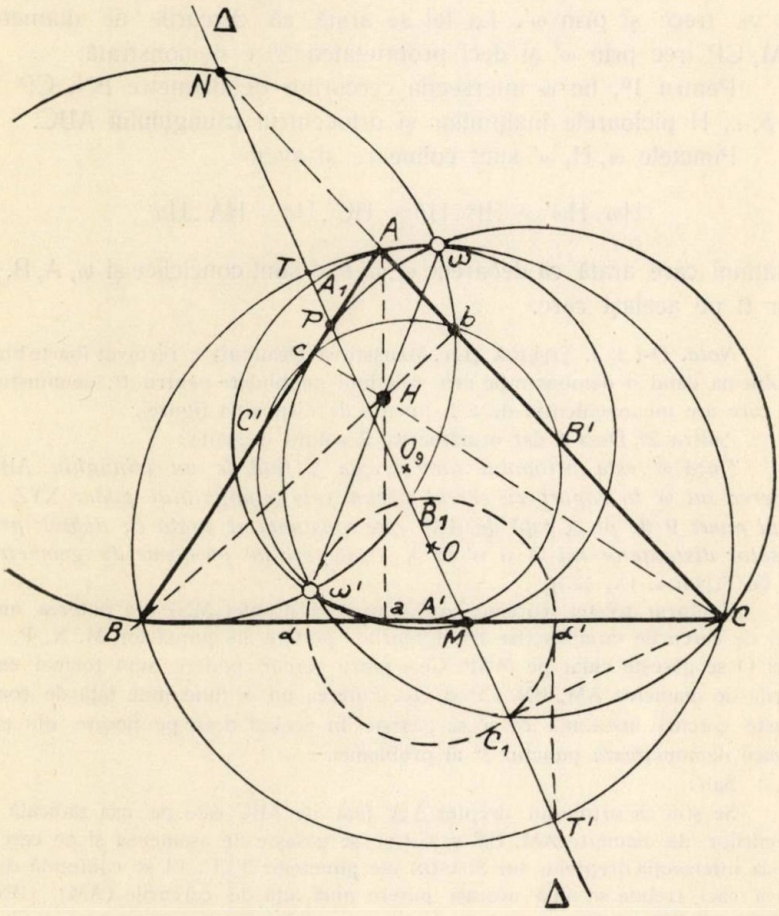
Se ştie că într'un patrulater complect oarecare cercurile de diametre AM, BN, CP se întâlnesc în două puncte ω, ω' aşezate pe linia ortocentrelor celor patru triunghiuri formate de laturile patrulaterului complect.

Prin enunț se cere să se demonstreze:

1°. *Că punctul* ω *se află pe cercul* O.

2°. *Că punctul* ω′ *se află pe cercul* O_9 *al triunghiului* ABC.

Să demonstrăm proprietatea dela 2°. Fie T, T′ extremitățile diametrului $\Delta\Delta'$; α, α′ proecțiile acestor puncte pe BC; A_1, B_1, C_1 intersecțiile lui $\Delta\Delta'$ cu cercurile de diametre AM, BN, CP.



Punctele α, α′, B_1, C_1 sunt pe un cerc cu centrul în A′ pentrucă perpendiculara pe mijlocul lui B_1C_1 trece prin mijlocul ui BC și deci al lui $\alpha\alpha'$. Pe de altă parte se știe că dreptele

lui SIMSON ale punctelor T, T' sunt rectangulare şi se întâlnesc într'un punct ω' de pe O_9. Cum acele drepte trec prin α, α' unghiul $\alpha\omega'\alpha'$ este drept şi cercul $\alpha B_1 \alpha' C_1$ de diametru $\alpha\alpha'$ trece prin ω'. La fel se arată că cercul cu centrul în C' şi trecând prin A_1, B_1 trece prin ω', intersecţia cu O_9, a dreptelor lui SIMSON ale punctelor T, T'. Rezultă că ω' este simetricul lui B_1 faţă de linia centrelor A', C' a celor două cercuri.

Cercul de diametru BN având centrul pe A'C' şi trecând prin B_1 va trece şi prin ω'. La fel se arată că cercurile de diametre AM, CP trec prin ω' şi deci proprietatea 2^0 e demonstrată.

Pentru 1^0, fie ω intersecţia cercurilor de diametre BN, CP şi *a*, *b*, *c*, H picioarele înălţimilor şi ortocentrul triunghiului ABC.

Punctele ω, H, ω' sunt colineare şi avem

$$H\omega \cdot H\omega' = HB \cdot Hb = HC \cdot Hc = HA \cdot Ha$$

relaţiuni care arată că deoarece ω', a, b, c sunt conciclice şi ω, A, B, C vor fi pe acelaşi cerc.

Notă. D-l I. I. ŢIŢEICA (Lic. Mânăstirea Dealului) a rezolvat foarte bine problema dând o demonstraţie prin relaţiuni unghiulare pentru 1^0, demonstraţie care are inconvenientul de a fi funcţie de dispoziţia figurei.

Pentru 2^0, D-sa a dat următoarele 2 soluţii elegante:

Dacă ω' este ortopolul unei drepte Δ faţă de un triunghiu ABC, *puterea lui ω' în raport cu cercul circumscris triunghiului podar* XYZ *al unui punct* P *de pe Δ faţă de* ABC *este constantă şi egală cu dublul produselor distanţelor lui* O *şi ω' la Δ. (Culegere de probleme de geometrie* de G. ŢIŢEICA, IX, 123).

Conform acestei teoreme, ortopolul ω' al dreptei MNP are puterea nulă faţă de cercurile circumscrise triunghiurilor podare ale punctelor M, N, P, O căci O se găseşte chiar pe MNP. Cele patru cercuri podare sunt tocmai cercurile de diametre AM, BN, CP şi O_9. Puterea lui ω' fiind nulă faţă de toate aceste cercuri înseamnă că ω' se găseşte în acelaşi timp pe fiecare din ele, ceeace demonstrează punctul 2^0 al problemei.

Sau:

Se ştie că ortopolul dreptei $\Delta\Delta'$ faţă de ABC este pe axa radicală a cercurilor de diametre AM, BN şi CP şi se găseşte de asemenea şi pe cercul O_9 la intersecţia dreptelor lui SIMSON ale punctelor T, T'. El se confundă deci cu ω' căci trebue să aibă aceeaşi putere nulă faţă de cercurile (AM), (BN), (CP) ca şi faţă de O_9.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4600. *Să se determine, pentru* $n = \infty$, *limita expresiunii:*

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} - \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-2}}.$$

M. GHERMĂNESCU.

1°. *Soluție* dată de D-nii: MARCEL AMĂRĂȘTEANU și D. O. SACTER.

Observăm că expresiunea dată se poate scrie

$$n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - (n-1)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Pe de altă parte, se știe că

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e\left(1-\frac{1}{2m}+\frac{\theta}{m^2}\right),$$

astfel că expresiunea de mai sus devine

$$ne\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{\theta}{n^2}\right) - (n-1)\,e\left(1-\frac{1}{2(n-1)}+\frac{\theta'}{(n-1)^2}\right) = e+\alpha$$

unde α tinde către zero, odată cu $\frac{1}{n}$. Rezultă că limita expresiunii date este e.

2°. *Soluție* dată de D-l DIM. MAVRODIN.

Să considerăm șirurile

$$u_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}, \quad v_n = n;$$

deducem, $v'_n = 1$, iar

$$u'_n = \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

deci $\lim u'_n = e$, iar $\lim \frac{u'_n}{v'_n} = e$.

Aplicând atunci propoziția:

Dacă raportul derivatelor termenilor generali u_n, v_n *a două şiruri, consideraţi ca funcţiuni de indicele* n *— are o limită pentru* $n = \infty$, *vom avea :*

$$\lim \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = \lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{u'_n}{v'_n},$$

stabilită de D-l Prof. M. GHERMĂNESCU în G. M. XLI, p. 90, vom obţine pentru expresiunea din enunţ

$$\lim E = \lim \frac{\dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}} - \dfrac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-2}}}{n-(n-1)} = \lim \frac{u'_n}{v'_n} = e.$$

Notă. La această problemă s'au trimis foarte multe încercări de soluţie, eronate însă dela un cap la altul.

Unii zic

$$\text{„}\lim n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim ne\text{“},$$

alţii : „deoarece

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{n=1}\right)^{n-1} = e,$$

vom putea scrie

$$\lim\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - (n-1)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right] = \lim\left[ne-(n-1)e\right] = e\text{“}!$$

Asemenea enormităţi sunt scrise chiar de unii din bunii corespondenţi ai Gazetei.

Cei mai mulţi însă, au aplicat teorema lui CESÀRO, neobservând că aci este vorba tocmai de reciproca ei, care nu este întotdeauna adevărată, după cum am arătat în Nota la care s'a referit D-l D. MAVRODIN în soluţia D-sale.

O soluţie bună a trimis, pe când nu era membru al Gazetei, D-l TH. STOICESCU. D-sa observă că expresiunea dată se poate pune sub forma

$$f(n) - f(n-1)$$

şi ii aplică atunci formula creşterilor finite. In fond, această metodă este un mod particular de a aplica proprietatea din Nota mea amintită, a cărei demonstraţie se bazează pe teorema *mediei* a lui CAUCHY

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad a < c < b$$

în care facem $a = n-1$, $b = n$, $\varphi = n$ şi trecem la limită.

M. G.

PROBLEMA 4606. *Să se construiască un triunghiu echilateral având vârfurile pe trei cercuri concentrice date.*

Să se determine relaţiunile dintre razele cercurilor date pentru cazurile când problema admite o singură soluţiune şi pentru cazul când latura triunghiului echilateral este egală cu diferenţa razelor extreme.

GH. BASACOV.

1°. Problema este cunoscută. Construcţia geometrică este dată în multe geometrii, din ele citãm *Exercices de géometrie* de F. G. M. septième edition unde se dă la Nr. 1520 generalizarea pentru cazul construcţiei unui triunghiu asemenea cu un triunghiu dat, sau *Exercices de Trigonometrie* de F. G. M. unde se dă la Nr. 689 construcţia geometrică pentru cazul triunghiului echilateral.

Dacă se înseamnă cu $a > b > c$ razele celor 3 cercuri şi cu x latura triunghiului lateral se demonstrează la exerciţiul 689 citat, că x este dat de ecuaţia

$$(1)\quad x^4-(a^2+b^2+c^2)x^2+a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2=0$$

al cărui realizant este

$$(2)\quad (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)=16p(p-a)(p-b)(p-c)$$

unde

$$a+b+c=2p.$$

Din (1) şi (2) se vede că (1) are rădăcini reale dacă fiecare din lungimile a, b, c este mai mică decât suma celorlalte două.

2°. Problema are o singură soluţiune când (1) are o singură rădăcină, deci când (2) este nul adică

$$(3)\qquad a=b+c.$$

Aceasta este relaţiunea cerută la prima întrebare.

3°. Când $x=a-c$, ecuaţia (1) devine

$$(a-c)^4-(a^2+b^2+c^2)(a-c)^2+a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2=0.$$

In caz când condiţia 3° e simultană cu 2°, relaţia precedentă devine

$$b^4-[b^2+c^2+(b+c)^2]b^2+(b+c^4)+b^4+c^4-(b+c)^2(b^2+c^2)-b^2c^2=0$$

$$\therefore\quad c^4+b^2c^2+2bc^3=0$$

$$\therefore\quad c^2(b+c)^2=0$$

$$\therefore\quad c=0 \quad \text{sau} \quad b=c=0.$$

Când $c = 0$, din 2° rezultă $a = b$ şi problema se reduce la a construi un triunghiu echilateral având două vârfuri pe un cerc şi al treilea vârf în centrul cercului.

Când $b = c = 0$ rezultă $a = 0$ şi problema se reduce la un cerc.

Au rezolvat problema, arătând că este cunoscută, D-ra ALEXANDRA AL. VASILESCU (Lic. de fete Alba Iulia) şi D-nii: L. V. FLORESCU (Lic. militar Târgovişte) şi V. ECKSTEIN.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4629. *In sistemul de numeraţie cu baza* 6, *să se găsească un patrat perfect de patru cifre, astfel ca acest patrat şi rădăcina sa să aibă cele şase cifre diferite între ele.*

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de D-ra ALEXANDRA AL. VASILESCU (Lic. de fete Alba Iulia) şi D-l E. VIŞA (Blaj).

Fie a, b, c, d, m, n cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 ale sistemului cu baza 6, scrise într'o ordine oarecare. După enunţ:

$$(1)\quad a \times 6^3 + b \times 6^2 + c \times 6 + d = 36 \times m^2 + 12 \times mn + n^2$$

care arată că $d - n^2$ trebue să se dividă prin 6 ceea ce are loc, pentru valorile cifrelor sistemului, când $d = n$, ceea ce este contra ipotezei sau când:

$$d = 4 \quad , \quad n = 2.$$

Ducând aceste valori în (1) şi simplificând obţinem:

$$(2)\qquad 6^2 \times a + 6 \times b + c = 2m\,(3m + 2)$$

deci c trebue să fie pereche. Din cifrele rămase 0, 1, 3, 5 numai O satisface această condiţie, aşa ca $c = 0$, iar (2) devine:

$$3\,(6 \times a + b) = m\,(3m + 2)$$

care arată că $m = 3$. Rezultă:

$$6a + b = 11$$

care pentru cifrele rămase 1 şi 5, nu-i posibilă decât pentru:

$$a = 1 \quad , \quad b = 5.$$

Problema are deci o singură soluţie, numerele:

$$32^2 = 1504$$

scrise în baza de numeraţie 6.

Soluţii foarte bune şi exacte, pe alte căi dela D-nii: M. L. A. NEGREA (Brăila), D. D. MATEI (Lic. internat, Iaşi); N. D. ŞTEFĂNESCU (Lic. Miiitar Târgovişte) şi I. A. MERBL (student).

PROBLEMA 4659. A, B, C *fiind unghiurile unui triunghiu, să se stabilească egalitatea*

$$\Sigma (\sin^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C)(\sin^2 B + \cos^2 A - \cos^2 C) = 4 \sin^2 A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^2 C.$$

C. IONESCU-BUJOR.

1°. *Soluţia I.* Se consideră identitatea:

$$(-a+b+c)(a-b+c)+(a-b+c)(a+b-c)+(a+b-c)(-a+b+c) = (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})(-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}),$$

în care punem

$$\sqrt{a} = \sin A \ , \ \sqrt{b} = \sin B \ , \ \sqrt{c} = \sin C$$

$$a = 1 - \cos^2 A \ , \ b = 1 - \cos^2 B \ , \ c = 1 - \cos^2 C$$

şi cum

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} .$$

(Relations entre les éléments d'un triangle. -- Vuibert, Ed. V. ex. 112, 113),

egalitatea devine

$$\left(16 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \right)^2 = \Sigma (\sin^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C)(\sin^2 B + \cos^2 A - \cos^2 C)$$

2°. *Soluţia II.* Având în vedere formulele

$$\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C$$

$$\Sigma \sin A \cos B \cos C = \sin A \sin B \sin C.$$

(Loc. cit. ex. 132, 151), membrul I se scrie succesiv

$$\Sigma (\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C)(\sin^2 B - \sin^2 A + \sin^2 C)$$
$$= 4 \sin A \sin B \sin C \Sigma \cos A \cos B \sin C = 4 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C.$$

Soluție dată de D-nii: A. GLODEN (Luxembourg), I. I. ȚIȚEICA (Liceul Mânăstirea Dealu), V. ECKSTEIN.

3°. Alte soluții date de D-nii: M. F. AMĂRĂȘTEANU (Craiova), A. CĂLINESCU (Roșiorii de Vede), I. COTIGHER (elev ing. București), S-LT. M. GRUMĂZESCU, R. V. APOSTOL și V. L. FLORESCU (Lic. militar „N. Filipescu"), EUG. MARCOVICI (Lic. Național Iași), M. A. NEGREA (Brăila), GAVRIL I. POPOVICIU (bacalaureat Urziceni Sălaj) și I. I. BUZINCU, P. P. COJOCARU, I. STREDER, E. ZĂHĂRESCU (Lic. militar Iași).

C. I. B.

PROBLEMA 4668. *Să se rezolve ecuația.*

$$x^2 + px + q = 0.$$

Știind că avem:

$$x_1 = px_2 + q$$

x_1 *și* x_2 *fiind rădăcinile ecuației.*

MAIOR I. LINTEȘ.

Soluția I-a. Avem relațiunile:

1) $$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 = px_2 + q. \end{cases}$$

Eliminând pe x_2 obținem:

2) $$x_1 = -\frac{p^2 - q}{p + 1}.$$

Ceeace ne dă apoi:

3) $$x_2 = -\frac{p + q}{p + 1}.$$

Ținând apoi seamă că:

4) $$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Şi înlocuind pe x_1 şi x_2, găsim:

5) $$p^3 - 3pq - q(q+1) = 0.$$

Singura rădăcină reală a acestei ecuaţii în p de gradul al 3-lea este:

6) $$p = \sqrt[3]{q^2} + \sqrt[3]{q}.$$

Inlocuind deci această valoare în relaţiunile 2) şi 3) găsim:

7) $$\begin{cases} x_1 = -\sqrt[3]{q^2} \\ x_2 = -\sqrt[3]{q}. \end{cases}$$

Cari sunt rădăcinile ecuaţiei.

Soluţia II-a. Inlocuind în ecuaţia dată x prin x_2 obţinem:

$$x_2^2 + px_2 + q = 0.$$

Cum avem:

$$x_1 = px_2 + q.$$

Urmează că vom avea:

8) $$x_2^2 + x_1 = 0.$$

Inlocuind apoi pe x_2 din 4) obţinem:

9) $$x_1^3 + q^2 = 0.$$

Inlocuind apoi pe x_1 din 4) obţinem:

10) $$x_2^3 + q = 0.$$

Ecuaţiile 9) şi 10) ne dau singurele soluţii reale, pe acele văzute în 7).

A dat o soluţie analoagă D-l M. D. DUMITRIU (Lic. Internat, Iaşi).

Soluţia III-a. Din relaţia 5) rezolvând pe q, obţinem:

11) $$q = \frac{-3p - 1 \pm (p+1)\sqrt{4p+1}}{2}.$$

Inlocuind pe q în expresiunile 2) şi 3) obţinem:

$$12)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-(2p+1) \pm \sqrt{4p+1}}{2} \\ x_2 = \dfrac{1 \mp \sqrt{4p+1}}{2} \end{cases}$$

unde semnele se corespund.

Au dat soluţiuni analoage D-nii: A. CĂLINESCU (prof. Roşiorii de Vede) şi V. L. FLORESCU (Lic. militar N. Filipescu).

a) Au stabilit relaţia 5) D-nii M. AMĂRĂŞTEANU, E. MARCOVICI, M. MECU, N. ŞTEFĂNESCU şi ŞT. D. NEGULESCU.

b) Au dat alte soluţii: D-ra A. VASILESCU şi D-l M. VASILESCU.

c) D-l G. I. POPOVICI a dat o soluţie analoagă soluţiei II, dar incomplectă.

d) Au stabilit numai relaţiile 2) şi 3) D-nii: D. RADA şi V. PĂDURET.

I. L.

PROBLEMA 4716. *Se consideră ecuaţiunile:*

$$x^2 + a\,x + b = 0 \quad ; \quad x^2 + p\,x + q = 0.$$

1°. *Să se formeze ecuaţiunea care are drept rădăcini:*

$$X_1 = x'_1\,x'_2 + x''_1\,x''_2 \quad ; \quad X_2 = x'_1\,x''_2 + x''_1\,x'_2$$

unde x'_1, x''_1 *sunt rădăcinile primei ecuaţiuni, iar* x'_2, x''_2 *sunt rădăcinile ecuaţiunii a doua.*

2°. *Dacă ecuaţiunea rezultantă are rădăcinile reale, ce putem spune despre ecuaţiunile date?*

GH. D. SIMIONESCU.

1°. Calculând suma şi produsul rădăcinilor X_1, X_2 obţinem:

$$X_1 + X_2 = (x'_1\,x'_2 + x''_1\,x''_2) + (x'_1\,x''_2 + x''_1\,x'_2) = (x'_1 + x''_1)\,(x'_2 + x''_2) = ap$$

$$X_1\,X_2 = (x'_1\,x'_2 + x''_1\,x''_2)\,(x'_1\,x''_2 + x''_1\,x'_2) = x'_1\,x''_1\,(x'^2_2 + x''^2_2) + x'_2\,x''_2\,(x'^2_1 + x''^2_1) = x'_1\,x''_1\,[(x'_2 + x''_2)^2 - 2\,x'_2\,x''_2] + x'_2\,x''_2\,[(x'_1 + x''_1)^2 - 2x'_1\,x''_2] = b\,(p^2 - 2q) + q\,(a^2 - 2b) = p^2\,b + a^2\,q - 4\,bq.$$

Ecuaţia cerută va fi deci:

$$(1)\qquad X^2 - ap\,X + a^2\,q + p^2 b - 4\,bq = 0.$$

2°. Pentru ca această ecuație să aibă rădăcinile reale trebue să avem:

$$a^2p^2 - 4(a^2q + p^2b - 4bq) \geqslant 0$$

sau:

$$(2) \qquad (a^2 - 4b)(p^2 - 4q) \geqslant 0.$$

Această condiție arată că *dacă ecuația* (1) *are rădăcini reale și distincte, ecuațiunile date au rădăcini de aceeași natură* (cantitățile a^2-4b și p^2-4q trebuind să aibă același semn); *iar dacă ecuațiunea* (1) *are rădăcinile confundate, cel puțin una din ecuațiunile date trebue să aibă rădăcinile confundate.*

S'au primit soluțiuni foarte bune dela D-nii: MIRCEA A. NEGREA (Brăila), G. G. CONSTANTINESCU, ION LEUCA, DIMITRIE MAVRODIN (Student), IACOV COTIGHER, GAVRIL POPOVICI (elevi ingineri), CONST. COTESCU (Bacău), CĂLIN I. C. DIMITRIU (Galați), IOAN GR. BOGDAN, PETRE P. COJOCARU, A. I. CORNĂȚEANU, TRAIAN IGNAȚIU, PETRE I. MAMUT, IOAN I. PĂSCARU, (elevi lic. mil. Iași), M. C. POSTELNICESCU, N. D. ȘTEFĂNESCU (elevi lic. mil. „N. Filipescu)", AURELIAN CĂLINESCU, ADOLF M. DEUTSCH.

S'au mai primit soluții dela D-nii: OCTAVIAN RĂDULESCU (lic. mil. „N. Filipescu"), NIC. GH. APOSTOL, DAN V. NISTORESCU, NIC. NEDELCU, CLAUDIU TANASCIUC (elevi ai lic. mil. Cernăuți), RADU L. POPOVICI (lic. mil. Iași), IOACHIM HARALAMBIE, JAREGHIE IOAN, JIPA C. ALEX., MARCOVICI EUGEN, PANTELIMON CONST., PETRESCU ACHILE, POPA D. MIRCEA, TURCU I. SANDU.

Notă. Dintre rezolvitorii anunțați pe copertă, unul nu a avut soluția bună, iar doi *camarazi* au trimes soluții identice ca dispoziție de calcul, text, prescurtări și greșeli. In consecință nu au fost menționați.

EXERCIȚII

11. Dacă d_a, d_b, d_c sunt distanțele dela centrul cercului circumscris la centrele cercurilor exînscrise unui triunghiu ABC, iar δ_a, δ_b, δ_c distanțele dela centrul cercului celor nouă puncte la centrele cercurilor exînscrise ale aceluiaș triunghiu, atunci există relația:

$$\begin{vmatrix} 1 & \delta_a & d^2a \\ 1 & \delta_b & d^2b \\ 1 & \delta_c & d^2c \end{vmatrix} = 0.$$

M. F. AMĂRĂȘTEANU.

R. Vom ține seama de relațiile cunoscute:

$$d^2a = R(R + 2r_a)\ ;\ \delta_a = \frac{R + 2r_a}{2}.$$

12. Dacă l_a, l_b, l_c sunt distanțele dela vârful unui triunghiu la centrul cercului său înscris și dacă m_a, m_b, m_c sunt distanțele dela centrele cercurilor exînscrise la centrul cercului înscris, avem relația:

$$\begin{vmatrix} 1 & l_a & m_b m_c \\ 1 & l_b & m_c m_a \\ 1 & l_c & m_a m_b \end{vmatrix} = 0.$$

M. F. AMĂRĂȘTEANU.

R. Avem:

$$l_a = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{4R \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = 4R \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$m_a = 4R \sin\frac{A}{2}$ (Compléments de Trig. F. G. M. pag. 187).

PROBLEME PROPUSE

4759. Printr'o sferă metalică goală în interior trece o axă cilindrică. Care este volumul golului rămas?

I. IONESCU.

4760. Să se găsiască un număr de două cifre diferite între ele și diferite de zero, egal cu suma a șapte cifre, toate diferite între ele și diferite de cifrele numărului căutat.

G-L. GH. BUICLIU.

4761. Se dau șase puncte pe un cerc în ordinea A, B, C, D, E, F. Se cere condiția necesară și suficientă ca dreptele AD, BE, $\overline{CF}$ să fie concurente, cunoscându-se dintre două puncte consecutive.

N. N. ALDEA.

4762. Fie în plan trei cercuri (O_i) cu centrele O_i, $i = 1, 2, 3$ Fie S_1 și S'_1 centrele de similitudine directă și inversă a cercurilor (O_2) și (O_3); S_2, S'_2; S_3, S'_3 punctele analoage. Fie O centrul cercului $O_1O_2O_3$. Să se arate că:

1°. Perpendicularele coborîte din S'_i respectiv pe $S_i O$, $i = 1, 2, 3$, sunt concurente.

2°. Perpendicularele coborîte din S_1 pe S'_1O, din S_2 pe S'_2O, din S'_3 pe S_3O sunt concurente.

3°. Tangentele în O_i la cercul $(O_1O_2O_3)$ se întâlnesc cu perpendicularele coborîte din S_i pe $S'_i O$ în trei puncte colineare.

4°. Tangentele în O_1, O_2, O_3 la cercul $(O_1O_2O_3)$ se întâlnesc respectiv cu perpendicularele coborîte din S_1 pe S'_1O, din S'_2 pe S_2O, din S'_3 pe S_3O în trei puncte colineare.

AD. GHEORGHIU.

4763. Cu numerele n, n^2 şi n^3 se poate construi un triunghiu?

ULPIU M. FLORESCU.

4764. Să se rezolve sistemul:

$$C_m^n \cdot x + C_m^{n+1} \cdot y + C_m^{n+2} \cdot z = m$$

$$C_{m+1}^n \cdot x + C_{m+1}^{n+1} \cdot y + C_{m+1}^{n+2} \cdot z = m + 1$$

$$C_{m+2}^n \cdot x + C_{m+2}^{n+1} \cdot y + C_{m+2}^{n+2} \cdot z = m + 2.$$

GH. D. SIMIONESCU.

4765. Fie un triunghiu ABC şi $A_1B_1C_1$ triunghiul său ortic. Înălţimile AA_1, BB_1, CC_1 întâlnesc dreptele B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 în punctele D, E, F. Notând cu $\overline{AD} = m$, $\overline{BE} = n$, $\overline{CF} = p$, să se demonstreze relaţia:

$$\frac{m\,\mathrm{tg}A + n\,\mathrm{tg}B + p\,\mathrm{tg}C}{2R\,\sin A\,\sin B\,\sin C} = \sec(A - B) + \sec(B - C) + \sec(C - A).$$

GH. DUMITRESCU.

4766. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$\frac{2\cos x - 1}{\cos x - 2} = \frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

4767. α, β, γ fiind unghiuri oarecare, există relaţia:

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma + \Sigma\,\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\,(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta)}{\Sigma\,\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\,(\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha)} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\,\sin(\beta+\gamma)\,\sin(\gamma+\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)\,\sin(\beta-\gamma)\,\sin(\gamma-\alpha)}.$$

C. IONESCU-BUJOR.

4768. Se dă un cerc şi un punct fix A pe el. Să se afle locul punctelor P care împart o coardă a cercului $\overline{AB}$ în acelaş raport cu arcele determinate pe cerc.

ION C. SCHILERU-DILI.

4769. Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
5a & 4a+b & 3a+2b & 3b+2a & 4b+a & 5b \\
10a^2 & 6a^2+4ab & 3a^2+6ab+b^2 & 3b^2+6ab+a^2 & 6b^2+4ab & 10b^2 \\
10a^3 & 4a^3+6a^2b & a^3+6a^2b+3ab^2 & b^3+6ab^2+3a^2b & 4b^3+6ab^2 & 10b^3 \\
5a^4 & a^4+4a^3b & 2a^3b+3a^2b^2 & 2ab^3+3a^2b^2 & b^4+4ab^3 & 5b^4 \\
a^5 & a^4b & a^3b^2 & a^2b^3 & ab^4 & b^5
\end{vmatrix}$$

VIRGIL CLAUDIAN.

4770. Adevărul ştiinţific, rezultat al cercetărilor empirice ale naturii, nu este absolut, tot aşa după cum absolută nu este nici fericirea pe care o urmăreşte omul, după porunca maximelor lui morale.

Doar „numerele“, dimpreună cu relaţiile dintre ele, tind către precizări absolute, căci acestea au caracter à-prioric, adică stau în afara câmpului experienţei simţurilor noastre, atât de inperfecte. De aceea s'a şi spus că numerele ar guverna lumea!

In această ordine de idei, simbolizând cifrele numerelor prin litere şi, într'un elan de optimism matematic, trecând peste caracterul de relativitate al ştiinţei empirice şi al moralei actuale, să încercăm să arătăm:

Care este probabilitatea cu care, prin mai multă matematică decât până aci, trebue să nădăjduim totuşi către relaţia absolută:

ştiinţă + morală = adevăr + fericire?

GH. ZAPAN.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Alexandrescu C. J. (4539, 747); *Amărăşteanu F. Marcel* (4747, 48, 50, 53, 56); *Apostol G. N.* (4714); *Arsavschi Alexe* (4713); *Beiu-Paladi Gh. E.* (4730); *Beschea C.* (4714); *Bogdan Gr. Ioan* (4691, 718, 52); *Ciurescu I. Radu* (4712, 36, 47, 50); *Comloşan Cornelia* (4747, 50, 52, 53); *Constantinescu G. G.* (2289, 90, 3660, 64, 92, 4232, 38, 634, 36, 49, 71, 73, 741); *Filică C. St.* (4718, 22, 35, 36, 47, 48, P); *Florescu L. Victor* (4435, 78, 545, 752, 53); *Goormaghtigh* (A); *Grumăzescu Mircea Subloc.* (4478, 586, 629, 736, 39, 43, 47, 48, 56); *Herman Victor* (4750, 52); *Imbru I.* (4714); *Ioachim L. H.* (4585, 714); *Ionescu D. S.* (4714); *Jipa C. Alex.* (4443); *Lascu Bal* (4701, 13, 14, 50, 51, P); *Marcovici Eugen* (4634, 63, 82, 99, 750, 53); *Matei I. I.* (4699); *Mateiu D. D-tru* (4718, 30); *Nedelcu V. N.* (4714); *Negrea A. Mircea Leonte* (4750, 56); *Nistorescu V. D.* (4714); *Pantelimon C. M.* (4634, 42); *Pascaru I. Const.* (4729); *Pascaru I. I.* (4585, 651, 756); *Petrescu Achille* (4634); *Petrescu I. I.* (4701, 14); *Pop A. A.* (4714); *Popa Mircea* (4634); *Popescu-Zorica N. Al.* (4756); *Popoviciu L. R.* (4585); *Postelnicescu C. M.* (4643, P); *Protopopescu M. Dan* (4747, 53, 55); *Rădulescu G. O.* (4701, 02); *Ripianu D-tru* (4713, 39, 47); *Segal J.* (4644); *Strohal R.* (4714); *Tanasiciuc V. C.* (4714); *Thébault V.* (N, P); *Theodorescu D.* (4714); *Țițeica I. I.* (4714); *Turcu Sandu* (4634); *Vasilescu-Stabu A. Mircea* (4737); *Vlad C. I. Mihai Subloc.* (4747, 50, 52, 53, 56).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe **o singură parte a foii și nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor GR. ZAPAN

C. 43120

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLII

NUMĂRUL 6. — FEBRUARIE 1937

BIBLIOTECA CENTRALĂ ... ASOCIAȚIUNII ... SIBIU

SUMARUL

1. Asupra razelor de curbură ale unor curbe plane . . . . . *R. Goormaghtigh.*
2. Asupra unor numere pitagorice . . . . *V. Thébault.*
3. Triunghiuri triomologice cu centrele de omologie colineare . . . . . *Gh. D. Simionescu.*
4. Noţiuni de geometrie cinematică . . . . *Eugen Vişa.*
5. Concursul „Gazetei Matematice".
6. Note Matematice: 28 — 32.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 263.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 2063, 2888, 3503, 4021, 4286, 4313, 4517, 4531, 4545, 4701, 4747.
11. Exerciţii: 13 — 15.
12. Probleme propuse: 4771 — 4782.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1937

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer-Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propus până în Septemvrie 1936 şi nerezolvate sunt enumărate pe coperta N-rului (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4724, 26, 31, 34, 40, 42, 49, 51, 61, 62, 64, 66, 68, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	220	260	80
5— 8 „	375	425	100
9—16 „	620	700	160
Coperta	120	160	80

Avem plăcerea a anunţa că dela 28 Ianuarie a. c., mai face parte din Societatea noastră şi Domnul Inginer HENRY THEODORU.

ASUPRA RAZELOR DE CURBURĂ ALE UNOR CURBE PLANE

1. In studiul său (G. M. XLII, 1936, p. 183) D-nul C. IONESCU-BUJOR a regăsit următoarea teoremă:

Dacă o dreaptă de direcţie constantă taie două curbe plane C_f şi C_g în puncte F şi G; unde razele de curbură ale acestor curbe sunt R_f şi R_g, şi dacă tangentele în F şi G la aceste curbe se taie într'un punct M, tangenta MT în M la curba C descrisă de M este astfel încât

$$\frac{R_f}{R_g} = \frac{\overline{MF}^2}{\overline{MG}^2} \frac{\sin TMG}{\sin TMF}.$$

Ne propunem să stabilim, printr'o metodă mai directă, o propoziţie mai generală.

Să considerăm o curbă (A) şi să presupunem că tangenta într'un punct A al acestei curbe taie două curbe C_f şi C_g în puncte F şi G, unde razele de curbură ale acestor curbe sunt R_f şi R_g. Tangentele în F şi G la aceste curbe se taie într'un punct M; fie MT tangenta în M la curba C, loc al punctului M.

Să numim F' şi G' centrele de curbură ale curbelor C_f şi C_g în F şi G să fie K şi L punctele unde normala în A la (A) taie FF' şi GG', apoi R şi S punctele unde FF' şi GG' întâlnesc normala la curba C în M.

Se ştie că pentru un segment XY care se deplasează într'un plan, extremităţile sale X, Y descriind curbe (X), (Y), raportul deplasărilor infinit mici ale punctelor X şi Y este egal cu acel al segmentelor la (X) în X şi la (Y) în Y, cuprinse între aceste puncte şi intersecţiile acestor normale cu normala la înfăşurătoarea lui XY [1]).

Avem deci

$$\frac{d(G)}{d(F)} = \frac{GL}{FK}, \quad \frac{d(M)}{d(G)} = \frac{MS}{GG'}, \quad \frac{d(F)}{d(M)} = \frac{FF'}{MR},$$

1) MANNHEIM, *Principes et Développements de Géométrie cinématique* 1894, p. 48.

de unde

$$\frac{R_f}{R_g} = \frac{MR \cdot FK}{MS \cdot GL}.$$

Dar

$$MR = \frac{MF}{\sin TMF}, \quad MS = \frac{MG}{\sin TMG}$$

$$\frac{FK}{GL} = \frac{FA}{\cos KFA} : \frac{GA}{\cos LGA} = \frac{AF}{AG} : \frac{MF}{MG}$$

şi în fine,

$$\frac{R_f}{R_g} = \frac{AF}{AG} \cdot \frac{\overline{MF}^2}{\overline{MG}^2} \cdot \frac{\sin TMG}{\sin TMF},$$

formulă care generalizează pe aceia amintită mai sus, căci dacă dreapta FG se deplasează paralel cu ea însăşi, raportul AF : AG este constant egal cu 1.

2°. Relaţia precedentă se poate pune sub o formă din care se deduce imediat construcţia tangentei MT.

Fie în adevăr, H intersecţia acestei tangente cu FG; vom avea

$$\frac{\sin TMG}{\sin MHG} = \frac{HG}{MG}, \quad \frac{\sin TMF}{\sin MHF} = \frac{HF}{MF},$$

şi se obţine

$$\frac{R_f}{R_g} = \frac{AF}{AG} \cdot \frac{HG}{HF} \cdot \frac{\overline{MF}^3}{\overline{MG}^3};$$

construcţia punctului H se deduce fără dificultate.

3. Această ultimă relaţie generalizează o proprietate clasică a conicelor. Dacă se presupune, în adevăr că FG este o coardă variabilă de direcţie constantă într'o conică, cu care coincid curbele C_f şi C_g, curba C este diametrul conjugat acestei direcţii, întâlnind una oarecare din coardele FG în mijlocul său şi se regăseşte că razele de curbură în două puncte ale unei conice sunt proporţionale cu cuburile segmentelor cuprinse între aceste două puncte şi intersecţia tangentelor în aceste puncte.

R. GOORMAGHTIGH
Bruges (Belgique).

ASUPRA UNOR NUMERE PITAGORICE

1. Soluțiunile în numere întregi ale ecuațiunei

$$y^2 + z^2 = x^2 \tag{1}$$

sunt date de formulele

$$x = a^2 + b^2 \ , \ y = a^2 - b^2 \ , \ z = 2ab \tag{2}$$

unde a și b sunt numere întregi, pozitive sau negative.

Dacă numerele y și z sunt consecutive, avem

$$a^2 - b^2 - 2ab = \pm 1. \tag{3}$$

1°. Luând $+1$ în (3), avem

$$(a+b)^2 - 2a^2 = -1 \tag{4}$$

adică $a+b$ și a sunt o soluție a ecuației lui FERMAT

$$x^2 - 2y^2 = -1. \tag{5}$$

Să punem

$$x = a+b \text{ și } y = a;$$

ecuația (5) se poate pune sub forma

$$v^2 = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2} + 1\right)^2 . \tag{6}$$

Numărul x dat de (5) fiind nepereche $\frac{x-1}{2}$ este întreg.

Din valorile care definesc pe x și y se scoate

$$a^2 = y^2 \ , \ b^2 = x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

așa că ținând seamă de (6) găsim

$$X = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2} + 1\right)^2 + (x-y)^2 \tag{7}$$

sau înlocuind pe x și y prin valorile lor $a+b$ și b,

$$X = \left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b-1}{2} + 1\right)^2 + b^2 . \tag{8}$$

2°. Dacă în (3) se ia (— 1) în membrul al doilea, avem

$$(a - b)^2 - 2b^2 = -1 \tag{9}$$

şi punând

$$x = a - b \quad \text{şi} \quad y = -b$$

se obţine

$$x^2 - 2y^2 = -1 \tag{10}$$

apoi ca la 1°:

$$y^2 = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2} + 1\right)^2 \tag{11}$$

$$\therefore \quad X = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2} + 1\right)^2 + (x+y)^2 \tag{12}$$

de unde în fine

$$X = \left(\frac{a-b-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b-1}{2} + 1\right)^2 + a^2. \tag{13}$$

3°. Din observaţiile de la 1° şi 2° rezultă că: *Orice număr al cărui patrat egal cu suma patratelor a două numere întregi consecutive, este descompozabil în suma patratelor a trei numere întregi dintre care cel puţin două sunt consecutive* [1]).

Exemple [2]). $29^2 = 20^2 + 21^2$ şi $29 = 2^2 + 3^2 + 4^2$

$$169^2 = 119^2 + 120^2 \text{ şi } 169 = 3^2 + 4^2 + 12^2$$

$$985^2 = 696^2 + 697^2 \text{ şi } 985 = 20^2 + 21^2 + 12^2.$$

2. Pentru ca numerele X să fie decompozabile în suma patratelor a trei numere întregi consecutive, trebue şi este suficient să avem, fie

$$a = \left(\frac{a-b-1}{2} - 1\right) \quad \text{sau} \quad \left(\frac{a-b-1}{2} + 2\right) \tag{14}$$

fie

$$b = \left(\frac{a-b-1}{2} - 1\right) \quad \text{sau} \quad \left(\frac{a+b-1}{2} + 2\right) \tag{15}$$

---

[1]) GERONO, *Nouvelles Annales de Mathématiqes*, p. 432.

[2]) Am dat primele valori ale lui x, y, z în *Mathesis*, 1934 — 227.

1°. Prima din ipotezele (14), care se reduce la

$$a + b = -3$$

nu convine.

2°. A doua ipoteză (14), pentru care

$$a + b = 3$$

este verificată numai când

$$a = 2 \quad \text{şi} \quad b = 1$$

$$\therefore \quad X = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5.$$

3°. Pentru cele două ipoteze (15), unde

$$a = b \pm 3$$

ecuaţia (3) se transformă în următoarele

$$(b \pm 3)^2 - b^2 - 2b(b \pm 3) = +1$$

care au ca rădăcină comună pe 2. — Deci $a = 5$ şi

$$X = 3^2 + 4^2 + 2^2 = 29.$$

In definitiv, din infinitatea de valori întregi X care verifică ecuaţia (1), în care Y şi Z sunt consecutivi, *numai numerele* $X = 5$, $X = 29$ *sunt decompozabile în suma patratelor a trei numere întregi consecutive.*

N. B. Se datoreşte deasemeni lui GÉRONO, următoarea proprietate a numărului 5 [1]):

Numărul 5 este singurul număr decompozabil în o sumă de două patrate consecutive [1]), mai mari ca zero, şi al cărui patrat să fie deasemeni decompozabil în suma a două patrate consecutive:

$$5 = 1^2 + 2^2 \quad \text{şi} \quad 5^2 = 3^2 + 4^2.$$

V. THÉBAULT
(Le Mans, France).

[1]) *Nouvelles Annalles de Mathématiques*, 1878 — 219.

TRIUNGHIURI TRIOMOLOGICE CU CENTRELE DE OMOLOGIE COLINEARE

Intr'un articol publicat în „Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliquées" al Şc. Politechnice din Bucureşti, fasc. 16 m'am ocupat de triunghiurile triomologice şi triortologice.

In cele ce urmează mă voiu ocupa de triunghiurile triomologice care au centrele de omologie colineare şi pentru aceasta e nevoie să reamintesc unele rezultate din articolul citat, care ne vor servi aci.

A) *Două triunghiuri triomologice împreună cu triunghiul format de axele de omologie alcătuesc un grup de trei triunghiuri astfel că două oarecare din ele sunt triomologice având laturile celui de al treilea drept axe de omologie.*

B) *Fie* Δ *dreapta polară şi* Γ *conica polară a unui punct* O *în raport cu un triunghiu* ABC. *Dacă se uneşte un punct de pe* Γ *cu punctele unde* Δ *taie laturile lui* ABC *se obţin trei drepte, care mai taie laturile triunghiului încă în şase puncte situate pe două drepte* Δ' *şi* Δ''.

C) *Dacă* A'B'C' *este un triunghiu triortologic cu* ABC, *atunci centrele de ortologie — obţinute ducând perpendiculare din vârfurile lui* ABC *pe laturile lui* A' B' C' — *se găsesc pe elipsa lui* STEINER *circumscrisă lui* ABC.

* * *

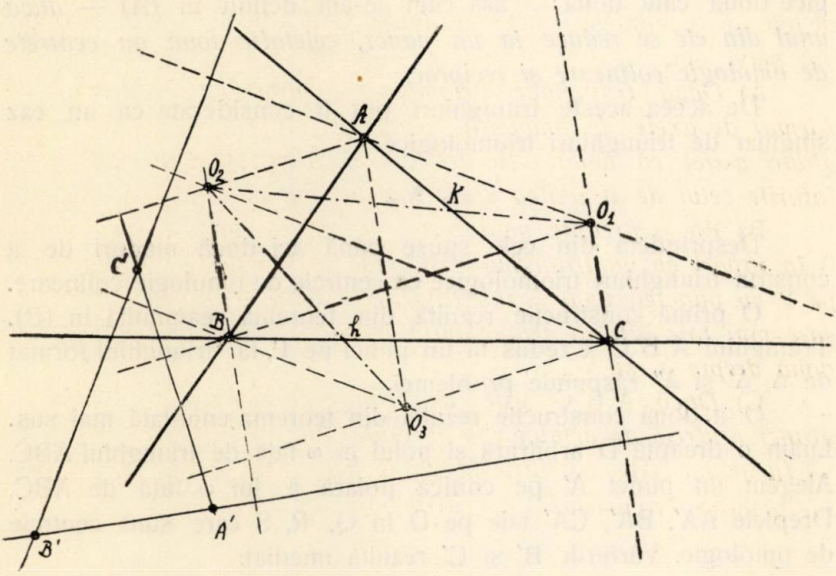
In figură triunghiul A'B'C' este triortologic cu ABC, iar O_1, O_2, O_3 sunt centrele de ortologie aşezate pe elipsa lui STEINER a lui ABC.

Se observă imediat însă că A'B'C' este triotologic şi cu $O_1 O_2 O_3$ având pe A, B, C ca centre de ortologie.

Deci A, B, C se găsesc pe elipsa lui STEINER circumscrisă lui O_1 O_2 O_3. Aşa dar elipsa care trece prin cele şase puncte A, B, C, O_1, O_2, O_3, este în acelaş timp elipsă STEINER pentru ambele triunghiuri, de unde rezultă că ABC şi $O_1 O_2 O_3$ au acelaş centru de greutate.

Se mai observă apoi că $O_1 O_2 O_3$ este triomologic cu ABC, având centrele de omologie aruncate la infinit, deci colineare.

Să notăm: $K \equiv (AC, O_1O_2)$; $H \equiv (BC, O_2O_3)$. Dreptele AO_1, BO_3, CO_2 fiind paralele, dreapta HK este polara punctului lor comun la infinit, adică este un diametru al elipsei şi trece prin centru. Dar HK este şi una din axele de omologie. La fel se arată că şi celelalte două axe de omologie trebue să treacă prin centrul elipsei, deci prin centrul de greutate comun triunghiurilor ABC şi $O_1O_2O_3$.



Cu aceste observaţii să proiectăm figura astfel ca dreapta dela infinit să vină la distanţă finită.

Elipsa lui STEINER devine o conică circumscrisă celor două triunghiuri proiectate, iar centrul de gravitate devine polul proiecţiei dreptei dela infinit, în raport cu această conică sau cu unul din triunghiuri.

Obţinem astfel următoarea teoremă:

a) *Două triunghiuri triomologice cu centrele de omologie colineare sunt înscrise într'o aceeaşi conică. Dacă* ω *este polul liniei centrelor în raport cu* ABC *sau* A′B′C′, *conica circumscrisă este conica polară a lui* ω *în raport cu* ABC *sau* A′B′C′.

b) *Cele trei axe de omologie sunt concurente în* ω.

In afară de triunghiurile obținute așa cum am arătat, nu mai există altele care să fie triomologice având centrele de omologie colineare, căci dacă ar exista, proiectând linia centrelor la infinit, dreptele care unesc vârfurile în trei feluri diferite ar trebui să formeze 3 sisteme de ceviene paralele între ele, ceeace nu e posibil decât dacă punctele de concurență sunt pe elipsa lui STEINER.

Rezultă atunci că într'un grup de trei triunghiuri, triomologice două câte două — așa cum le-am definit în (A) — *dacă unul din ele se reduce la un punct, celelalte două au centrele de omologie colineare și reciproc.*

De aceea aceste triunghiuri pot fi considerate ca un caz singular de triunghiuri triomologice.

* * *

Desprindem din cele spuse până aci două moduri de a construi triunghiuri triomologice cu centrele de omologie colineare.

O primă construcție rezultă din teorema reamintită în (B). Triunghiul $A'B'C'$ e redus la un punct pe Γ, iar triunghiul format de Δ, Δ' și Δ'' răspunde problemei.

O a doua construcție rezultă din teorema enunțată mai sus. Luăm o dreaptă D arbitrară și polul ei ω față de triunghiul ABC. Alegem un punct A' pe conica polară a lui ω față de ABC. Dreptele AA', BA', CA' taie pe D în Q, R, S care sunt centrele de omologie. Vârfurile B' și C' rezultă imediat.

GH. D. SIMIONESCU
Prof. lic. mil. „N. Filipescu".

NOȚIUNI DE GEOMETRIE CINEMATICĂ

I

Considerațiuni generale. Definițiuni.

1. In cele ce urmează îmi propun a face o modestă incursiune în domeniul *Geometriei cinematice* spre a servi doritorilor drept introducere în studiul acestei ramuri a Matematicelor.

Mă voiu mărgini însă numai la geometria plană pentrucă trecerea la geometria în spaţiu, cel puţin principial, se poate face cu destulă uşurinţă.

Obiectul *Geometriei cinematice* este studiul figurilor geometrice din punctul de vedere al dependenţei poziţiei lor, de parametrii cari o fixează în spaţiu.

Creatorul *Geometriei cinematice*, ştiinţă atât de elegantă prin metodele ei, este colonelul A. MANNHEIM.

Rezultatele cercetărilor lui sunt expuse în *„Principes et développements de Géométrie cinématique"*, apărută la Paris în anul 1894 [1]).

2. *Despre figurile geometrice în general. Clasificarea figurilor geometrice plane.* Plecând dela elementul geometric cel mai simplu, care este punctul, definiţia cea mai convenabilă, care se poate da figurii geometrice este aceea de sistem de puncte.

In cazul particular când toate punctele unei figuri sunt situate într'un acelaş plan, aceasta poartă numele de figură geometrică plană.

Este util a clasifica figurile plane în:

a) Sisteme discrete, formate dintr'un număr finit de puncte;

b) Curbe plane, formate dintr'o simplă infinitate de puncte; şi

c) Figuri plane propriu zise, cari sunt formate din ansamblul tuturor punctelor unui plan, adică din întreaga dublă infinitate a punctelor unui plan.

Mă voiu ocupa în mod explicit numai de sistemele discrete, iar dintre sistemele continui numai de figurile plane propriu zise, curbele plane putând fi considerate ca nişte elemente ale acestor din urmă, deoarece se poate întotdeauna separa dintre punctele situate într'un plan o simplă infinitate aşa încât să se obţină o curbă.

---

1) Se mai pot consulta în acest domeniu şi lucrările următoare:

GASTON JULIA: *Cours de Cinématique,* Paris 1927.

N. ABRAMESCU: *Lecţiuni de Geometrie pură infinitezimală,* Cluj 1930.

N. ABRAMESCU: *Le mouvement d'une figure plane variable qui reste semblable à elle même.* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, Volume I), Bologna, 1932.

Subsemnatul m'am raportat încă şi la notele după cursul de *Mecanică Raţională* ţinut de D. Prof. D. POMPEI la Universitatea din Bucureşti cu an. II. Mat. în anul şcolar 1929—1930.

E. V.

3. *Poziția punctului.* Se știe că poziția unui punct se definește prin coordonatele sale față de un sistem de referință dat. Ele sunt în număr de două în cazul când punctul considerat se află într'un plan.

In orice caz se vede însă că definiția aceasta n'are sens decât dacă ne dăm un sistem de axe de coordonate. Poziția unui punct este prin urmare un lucru relativ, ea nu este determinată decât în raport cu un sistem de referință dat, care poate fi arbitrar de altfel.

4. *Poziția unei figuri oarecare.* Știind ce se înțelege prin poziția unui punct, ne va fi ușor acum să definim poziția unei figuri oarecare.

Intr'adevăr, o figură geometrică fiind formată din puncte, vom înțelege prin poziția ei ansamblul pozițiilor tuturor punctelor din cari este formată, în sensul că aceasta este determinată când sunt determinate pozițiile tuturor acestor puncte.

In cazul când este vorba de o figură plană, poziția ei se va raporta întocmai ca și poziția unui punct la un sistem de două axe de coordonate alese în planul ei.

5. *Despre libertatea de poziție a unei figuri.* Să considerăm o figură geometrică definită prin niște condițiuni date.

Poziția acestei figuri în spațiu, sau în plan, dacă este vorba de o figură plană, va depinde de un număr oarecare de cantități arbitrare numite parametri de poziție sau pur și simplu parametri.

Fie n numărul acestor parametri. Vom zice în acest caz că figura noastră se bucură de n grade de libertate în ceeace privește poziția ei.

6. *Definiția mișcării.* Fie acum o figură geometrică, a cărei poziție în spațiul obișnuit, sau mai general, într'un spațiu cu multiple dimensiuni, depinde de n parametri.

Să presupunem că restrângem libertatea de ordinul n a figurii considerate supunând-o unor condițiuni suplimentare, cari vor fi în orice caz de altă natură decât acelea prin cari am definit figura.

Numărul parametrilor de poziție ai figurii se va reduce astfel la unul mai mic. Fie $k \leqslant n$ acest număr.

Vom înțelege prin mișcarea cu k parametri a figurii considerate *„ansamblul variațiilor necesare trecerii ei dela o poziție la toate celelalte pe cari le poate ocupa“* (N. ABRAMESCU).

Dacă numărul $k = n$, cu alte cuvinte dacă acest număr este rezultat direct din definiția figurii geometrice, mișcarea cu k parametri poartă numele de *mișcare liberă.*

In cazul contrar, când $k < n$, mișcarea figurii se zice *stânjenită.*

Printre mișcările stânjenite cea mai simplă este *mișcarea cu un parametru,* singura de care ne vom ocupa de altfel deocamdată și care este mișcarea în sensul obișnuit al Mecanicei, corespunzătoare primului grad de libertate.

II

Definiția mișcării cu un parametru.

A. *Sisteme discrete.*

7. Să considerăm o figură plană sistem discret și fie n numărul punctelor ei. Aceste n puncte împreună cu cele $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte determinate de aceste puncte luate două câte două, convenim să le numim *elemente de poziție* ale sistemului.

Vom numi de altfel elemente de poziție ale unei figuri în general toate elementele geometrice ale acesteia cum sunt punctele, curbele, suprafețele, etc.

O figură geometrică mai are însă și alte elemente pe lângă cele de poziție.

Astfel în cazul unei figuri plane sistem discret avem lungimile segmentelor rectilinii determinate de aceste puncte luate două câte două, apoi unghiurile dreptelor determinate de aceste puncte și în sfârșit ariile triunghiurilor determinate de punctele sistemului când sunt luate trei câte trei.

Toate elementele de natura acestora, adică toate elementele metrice ale unei figuri cum sunt unghiurile — elemente metrice de ordinul zero —, lungimile — elemente metrice de ordinul întâi —, apoi ariile — elemente metrice de ordinul doi — și volumele în cazul Geometriei cu cel puțin trei dimensiuni — elemente metrice de ordinul al treilea —, convenim să le numim *elemente de formă* ale figurii considerate.

Aceste elemente au un rol foarte important, deoarece toate figurile geometrice se definesc în mod obișnuit prin condițiuni de formă, adică prin condițiuni relative la elementele de formă.

Mai mult chiar, deoarece, dacă aceste condiţiuni pot să lipsească în cazul sistemelor discrete, ele sunt absolut necesare, după cum vom vedea, pentru definiţia sistemelor formate dintr'o infinitate de puncte, adică a curbelor şi a figurilor plane propriu zise în cazul Geometriei cu două dimensiuni.

Dar să revenim la figura plană sistem discret. In studiul mişcării acestei figuri, ca şi în acela al oricărei alte figuri, prima chestiune care se pune este să definim această mişcare. Pentru aceasta vom considera mai întâi câteva cazuri particulare şi în urmă vom trece la cazul general.

8. *Mişcarea unui punct.* Poziţia unui punct în plan depinzând de doi parametri, cari se pot alege în cele două coordonate ale lui, va trebui să supunem acest punct unei singure condiţiuni pentru a-i defini mişcarea cu un parametru. Va trebui cu alte cuvinte să stabilim între coordonatele lui o legătură de forma:

$$f(x, y) = 0$$

şi care exprimă că punctul considerat are o traiectorie dată.

9. *Mişcarea sistemelor formate din două puncte.* Fie acum un sistem de două puncte în plan M_1 şi M_2 de coordonate respectiv (x_1, y_1) şi (x_2, y_2).

Poziţia acestui sistem în ansamblul său depinde în general de patru parametri — cele patru coordonate ale punctelor lui. Vom avea nevoe prin urmare de trei legături pentru a defini mişcarea cu un parametru a acestui sistem.

Cel mai simplu mod de a stabili aceste legături şi pe care-l vom numi *mod propriu,* este de a impune cele trei elemente de poziţie ale sistemului unor condiţiuni date, anume cele două puncte ale lui, condiţiei de a descrie nişte curbe date, iar dreapta determinată de aceste puncte, condiţiei de a avea o înfăşurătoare dată.

Primele două condiţiuni se exprimă prin două relaţiuni de forma:

$$f(x_1, y_1) = 0$$

$$g(x_2, y_2) = 0.$$

A treia condiţie se exprimă prin relaţia ce se obţine scriind că dreapta

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

este tangentă curbei de ecuaţiune

$$F(x, y) = 0,$$

această curbă putându-se reduce de altfel la un punct situat la distanţă finită sau la infinit într'o direcţiune oarecare dată.

10. *Cazul unui segment de dreaptă de lungime invariabilă.* Să considerăm iarăşi cazul unui sistem de două puncte. Impunând de data aceasta elementului de formă, adică distanţei dintre cele două puncte, care este singurul element de această natură de altfel în cazul acesta, o condiţie oarecare, definim o figură, a cărei poziţie în plan nu mai depinde decât de trei parametri.

Condiţia de formă cea mai simplă în acest caz este cea care se exprimă scriind că elementul metric — distanţa — , a cărui expresie în funcţie de cele patru coordonate ale punctelor sistemului este:

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

este constant. Această condiţie se exprimă pe scurt prin relaţia:

$$r = \text{const.} \qquad (1)$$

Figura definită de sistemul nostru prin condiţia de formă (1) poartă numele de segment de dreaptă de lungime invariabilă.

Mişcarea cu un parametru a sistemului acesta se defineşte prin urmare, impunând numai două dintre elementele lui de poziţie unor condiţiuni date, de ex. cele două extremităţi ale segmentului sau una dintre ele şi dreapta determinată de acest segment.

11. *Mişcarea sistemelor formate din trei puncte.* Să considerăm acum un sistem de trei puncte în plan M_1, M_2, M_3 de coordonate respectiv (x_1, y_1) , (x_2, y_2) şi (x_3, y_3).

Poziţia acestui sistem în ansamblul său depinde de şase parametri în total — cele şase coordonate ale punctelor lui —.

Mişcarea cu un parametru a lui se va defini în mod propriu impunând pe cinci oarecare dintre elementele lui de poziţie, cari sunt cele trei puncte ale lui şi dreptele determinate de aceste puncte luate două câte două, unor condiţiuni date.

12. *Cazul unui triunghiu care rămâne echivalent cu el însuşi.* Figura de adineauri a fost definită fără nici o consideraţiune prealabilă relativă la elementele de formă ale sistemului format de cele trei puncte, adică fără vreo condiţie de formă à priori.

Un sistem de trei puncte formează însă un triunghiu care are o arie.

Impunând acestui element o condiție dată, sistemul nostru de trei puncte definește, prin această condiție, o figură plană a cărei poziție în plan nu mai depinde decât de cinci parametri.

In particular figura definită prin condiția de formă, care exprimă că aria acestui triunghiu este invariabilă, poartă numele de triunghiu care rămâne echivalent cu el însuși sau triunghiu de arie invariabilă.

Mișcarea cu un parametru a unei figuri de natura acesteia se va defini prin urmare numai prin patru condițiuni relative la elementele ei de poziție.

13. *Cazul unui triunghiu care rămâne asemenea cu el însuși.* Să presupunem acum că ne dăm două condițiuni de formă pentru sistemul format de trei puncte. Poziția figurii definită prin două condițiuni de formă va mai depinde numai de patru parametri în cazul acesta.

Mișcarea cu un parametru a unei astfel de figuri se va defini prin urmare impunând numai trei dintre elementele ei de poziție unor condițiuni date.

Cea mai simplă dintre figurile din această categorie este triunghiul care rămâne asemenea cu el însuși, definit prin condițiile de formă ca două oarecari dintre unghiurile lui să rămână constante—se va deduce de altfel că și al treilea unghiu va fi constant—.

14. *Cazul unui triunghiu de mărime invariabilă.* Dacă impunem acum pe trei dintre elementele de formă ale unui triunghiu unor condițiuni date, cu restricția ca aceste elemente să nu fie toate unghiuri, definim o figură plană a cărei poziție nu mai depinde decât de trei parametri.

Printre aceste figuri este și triunghiul, zis de mărime invariabilă, care este definit prin condițiile ca trei oarecari dintre elementele lui de formă să rămână invariabile, cu condiția bine înțeles ca aceste elemente să nu fie toate unghiuri; ele pot fi în consecință cele trei laturi ale triunghiului, cari sunt niște elemente metrice de aceeași categorie.

Mișcarea cu un parametru a figurilor de natura acesteia din urmă se va defini în consecință prin trei condițiuni de poziție.

15. *Observații.* Inainte de a trece la cazul general al unui sistem discret oarecare, avem de făcut câteva observații asupra sistemelor formate din trei puncte.

Intâi, un astfel de sistem nu poate să definească prin condiţiuni de formă figuri a căror poziţie în plan să depindă de mai puţin de trei parametri, deoarece în cazul unui triunghiu nu avem decât trei elemente de formă independente.

In al doilea rând trebue să observăm că în cazul particular al triunghiului de mărime invariabilă, putem defini mişcarea lui prin aceea a uneia din laturile sale, reducând astfel acest caz la acela al unui segment de lungime invariabilă.

In plus putem observa că un triunghiu de mărime invariabilă, care ştim că este definit prin condiţiile ca trei dintre elementele lui de formă să rămână invariabile, are de fapt toate elementele de formă invariabile, pentru care motiv el se mai numeşte şi *triunghiu de formă invariabilă.*

Prin analogie cu acest caz vom numi în general *figuri de formă invariabilă* sau *figuri rigide,* figurile cari au toate elementele de formă invariabile, în opoziţie cu figurile cari au cel puţin un element de formă variabil şi pe cari le vom numi *figuri deformabile.*

16. *Cazul general al unui sistem discret oarecare.* Fie un sistem de n puncte în plan. El defineşte fără nici o consideraţie prealabilă, relativă la elementele lui de formă, o figură geometrică a cărei poziţie în plan depinde de $2n$ parametri — cele $2n$ coordonate ale punctelor lui —.

Pentru a defini mişcarea cu un parametru a figurii acesteia, care este o figură deformabilă şi căreia i-am putea zice *figură poligonală deformabilă oarecare,* avem nevoie ca $(2n - 1)$ dintre elementele ei de poziţie să le impunem unor condiţiuni date, aceste elemente putându-se alege parte printre cele n puncte şi parte printre cele $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte determinate de aceste puncte luate două câte două.

Dacă facem însă să intre în consideraţiile noastre şi elementele de formă ale sistemului, vom avea de a face cu nişte figuri definite prin condiţiuni de formă.

Astfel dacă vom impune pe k oarecari dintre elementele de formă unor condiţiuni date, cu singura restricţiune ca aceste elemente să nu fie legate între ele prin vre-o relaţie de dependenţă, sistemul nostru va defini prin aceste condiţiuni o figură geometrică a cărei poziţie în plan va mai depinde numai de $(2n - k)$ parametri.

In general aceste figuri sunt deformabile şi studiul lor este destul de complicat din punctul de vedere al Geometriei cinematice, afară de cazurile când se poate reduce la acela al figurilor plane mai simple şi pe cari le-am definit în cazurile particulare precedente.

B. *Figuri plane propriu zise. Cazuri clasice.*

17. Reamintim că se numeşte figură plană propriu zisă, sistemul format din ansamblul tuturor punctelor situate într'un plan.

Figurile plane propriu zise se definesc în mod obişnuit ca şi sistemele discrete prin nişte condiţiuni de formă date.

Aceste condiţiuni dintr'un anumit punct de vedere sunt chiar necesare ca şi de altfel în cazul oricărei figuri formate dintr'o simplă sau multiplă infinitate de puncte, deoarece în cazul contrar poziţia figurii ar depinde de o simplă respectiv multiplă infinitate de parametri şi mişcarea cu un parametru n'ar mai putea fi definită în cazul acestor figuri.

Dintre figurile plane propriu zise cele mai importante şi cele mai simple sunt următoarele:

1°. *Figura plană rigidă* ale cărei elemente de formă sunt toate invariabile şi care poate fi definită în particular ca sistemul format de ansamblul tuturor punctelor dintr'un plan ale căror distanţe mutuale rămân invariabile. Cu alte cuvinte figura plană rigidă este figura ale cărei puncte luate două câte două formează segmente de dreaptă de lungime invariabilă.

2°. *Figura plană care rămâne echivalentă cu ea însăşi* este figura plană propriu zisă definită prin condiţia ca totalitatea punctelor ei luate trei câte trei să formeze triunghiuri cari să rămână echivalente cu ele înşile.

3°. *Figura plană care rămâne asemenea cu ea însăşi* este figura plană propru zisă ale cărei puncte luate tot trei câte trei formează triunghiuri cari rămân asemenea cu ele înşile.

Acestea sunt figurile plane cele mai simple şi cari se pot considera ca figuri plane clasice.

In cele ce urmează ne vom ocupa de reprezentarea simbolică a figurilor plane propriu zise şi de condiţiile de definiţie a mişcării cu un parametru a acestor figuri.

Mai înainte însă avem de observat ceva asupra elementelor de formă şi de poziţie ale unei figuri plane propriu zise. Anume, elementele de formă cari intervin în cazul unei figuri plane propriu zise sunt aceleaşi ca şi în cazul unei figuri sistem discret, adică unghiurile, lungimile şi ariile. In schimb în clasa elementelor de poziţie pe lângă punctele şi dreptele determinate de punctele sistemului luate două câte două mai intră şi toate curbele figurii, cari se obţin prin separarea dintre punctele sistemului a unei simple infinităţi printr'un mijloc oarecare.

(Va urma).

EUGEN VIŞA
Profesor, Blaj.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE"

După cum s'a anunţat în numărul 1, din Septemvrie 1936, al *Gazetei Matematice*, anul acesta se va ţine un concurs de matematici între elevii liceelor din ţară şi elevii anului preparator al Şcoalei Politehnice REGELE CAROL II din Bucureşti.

Dintre candidaţii înscrişi au fost admişi a se prezenta la concurs următorii:

Pentru Clasa IV-a: *Albeanu Gh. Ioan, Burlea M. Alexandru, Cismaru Victor, Creţu Şerban, Ilie I. Nicolae, Măinescu Z. Ioan, Păuţa M. Moise, Popişca V. Mircea, Radianu Gh. Mircea, Tătaru Fr. Constantin, Vasiliu C. Dumitru, Vesa R. Virgil.*

Pentru Clasa V-a: *Anastasiu M. M., Bădescu Florea Constantin, Buzescu Claudia Georgeta, Buznea D. D., Cârdei D. Gheorghe, Ciobanu I. Victor, Constantin V. Pantelimon, Crăciunescu I. Marcel, Deciulescu D. Gheorghe, Dincă Alex. Ştefan, Ionescu D. Stelian, Jareghie V. Ioan, Mingea N. Marian, Moisiu M. Cornel, Negulescu Alex. Vladimir, Paicu Gh. Mircea, Paparizu I. Gabriel, Petcu T. Valerian, Pop Grigore Ilie, Popa D. Mircea, Rohr Iosif Alex., Theodorescu N. Dorin, Toma I. Victor, Trufim C. Traian, Turcu R. Alexandru, Turlescu L. Aurel, Vasilescu-Stabu Al. Mircea.*

Pentru Clasa VI-a: *Bejenaru Gh. Victor, Burghelea Scarlat Cezar, Cetățeanu Stelian, Constantinescu Vasile, Florescu L. Victor, Ion A. Ilie, Jipa C. Alexandru, Mamut Petre, Pântescu C. C-tin, Pasere S. Emil, Pascaru I. Ioan, Pop A. Alexandru, Rădulescu G. Oct., Stănculescu I. Mircea, Tătaru N. Nicolae, Zolotovici I. Dumitru.*

Pentru Clasa VII-a: *Apostol V. Radu, Bădescu Florea Ioan, Bădescu Gh. Nicolae, Boian D. Emil, Cetățeanu Nicolae, Cioc I. Dumitru, Ciurescu I. Radu, Cornățeanu I. Aurel, Grigore M. Ioan, Hortopan Gh. Grigore, Nadolu T. Andrei, Nedelcu V. Nicolae, Negulescu D. Ștefan, Pădureț A. Vasile, Pașoi N. Mircea, Petrescu P. I. Benone, Popescu M. Gheorghe, Popescu-Zorica N. Alexandru, Preciado I. Theodor, Romașcan Georgeta, Șaichin O. Adolf, Ștefănescu D. Nic., Streder Gh. Ioan, Tilică C. Ștefan.*

Pentru Clasa VIII-a: *Bazac I. Alexandru, Beiu Palade Ernest, Bogdan Grigore Ioan, Botezatu C. Filip, Bucur N. V., Buzescu Andrei Valentin, Buzincu I. Ioan, Caraman D. Vasile, Cojocaru P. Petre, Enache D. Iordache, Galan D. Ioan, Matei D. Dumitru, Năstase Gr. Marin, Nedelescu Anton, Postelnicescu C. Mircea, Tanasiciuc V. Claudiu, Țițeica I. Ilie.*

Pentru Anul Preparator al Școalei Politehnice: *Amărăștеanu F. Marcel, Martac V. Radu, Mihăilescu Paul, Mihalcea N. Nicolae, Popovici Gavril.*

Adică 12 candidați pentru clasa IV-a, 27 pentru clasa V-a, 16 pentru clasa VI-a, 24 pentru clasa VII-a, 17 pentru clasa VIII-a și 5 pentru anul preparator al Școalei Politehnice.

Fiecare candidat va da câte o teză din ambele materii la care s'a înscris. Tezele sunt eliminatoare.

Prima teză va avea loc Joi 6 Mai 1937, dela ora 8^{30} până la 11^{30}, iar a doua teză, în aceeași zi, între orele 15 și 18, la Școala Politehnică, Calea Griviței 132.

Oralul va începe Vineri 7 Mai, ora 8^{30}.

Candidaților înscriși la concurs, cari nu dispun de mijloace materiale pentru venirea și întreținerea lor în București (după cum au arătat în cererile lor), li se vor trimite în vacanța de Paști sumele necesare transportului la București și li se va comunica locul unde vor fi găzduiți în tot timpul concursului.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII.

NOTE MATEMATICE

28. *Asupra problemei 3330.*

Forma sub care se prezintă integrala generală — găsită de D-l GH. GHEORGHIU — a ecuației diferențiale

$$xy'' - 2y' - xy = 0, \tag{1}$$

propuse de D-l Prof. A. ANGELESCU, sugerează ideea reducerii acestei ecuații la o alta, lineară, omogenă și cu coeficienți constanți, ușor integrabilă.

Observăm că ecuația propusă se mai poate scrie

$$x(y'' - y) = 2y',$$

iar dacă însemnăm $y'' - y = u$, vom avea $xu = 2y'$. Eliminând funcțiunea y între aceste ultime două relațiuni, obținem

$$x(u'' - u) = 0 \ , \ u'' - u = 0$$

sau, ținând seama de expresiunea lui u,

$$y^{IV} - 2y'' + y = 0. \tag{2}$$

Ecuația caracteristică $r^4 - 2r^2 + 1 = 0$, având rădăcinile duble $r = \pm 1$, integrala generală a ecuației (2) va fi

$$y = (ax + b)e^x + (cx + d)e^{-x}$$

care, trebuind să verifice și ecuația (1), conduce la $a = -b$, $c = d$, regăsind astfel integrala generală obținută de D-l GH. GHEORGHIU.

Mai general, dacă se consideră ecuația diferențială

$$xy'' - 2ky' + axy = 0, \tag{3}$$

în care k este un întreg pozitiv, schimbările $y'' + ay = u_1$, $u''_{n-1} + a u_{n-1} = u_n$, conduc la ecuația

$$xu''_n + 2(n - k)u'_n + axu_n = 0$$

și este destul să luăm $n = k$ pentru a obține o ecuație ușor integrabilă.

Ecuațiile (1) și (3) sunt de altfel variante ale ecuației lui BESSEL, asupra cărora voi reveni într'o notă viitoare.

M. G.

29. *Asupra problemei 3134.*

In soluția și generalizarea acestei probleme, în care se cerea rezolvarea în numere întregi a sistemului

$$ax+b=by+c=cz+d=du+a,$$

D-l Prof. GH. CONSTANTINESCU examinează cazul când coeficienții a, b, c, d sunt primi între ei, luându-i doi câte doi în toate modurile posibile.

Vreau să observ că sistemul de mai sus are soluțiuni întregi, chiar când condițiunea de mai sus *nu* este îndeplinită.

Să consider sistemul particular

$$4x+3=3y+2=2z+7=7u+4.$$

Din primele două ecuații deduc

$$\frac{2x-1}{3}=\frac{y-1}{2}$$

și, egalând aceste rapoarte cu un număr impar $2t+1$, căci altfel x nu este întreg, obțin

$$x=3t+2,\ y=4t+3,$$

cu cari sistemul de mai sus devine

$$2z+7=7u+4=12t+11.$$

Din $2z+7=12t+11$ deduc $z=6t+2$, iar din ultima egalitate deducem $7u=12t+7$, deci $t=7m$, astfel că obținem soluțiile generale ale sistemului considerat

$$x=21m+2,\ y=28m+3, z=42m+2, u=12m+1.$$

Chestiunea trebue deci studiată în general, și în acest caz.

M. G.

30. *Asupra problemei 4579.* Se cere ca *cu cifrele 1, 2,... 9 să se formeze 3 numere în progresie aritmetică.*

In soluția dată la pag. 639, Vol. XLI, s'au omis 3 grupe *fundamentale* și deci soluțiile corespunzătoare lor. Aceste grupe, numerotate în continuarea celora publicate la locul citat sunt

III) grupele: (1, 2, 3) ; (4, 6, 8) ; (5, 7, 9)

IV) „ : (1, 5, 9) ; (2, 3, 4) ; (6, 7, 8)

V) „ : (1, 3, 5) ; (2, 4, 6) ; (7, 8, 9).

Lor le corespund următoarele 72 progresii crescătoare:

÷126.537.948	÷216.357.498	÷514.726.938
÷127.348.569	÷217.438.659	÷518.726.934
÷128.537.946	÷218.357.496	÷534.726.918
÷129.348.567	÷219.438.657	÷538.726.914
÷145.267.389	÷257.438.619	÷541.762.983
÷146.537.928	÷259.438.617	÷543.762.981
÷148.537.926	÷261.375.489	÷581.762.943
÷149.267.385	÷269.375.481	÷583.762.941
÷154.276.398	÷271.483.695	÷612.753.894
÷162.573.984	÷275.483.691	÷614.753.892
÷164.573.982	÷281.375.469	÷621.735.849
÷158.276.394	÷289.375.461	÷629.735.841
÷167.348.529	÷291.483.675	÷641.735.829
÷169.348.527	÷295.483.671	÷649.735.821
÷172.384.596	÷296.357.418	÷692.753.814
÷176.384.592	÷298.357.416	÷694.753.812
÷182.573.964	÷415.627.839	÷712.834.956
÷184.573.962	÷419.627.835	÷716.834.952
÷185.267.349	÷435.627.819	÷721.843.965
÷189.267.345	÷439.627.815	÷725.843.761
÷192.384.576	÷451.672.893	÷752.834.916
÷194.276.358	÷453.672.891	÷756.834.912
÷196.384.572	÷491.672.853	÷761.843.925
÷198.276.354	÷493.672.851	÷765.843.921.

Totalizând aceste soluţii cu cele publicate la pagina 640 şi 641, Vol. XLI, se vede că problema are 240 soluţiuni din care 120 în progresie crescătoare şi 120 în progresie descrescătoare.

A. CĂLINESCU
Prof. Roşiorii de Vede.

31. *Asupra problemei No. 4553 din G. M. XLI, 352.*

Condiţiunea 3) din soluţia problemei rezultă din examinarea cazului :

I) $$a^2 - 4b \geqslant 0.$$

Punând însă şi condiţiunea :

II) $$b^2 - 4a \geqslant 0$$

problema mai capătă o latură. In adevăr, condiţiunile pentru cele două cazuri sunt :

I) $$p^2 + 4p - 2q - (p-4)\sqrt{p^2 - 4q} \geqslant 0$$

II) $$p^2 + 4p - 2q + (p-4)\sqrt{p^2 - 4q} \geqslant 0.$$

Cum presupunem că avem întotdeauna :

$$\sqrt{p^2 - 4q} = \sqrt{R} \geqslant 0,$$

atunci condiţiunile generale sunt :

$$p^2 + (4 \mp \sqrt{R})\, p - 2q \mp 4\sqrt{R} \geqslant 0$$

semnele corespunzându-se.

Dar pentru ca neegalitatea să fie satisfăcută, ar trebui ca să avem, oricare ar fi q,

$$p > p_1 \quad \text{şi} \quad p < p_2$$

unde p_1 şi p_2 sunt rădăcinele ecuaţiei de condiţie.

Cu aceasta problema se complectează şi pentru latura a doua, care ar fi fost dealtfel uşor de stabilit.

Observaţie. D-l profesor N. N. IONESCU luând ca exemplu :

$$p = -2 \quad \text{şi} \quad q = -2$$

ajunge la concluzia că nu este suficientă condiţia 3) din problemă şi cu drept cuvânt, căci acest exemplu se referă la cazul II, ceeace remarcă deasemenea şi D-l IONESCU.

D-l IONESCU ne trimite şi o soluţie, studiind ambele cazuri ale problemei, însă pe o cale mai lungă, arătând şi variaţia grafică a coeficienţilor p şi q.

Problema rămâne însă nerezolvată pentru cazul când p şi q sunt imaginari.

I. L.

32. *Un ortopol remarcabil* *).

Un triunghiu ABC şi un patrat variabil $\alpha\beta\gamma\delta$ înscrise în acelaş cerc (0).

Fie ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 ortopolurile laturilor lui $\alpha\beta\gamma\delta$ faţă de ABC.

$A_1 B_1 C_1$ triunghiul median al lui ABC şi $A_2 B_2 C_2$ triunghiul median al triunghiului $\omega_1 \omega_3 \omega_4$.

Fie ω' şi ω'' ortopolurile diametrelor $\alpha\gamma$ şi $\beta\delta$ şi ω''' intersecţia $(\omega_1\omega_3, \omega_2\omega_4)$.

1°. *Ortopolurile* ω_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ *sunt astfel că unul din ele este ortocentrul triunghiului format de celelalte trei.*

Să demonstrăm pentru ω_2.

Ortopolurile ω_i se găsesc la intersecţiile dreptelor SIMSON ale punctelor α, β, γ, δ adică Δ_i.

ω' se află pe dreptele $\omega_1 \omega_4$ şi $\omega_2 \omega_3$ adică la intersecţia dreptelor SIMSON (Δ_1, Δ_3) care sunt perpendiculare între ele.

Deci ω' e piciorul înălţimei în triunghiul $\omega_1 \omega_3 \omega_4$.

In mod analog ω'' e piciorul înălţimei din ω_1 în acelaş triunghiu. Rezultă de aici că ω_2 *e ortocentru în* $\omega_1 \omega_3 \omega_4$.

Proprietatea e analoagă pentru toate punctele ω_i.

2°. *Triunghiurile formate cu 3 din punctele* ω_i, *au acelaşi cerc* EULER *ca triunghiul* ABC.

ω' şi ω'' picioarele a 2 înălţimi în $\omega_1 \omega_3 \omega_4$ sunt pe cercul EULER al lui ABC. Să arătăm că C_2 e pe acelaş cerc.

Se observă că triunghiul $\omega_1 \omega_4 \omega''$ e *dreptunghic isoscel.*

Deci $\omega'' C_2$ e perpendiculară pe $C_2 \omega'$ şi deci C_2 e pe cercul EULER al lui ABC.

3°. *Ortopolurile* ω_i *formează un pseudo-patrat în care intersecţiile diagonalelor descriu cercul lui* EULER *al triunghiului* ABC.

In adevăr diagonalele $\omega_1 \omega_3$ şi $\omega_2 \omega_4$ sunt perpendiculare şi egale. Intersecţia ω''' este piciorul celei de-a 3-a înălţimi în triunghiul $\omega_1 \omega_3 \omega_4$ şi e pe cercul EULER.

4°. *Cercurile circumscrise triunghiurilor formate cu 3 din punctele* ω_i *sunt egale cu (0).*

Rezultă din faptul că aceste triunghiuri au acelaş cerc EULER.

---

*) Nota de faţă trimisă în 1927 regretatului CRISTESCU, mi-a revenit după 4 ani cu adnotaţiile lui şi fusese repartizată articol pentru Nr. 11, 1927. Din cauze oarecari, n'a mai fost publicată atunci.

5°. *Centrul cercului* $\omega_1\,\omega_3\,\omega_4$ *e intersecția* ($A_2\,\omega'$, $C_2\,\omega''$).

Am văzut că dreptele $A_2\,\omega'$ și $C_2\,\omega''$ sunt mediatoare.

6°. *Locul geometric al punctelor* ω_i *e o hipocicloidă turtită.*

Dreptele Δ_i sunt tangente unei hipocicloide cu 3 rebrusmente, iar de ex. ω_1 (Δ_1, Δ_2) conține dreptele Δ_1 și Δ_2 ce fac între ele 45°.

Locul său este deci *izoptica de 45°* a hipocicloidei date, adică *o hipocicloidă turtită.*

LOCOT. MIHAIL I. FOCȘENEANU.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Vol. CXXII. Fasc. VI. Decemvrie 1936. Buenos Aires. Singularitățile funcțiunilor analitice de una și de mai multe variabile complexe independente, de CARLOS BIGGERI. Sisteme de inecuațiuni lineare și aplicațiunile lor la studiul corpurilor convexe, de FRANCISCO LA MENZA.

Buletinul Societății Politecnice. Anul L. Nr. 10. Octomvrie 1936. București.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XLII. Nr. 8. August 1936. Câteva investigațiuni noi asupra secțiunilor în seriile produs și asupra desvoltărilor lor, de GABRIEL SZEGÖ. O notă asupra legii asociației în algebra logicei, de H. B. CURRY. O generalizare a problemei lui WRING, de L. E. DICKSON. Descrierea spațiului abstract topologic în spațiul BANACH, de A. D. MICHAL și E. W. PAXSON. O transformare în spațiu, de L. A. DYE. Asupra formei lineare quadratice, de GORDON PALL. O notă asupra funcțiilor recursive, de S. C. KLEENE. Rezultate ale metodei sumării, de R. P. AGNEW. O generalizare asupra unei formule ciclotomice, de H. S. GRANT. Consecințe aritmetice dintr'o identitate trigonometrică, de E. T. BELL. Definiții asupra substituției, de W. V. QUINE. Câteva proprietăți ale discriminantului matricei la o algebră linear asociativă, de R. F. RINEHART. Derivatele dirijate și complementele lor, de S. T. SANDERS. Transformarea VENERONI în S_n, de VIRGIL SNYDER și EVELYN CARROLL-RUSK. Asupra rădăcinilor caracteristice ale matricelor polinoamelor, de N. H. MCCOY.

Časopis pro pěstování Matematiky a Fysiky. Anul LXV. Fasc. IV. 1933. Praha. Asupra matricelor ortogonale simetrice, de B. BYDŽOVSKÝ. Asupra suprafeței foii lui MÖBIUS, de J. KLIMA. Proprietăți ale geometriei ipopedului, de L. SEIFERT.

Journal de Mathematiques Élémentaires, publie par H. Vuibert. Anul LXI. Nr. 7. 1 Ianuarie 1937. Paris.

Idem. Anul LXI. Nr. 8. 15 Ianuarie 1937. Paris.

Mathesis. Vol. L. Nr. 10. Decemvrie 1936. Gembloux. Asupra sferei lui LONGCHAMPS a tetraedrului, de V. THÉBAULT. Exerciţii de geometrie vectorială, de J. R. MUSSELMAN. O teoremă asupra liniilor asimptotice, de S. MITNIMOVITH. Asupra unei teoreme referitoare la liniile asimptotice, de R. GODEAU. O notă asupra tetraedrului, de J. BILO. Note asupra teoriei numerelor, de V. THÉBAULT (supliment).

Gazeta Matematică. Supliment cu exerciţii. Anul III. Nr. 4. 1 Ianuarie 1937. Bucureşti.

Idem. Anul III. Nr. 5. 1 Februarie 1937. Bucureşti.

Pitagora. Anul II. Nr. 3. Decemvrie 1936. Craiova. O clasă de ecuaţii algebrice cu rădăcini trigonometrice, de V. POSTULACHE. O problemă de bacalaureat, de N. P. Câteva sume trigonometrice, de S. RIZESCU.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVI. Nr. 11. Ianuarie 1937. Timişoara. Asupra ecuaţiei duble, $X^2 + X + 1 = \alpha x^2$, $X^2 - X + 1 = \beta y^2$, de V. THÉBAULT. Asupra probabilităţii pe care o are un elev de a fi admis la un examen, de CAIUS IACOB.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXV. Nr. 3–4. Iulie-Decemvrie 1936. Iaşi.

Sphinx. Revue mensuellle des questions récréatives. Anul VII. Nr. 2 Februarie 1937. Bruxelles.

Ştiinţă şi Progres. Revista ştiinţifică a liceelor militare. Anul III. Nr. 7. Decemvrie 1936. Târgu-Mureş.

GH. POPESCU-BOTOŞANI. Puterea motorului de aviaţie în altitudine. *(Comunicare făcută la al II-lea congres al inginerilor diplomaţi ai Şcoalei Politecnice* REGELE CAROL II *din Bucureşti. Noemvrie 1935).* Bucureşti.

Curs de mecanică, predat la Şcoala Politechnică din *Timişoara* în anii 1931 — 1935 de prof. inginer ŞTEFAN DRĂGĂNESCU.

Acest curs e devizat în patru părţi.

Partea I-a coprinde o introducere în studiul mecanicei, obiectul şi diviziunele acestei ştiinţe şi unităţile de măsură întrebuinţate în mecanică. Urmează apoi o desvoltare destul de întinsă asupra calculului vectorial, ca studiu geometric preliminar în vederea aplicaţiilor mecanice. Studiul vectorilor e împărţit în 3 capitole. Cap. I intitulat: *Noţiuni asupra vectorilor,* coprinde definiţiunea şi reprezentarea vectorilor, noţiuni de algebră şi analiză vectorială; Cap. II intitulat *Vectori alunecători şi sisteme de vectori alunecători,* coprinde momentele de vectori, iar ca sisteme de vectori introduce

noţiunea de torsori asupra cărora face un studiu destul de amănunţit; în fine într'un ultim Capitol, aplică rezultatele stabilite pentru vectori în general, la studiul geometric al *deplasărilor.*

Partea II-a a cursului se referă la studiul *Cinematicei.* Coprinde 7 capitole, primele şase se referă la cinematica teoretică, iar al şaptelea la aplicaţiile cinematicei la studiul mecanismelor: angrenaje, curbe rostogolitoare, came, excentrice, sisteme articulate. Primele şase capitole studiază: Cap. I *Cinematica punctului,* Cap. II *Cinematica Solidelor,* Cap. III *Compunerea mişcărilor, mişcarea relativă,* Cap. IV *Generaţiunea mişcărilor,* Cap. V *Mişcarea plană,* Cap. VI *Mişcarea în spaţiu.* Chestiunele atinse sunt tratate riguros şi complect, dar poate că desvoltarea ce li s'a dat este prea mare, aproape 240 pag. litografiate mari pentru cele 6 capitole de cinematică teoretică, ceeace este prea mult pentru o şcoală technică.

Partea III-a coprinde studiul *Staticei.* Intr'un prim capitol se fac unele consideraţii de ordin fizic asupra noţiunilor de forţă şi masă. In Cap. II se tratează echilibrul solidelor rigide libere; considerînd forţele ca nişte vectori alunecători, reductibili la un torsor, conchide că tot ceeace s'a stabilit în prima parte a cursului relativ la torsori, se aplică şi grupului de forţe aplicate unui solid liber, de aci deduce condiţiunele de echilibru a unui corp solid liber, sub formă vectorială şi sub formă algebrică. In Cap. III se tratează problema *Compunerii şi descompunerii sistemelor de forţe;* în Cap. IV se face *Teoria centrelor de greutate.* In Cap. V se introduce noţiunea de *Lucrul forţelor,* care noţiune este apoi utilizată în problema echilibrului. In Cap. VI se tratează *Echilibru solidelor cu legături* servindu-se de noţiunile lucrului mecanic şi a deplasărilor; în acest capitol se introduce şi noţiunea de probleme Static determinate şi Static nedeterminate, precum şi natura echilibrului stabil, nestabil sau indiferent. In Cap. VII se studiază *Echilibrul sistemelor de solide,* liberând fie care din corpurile sistemului de legăturile lui şi utilizând atât metodele analitice cât şi metodele grafice; în acest capitol se tratează şi echilibrul sistemelor articulate. In Cap. VIII se tratează *Echilibru sistemelor variabile solide,* coprinzând şi echilibru firelor flexibile. Cap. IX se referă la *Teoria frecărei,* după oarecari consideraţiuni generale asupra frecărei de alunecare şi de rostogolire se trece la aplicaţiuni de echilibru ţinând seama de frecări. Partea de statică este complect tratată, dar, ţinând seama de pregătirea anterioară a elevilor, poate că era preferabil să se proceadă mai intuitiv de la simplu la compus şi insistând mai puţin asupra cazurilor generale.

Partea IV-a se referă la *Dinamică.* Intr'un prim capitol stabileşte care este problema generală a dinamicei şi teoremele generale cu care se poate ajunge la soluţia ei. In Cap. II se aplică rezultatele generale stabilite în Cap. anterior, la mişcarea rectilinie a unui punct, sau a centrului de greutate a unui sistem, se examinează amănunţit diferite cazuri interesante. In Cap. III se trece de la mişcarea rectilinie la *Mişcarea curbilinie,* examinând şi aici amănunţit diferite cazuri interesante: mişcarea parabolică, mişcarea sub acţiunea unei forţe newtoniene, mişcarea proectilelor în aer etc. In Cap. IV se studiază *Mişcarea pe o curbă rigidă,* felul mişcărei, determinarea reacţiunilor

etc.; în Cap. V se examinează aceeaşi problemă pentru o *Suprafaţă rigidă:* iar în Cap. VI se examinează probemele de mai sus când curba sau suprafaţa ar fi ea însăşi în mişcare. Se trece apoi la dinamica sistemelor. In Cap. VII se stabilesc *ecuaţiile mişcării în cazul unui sistem de puncte,* făcând uz de principiul lui D'ALEMBERT, care permite a reduce dinamica sistemelor la statica sistemelor; în Cap. VIII se ocupă cu *Soluţiunea problemei dinamice.* Cap. IX se referă la *Teoria percusiunelor.* In Cap. X se face *Studiul momentelor de inerţie.* In Cap. XI se studiază *Rotaţia unui solid în jurul unei axe fixe,* cu aplicaţiuni la pendul, mişcarea de rotaţie a maşinelor etc. Cap XII tratează despre *Mişcarea unui solid în jurul unui punct fix,* stabileşte ecuaţiile lui EULER şi le aplică la cazul POINSOT precum şi la cazul giroscopului pe care îl studiează destul de amănunţit. Cap. XIII studiează *Mişcarea unui solid omogen de rotaţie ce se reazemă pe un plan,* iar în Cap. XIV *Mişcarea unui solid liber.* In Cap. XV se studiează *Mişcarea sistemelor deformabile.* In Cap. XVI se studiează *Mişcarea cu frecare.* Cap. XVII se referă la *Ciocnirea corpurilor solide.* In fine în Cap. XVIII se studiează *Teoria oscilaţiilor.* — Partea de dinamică reprezintă un curs în care exemplele au fost alese cu deosebire din cele care se întâlnesc mai des în aplicaţiile technice; şi aci unele părţi s'ar putea lăsa de o parte sau în ori ce caz reduce.

La întocmirea acestei lucrări autorul a depus multă muncă şi pricepere, pentru a face un curs de învăţământ superior cât mai complect, curs care putea fi utilizat atât direct de elevii cărora le era destinat, cât şi de cei cari după terminarea studiilor şcolare de inginerie vor să mai revadă, să-şi mai complecteze şi să mai precizeze cunoştinţele căpătate în şcoală. Păcat ca pierderea prematură a autorului — pierdere regretată de toţi cei cari l'au cunoscut şi apreciat — nu i-a permis să-şi mai revadă cursul, care probabil că ar fi fost aranjat astfel ca să coprindă două părţi: una redusă la posibilităţile de asimilare ale elevilor mijlocii dintr'o şcoală politechnică, şi alta, pentru cei cari posedă deja noţiunele fundamentale de mecanică, şi caută să şi le complecteze; în cursul întocmit se găseşte material suficient pentru ambele acestei părţi.

A. G. I.

CERERI

263. In *Zeitscrift für Mathematik und Physik,* 1860, EM. BACALOGLU a tratat o problemă de geometrie descriptivă. Se mai face vre-o menţiune de lucrări de geometrie descriptivă tratate de Români, înaintea acesteia?

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

M. D. SAUVAGE. Les lieux géométriques en géométrie élémentaire. Paris 1893.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

G. LAMÉ. Examen des différentes méthode employées pour résoudre les problèmes de géométrie. Paris 1818. Réimpression facsimilé. Paris 1903.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

ADRIEN-MARIE LEGENDRE. Théorie des nombres. Tome I. 1830.
Donată de D-l A. G. IOACHIMESCU, Inginer.

ADRIEN-MARIE LEGENDRE. Théorie des nombres. Tome II. 1830.
Donată de D-l A. G. IOACHIMESCU, Inginer.

Journal de mathématiques élémentaires, Vol. 1—2—3—4—5.
Donată de D-l A. G. IOACHIMESCU, Inginer.

Journal de mathématiques élémentaires, Vol. 6—7—8—9—10.
Donată de D-l A. G. IOACHIMESCU, Inginer.

E. DUMONT. Théorie général des nombres.
Donată de D-l I. LINTEŞ, Maior.

RENÉ CHAMPLY. Charpentes mètalliques.
Donată de D-l I. LINTEŞ, Maior.

M. DRĂGHICEANU. Les tremblements de terre.
Donată de D-l I. LINTEŞ, Maior.

ŞT. ŞREŞEFSKY. Motoarele de aviaţie răcite cu aer.
Donată de D-l I. LINTEŞ, Maior.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2063. *Se dă un triunghiu* ABC *care are punctele* B *şi* C *fixe şi unghiul* A *constant. Se duc înălţimele din punctele* B *şi* C *care întâlnesc laturile triunghiului respectiv în punctele* B′ *şi* C′. *Să se arate că dacă vârful* A *se mişcă, cercul* (C) *care trece prin punctele* A, B′, C′ *e de mărime constantă; să se exprime raza lui în funcţie de elementele cunoscute şi să se găsească locul centrului acestui cerc.*

G. THIERRIN.

Soluție dată de D-l M. A. NEGREA (Brăila).

Fie O centrul cercului BAC, M mijlocul lui BC, H ortocentrul triunghiului ABC și D mijlocul lui AM.

Unghiurile din B', C' fiind drepte cercul A, B', C' are centrul în D. Se știe însă că

$$AD = OM$$

deci raza cercului $AB'C'$ e constantă. Apoi

$$AD = OM = \sqrt{R^2 - BM^2} = R\cos A.$$

Figura OADM fiind paralelogram și M fiind fix, locul lui D este un cerc de rază R și cu centrul în M.

Soluții foarte bune s'au primit de la D-nii: I. APRIHĂNEANU, R. BELIAN, A. BUNESCU, G. COATU, SP. CONSTANTINESCU, I. CRIVĂȚ. C. I. GEORGESCU, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, E. GRIGORESCU, S. KAUFMANN, N. L. LUCA, V. MARCU, M. MARGULIUS, O. MAYER, C. MENCIU, N. N. MIHĂILEANU, E. NEAMȚU, C. H. NICOLAU, I. NISTOR, A. PANTAZI, GH. PĂUN, G. ROȘIANU, G. STROIAN, N. VÂRTOSU și FL. VASILESCU.

Nota la care a fost propusă problema explică numele rezolvitorilor cari s'au ocupat cu ea.

G-L GH. B.

PROBLEMA 2888. (Enunț rectificat). *Să se demonstreze relația:*

$$\sum \frac{(p^2 - r_a^2)(p^2 - r_b^2)}{S^2\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{r_a^2}\right)\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{r_b^2}\right)} = \frac{1}{r^4} \cdot \sum r_a^2 \cdot r_b^2.$$

ALEXANDRU V. NICULESCU.

Din relațiile

(1) $S = p \cdot r = (p-a) \cdot r_a = (p-b) \cdot r_b = (p-c) \cdot r_c$

deducem imediat

$$\frac{p^2 - r_a^2}{(p-a)^2 - r^2} = \frac{r_a^2}{r^2} \quad \text{și} \quad \frac{p^2 - r_b^2}{(p-b)^2 - r^2} = \frac{r_b^2}{r^2};$$

de unde

$$\frac{(p^2 - r_a^2)(p^2 - r_b^2)}{[(p-a)^2 - r^2][(p-b)^2 - r^2]} = \frac{r_a^2 \cdot r_b^2}{r^4},$$

sau, punând în evidență — ca factor, pe S, — la numitor și ținând seamă iar de relațiile (1)

$$\frac{1}{S^2}\cdot\frac{(p^2-r_a^2)(p^2-r_b^2)}{\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{r_a^2}\right)\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{r_b^2}\right)}=\frac{r_a^2\cdot r_b^2}{r^4}\cdot$$

Obținem, printr'un procedeu asemănător, alte două relații analoage. Insumând, rezultă relația din enunț.

Observații. Această problemă propusă de subsemnatul pe când eram elev în cl. VI-a de liceu, n'a fost încercată decât de 3 corespondenți, — cari au arătat că enunțul este greșit. Singur D-l EMIL ȘTEFĂNESCU — pe atunci elev în cl. VII-a (lic. Spiru Haret) — astăzi inginer, directorul manufacturii de tutun din Sf. Gheorghe, a rezolvat problema indicând și rectificarea necesară. D-l E. RUSSU a demonstrat prin considerații de omogenitate, iar D-l MARTINIAN BOGDAN (Caracal) printr'o verificare — cazul triunghiului echilateral — că enunțul era eronat.

AL. V. N.

PROBLEMA 3503. *Să se rezolve sistemul de ecuații:*

$$(1)\qquad \begin{aligned}(x-a)(x-b)&=y,\\(y-a)(y-b)&=z,\\(z-a)(z-b)&=x.\end{aligned}$$

M. GHERMĂNESCU.

PROBLEMA 4645. *Să se rezolve sistemul:*

$$(2)\qquad x^2-y=\alpha\ ,\ y^2-z=\alpha\ ,\ z^2-x=\alpha.$$

M. GHERMĂNESCU.

Să considerăm sistemul de ecuații din problema 3503, în care să efectuăm schimbările de necunoscute:

$$(3)\qquad x=X+u\ ,\ y=Y+u\ ,\ z=Z+u;$$

ecuațiile sistemului devin;

$$\begin{aligned}X^2-Y+(2u-a-b)X&=u-(u-a)(u-b),\\Y^2-Z+(2u-a-b)Y&=u-(u-a)(u-b),\\Z^2-X+(2u-a-b)Z&=u-(u-a)(u-b),\end{aligned}$$

astfel că dacă luăm $2u = a + b$ şi însemnăm:

$$\frac{a+b}{2} + \frac{(a-b)^2}{4} = \alpha,$$

aceste ecuaţii devin:

$$(2) \qquad x^2 - y = \alpha \ , \ y^2 - z = \alpha \ , \ z^2 - x = \alpha,$$

adică tocmai ecuaţiile sistemului din problema 4645. Ne vom ocupa deci de aceste ecuaţii.

Din prima ecuaţie (2) vom scoate valoarea lui y, pe care o vom introduce în a doua, din care apoi vom scoate valoarea lui z; această valoare o vom introduce, în fine, în ultima ecuaţie şi vom obţine ecuaţia de gradul al optulea:

$$(4) \quad x^8 - 4\alpha x^6 + 2\alpha(3\alpha - 1)x^4 - 4\alpha^2(\alpha - 1)x^2 - x + \alpha(\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 1) = 0.$$

Dacă am fi eliminat x şi z sau x şi y între ecuaţiile (2), am fi obţinut aceeaş ecuaţie finală (4), ceeace arată că x, y, z sunt trei rădăcini ale acestei ecuaţii, legate prin relaţiile (2).

Ori, se constată uşor că ecuaţiile sistemului (2) sunt verificate dacă $x = y = z = r$, unde r este una din rădăcinile ecuaţiei:

$$r^2 - r - \alpha = 0.$$

Obţinem deci, un prim dublu sistem de soluţii ale sistemului (2):

$$(2) \qquad x = y = z = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}.$$

Aceste valori verificând evident şi ecuaţia (4), primul ei membru va fi divizibil prin $x^2 - x - \alpha$, cu care simplificând, rămâne ecuaţia:

$$(6) \quad x^6 + x^5 - (3\alpha - 1)x^4 - (2\alpha - 1)x^3 + (3\alpha^2 - 3\alpha + 1)x^2 + (\alpha - 1)^2 x - (\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 1) = 0$$

ale cărei rădăcini se împart în două grupe de câte trei, legate una de alta prin relaţiile (2), care se mai pot scrie:

$$(7) \quad \begin{array}{l} x_2 = \theta(x_1) = x_1^2 - \alpha \ , \ x_3 = \theta(x_2) = \theta_2(x_1) \ , \ x_1 = \theta(x_3) = \theta_3(x_1), \\ x_5 = \theta(x_4) = x_4^2 - \alpha \ , \ x_6 = \theta(x_5) = \theta_2(x_4) \ , \ x_4 = \theta(x_6) = \theta_3(x_4), \end{array}$$

în care $\theta_n = \theta(\theta_{n-1})$. Ecuaţia (6) este ceeace se cheamă o *ecuaţie*

abeliană, în care o rădăcină se exprimă raţional în funcţiune de o alta. Studiul acestei clase de ecuaţiuni a fost făcut de ABEL, din care noi vom reda ceeace corespunde ecuaţiei (6).

Rezolvarea ecuaţiei (6) de gradul 2×3 se va reduce la aceea a unei ecuaţii de gradul al doilea şi a uneia de gradul al treilea.

Dacă luăm ca necunoscute:

$$u = x_1 + x_2 + x_3 \ , \ v = x_4 + x_5 + x_6 ,$$

u şi v vor fi rădăcinile unei ecuaţii de gradul al doilea ce se obţine eliminând pe x între (6) şi (8), adică:

$$(8) \qquad y = x + \theta(x) + \theta_2(x).$$

Odată determinaţi u şi v, vom forma ecuaţiile:

$$(9) \qquad \begin{aligned} x^3 - ux^2 + \varphi(u)\,x - \psi(u = 0, \\ x^3 - vx^2 + \varphi(v)\,x - \psi(v) = 0, \end{aligned}$$

în care se descompune (6) şi în care φ şi ψ se exprimă raţional în funcţiune de u sau v.

In adevăr, din (7) deducem în primul rând:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1 + x_2 + x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2\,\Sigma\, x_1 x_2 - (x_1 + x_2 + x_3) = 3\alpha,$$

deci:

$$(\alpha) \qquad 2\varphi(u) = 2\,\Sigma\, x_1 x_2 = u^2 - u - 3\alpha \ , \ 2\varphi(v) = v^2 - v - 3\alpha.$$

Apoi înmulţind prima cu x_1, a doua cu x_2, a treia cu x_3 şi adunând:

$$\begin{aligned} 0 = \Sigma\, x_1^3 - \varphi(u) - \alpha u = u^3 - 3(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) - \varphi(u) - \alpha u \\ = u^3 - 3(u - x_1)(u - x_2)(u - x_3) - \varphi(u) - \alpha u \end{aligned}$$

sau:

$$u^3 - 3u\varphi(u) + 3x_1 x_2 x_3 - \varphi(u) - \alpha u = 0,$$

deci:

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} 3\psi(u) = x_1 x_2 x_3 = (3u + 1)\varphi(u) - u^3 + \alpha u , \\ 3\psi(v) = x_4 x_5 x_6 = (3v + 1)\varphi(v) - v^3 + \alpha v . \end{aligned}$$

Pentru a evita eliminarea lui x, între (6) şi (8), vom înmulţi ecuaţiile (9) şi vom identifica rezultatul cu (6). Vom avea:

$$(10) \quad x^6 - (u+v)x^5 + [uv + \varphi(u) + \varphi(v)]x^4 - [\psi(u) + \psi(v) + u\varphi(v) + v\varphi(u)]x^3$$
$$+ [\varphi(u)\varphi(v) + u\psi(v) + v\psi(u)]x^2 - [\varphi(u)\psi(v) + \varphi(v)\psi(u)]x + \psi(u)\psi(v) = 0.$$

Identificând (10) cu (6), obţinem:

$$u + v = -1\ ,\ uv + \varphi(u) + \varphi(v) = 1 - 3\alpha,$$

$$\psi(u) + \psi(v) + u\varphi(v) + v\varphi(u) = 2\alpha - 1,$$

$$(8)\quad \varphi(u)\varphi(v) + u\psi(v) + v\psi(u) = 3\alpha^2 - 3\alpha + 1,$$

$$\varphi(u)\psi(v) + \varphi(v)\psi(u) = -(\alpha - 1)^2,$$

$$\psi(u)\psi(v) = -\alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha + 1.$$

A doua ecuaţie (γ) se mai poate scrie, ţinând seama de (α) şi de prima din (γ),

$$(\delta)\quad uv + \varphi(u) + \varphi(v) = uv + \frac{(u^2 + v^2) - (u + v) - 6\alpha}{2}$$

$$= uv + \frac{(u + v)^2 - 2uv - (u + v) - 6\alpha}{2}$$

$$= uv + \frac{2 - 2uv - 6\alpha}{2} = uv + 1 - uv - 3\alpha = 1 - 3\alpha.$$

A treia, ţinând seama de (β), (γ) şi (δ):

$$\psi(u) + \psi(v) + u\varphi(v) + v\varphi(u) = \frac{1}{3}[\varphi(u) + \varphi(v) + 3u\varphi(u) + 3v\varphi(v) - (u^3 + v^3) - \alpha]$$

$$+ u\varphi(v) + v\varphi(u) = \frac{1}{3}[\varphi(u) + \varphi(v)] - \frac{1}{3}[(u + v)^3 - 3uv(u + v) + \alpha]$$

$$+ (u + v)[\varphi(u) + \varphi(v)] = -\frac{2}{3}[\varphi(u) + \varphi(v)] - \frac{1}{3}[3uv + \alpha - 1]$$

$$= -\frac{2}{3}[1 - 3\alpha - uv] - \frac{1}{3}[3uv + \alpha - 1] = 2\alpha - 1,$$

deci $uv = 2 - \alpha$. Urmează că u şi v sunt rădăcinile ecuaţiei de gradul al doilea:

$$(11)\qquad y^2 + y + 2 - \alpha = 0.$$

Celelalte relaţiuni (8) se verifică cu aceste condiţiuni. Ne rămâne să rezolvăm acum ecuaţiile *abeliene* (9), ale căror rădăcini formează câte un *grup*, după cum arată (7). Fiind vorba de ecuaţii de gradul al treilea, rezolvarea nu prezintă interes.

In definitiv, sistemul propus (2) admite soluţiile date de (5) şi de rădăcinile ecuaţiilor (9). Din acestea se deduc apoi uşor soluţiile sistemului (1).

Notă. La problema 3503 a trimis soluţie D-l MĂNESCU MIRCEA, pe când era elev în cl. VI liceală. D-sa a condus rezolvarea până la ecuaţia (6), la care s'a oprit.

La problema 4645, pe care am propus-o tocmai în vederea rezolvării problemei 3503, a trimis o soluţie D-l I. LEUCO, în care găseşte numai soluţiile (5), precum şi D-l M. AMĂRĂŞTEANU a cărui soluţie foarte interesantă are un singur viciu.

D-sa stabileşte ecuaţiile (9), calculând pe $u, v, \varphi(u), \varphi(v), \psi(u), \psi(v)$. Pentru $\varphi(u)$ găseşte două valori, date de

$$\varphi(u) = u^3 - \alpha u - 3 = \frac{1}{2}(u^2 - u - 3\alpha),$$

din care deduce $u = \frac{3}{2}$ şi $u^2 + u + 2 - \alpha = 0$. Dacă ar fi calculat două valori şi pentru $\psi(u)$, ar fi găsit că $u = \frac{3}{2}$ nu corespunde şi în acest fel nu ar fi găsit trei ecuaţii (9). Soluţia D-lui M. AMĂRĂŞTEANU este însă străină de consideraţiunile generale ce am făcut mai sus.

Problema 3503 am propus-o pentru a uşura rezolvarea problemei 1876, propusă de TR. LALESCU şi care este nerezolvată până astăzi.

M. G.

PROBLEMA 4021. *Se cere fracţia $abc/a'b'c'$, cu numărătorul şi numitorul de trei cifre, ştiind că acea fracţie şi înversa ei se transformă exact în fracţii zecimale, iar dacă la aceste fracţii e înlocuim numărătorii şi numitorii prin răsturnatele lor, una se transformă în fracţie periodică simplă şi alta în fracţie periodică mixtă.*

I. IONESCU.

Soluţia acestei probleme, pentru cazul fracţiilor *ireductibile*, a fost dată în *Gazeta Matematică*, Anul XXXVII pag. 233, găsindu-se soluţiile 125/256, 125/512, 128/625, 256/625 şi inversele acestora. S'au cerut acolo şi soluţiile cu fracţii reductibile care sunt în număr mult mai mare. In cele ce urmează îmi propun a completa această problemă.

Să notăm pentru uşurarea expunerii:

$f = abc/a'b'c'$, $1/f = a'b'c'/abc$, $f_1 = cba/c'b'a'$, $1/f_1 = c'b'a'/cba$

După enunț f și $1/f$ trebue să poată fi egale cu fracții zecimale exacte, iar una din fracțiile f_1 și $1/f_1$ să se transforme în fracție periodică simplă și alta în fracție periodică mixtă.

Fie d cel mai mare comun divizor al numerelor abc, $a'b'c'$ astfel că $abc = md$ și $a'b'c' = m'd$ unde m și m' sunt două numere prime între ele. Nu vom lua $d = 1$ căci această ipoteză duce la soluțiile ireductibile date mai sus. Cum f și $1/f$ dau loc la fracții zecimale exacte trebue ca m și m' să fie 1 sau să nu aibă alți factori primi decât puteri de ale lui 2 sau 5. Excludem ipoteza $m = m' = 1$, căci atunci f_1 și $1/f_1$ se reduc la 1, iar nu la fracții periodice. Mai mult încă, vom presupune că numai m poate fi 1, căci altfel în loc de f ne ocupăm de $1/f$. Cum apoi m și m' sunt prime între ele vom lua numai pentru m pe 2 sau puteri ale lui și pentru m' pe 5 sau puteri ale lui. Soluțiile în care s'ar ivi cazurile contrarii se deduc evident pornind dela $1/f$ în loc de f. La urmă însă vom considera la soluțiile găsite și inversele lor.

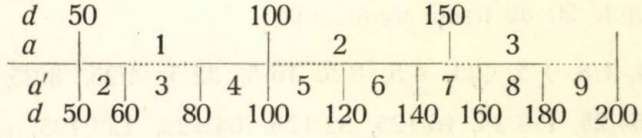
De oarece d este cel puțin 2, cum $dm = abc$ și $dm' = a'b'c'$ sunt de trei cifre rezultă că m și m' nu pot trece de 499. Prin urmare după cele spuse mai sus m nu poate fi luat decât 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, sau 256, iar m' numai 5, 25 sau 125. Deci fracția $f = dm/dm' = m/m'$ nu ar putea fi egală decât cu una din următoarele 20 de fracții ireductibile:

1/2, 1/4, 1/8, 1/5, 2/5, 4/5, 8/5, 16/5, 32/5, 4/25, 8/25, 16/25, 32/25, 64/25, 128/25, 16/125, 32/125, 64/125, 128/125, 256/125.

Nu mai putem lua alte valori, căci altfel nu se găsesc soluții pentru d care să facă deodată dm și dm' de trei cifre. Astfel fracția 64/5 nu este admisibilă căci pentru $dm' \geqslant 100$, trebue $d \geqslant 20$, dar atunci dm trece de $64 \times 20 = 1280$. Impărțind pe 100 și 1000 prin valorile admisibile ale lui m și m' găsim limitele între care poate oscila d. Aceste limite sunt trecute în tabloul următor:

m	1	2	4	8	16	32	64	128	256	m'	5	25	125
min d	100	50	25	13	7	4	2	2	2		20	4	2
max d	999	499	249	124	62	31	15	8	3		199	39	7

Aceste valori ale lui d nu sunt toate admisibile. Ele trebue să îndeplinească condiţiunea de a ne da pe f_1 şi $1/f_1$ periodice de feluri diferite. Pentru aceasta trebue ca numai unul din numerele cba, $c'b'a'$ să admită factorii primi 2 sau 5, căci dacă nu-i admite nici unul, atunci f_1 şi $1/f_1$ ies ambele periodice simple, iar de îi admit amândouă ies ambele fracţii periodice mixte. Insă cifrele terminale ale lui cba şi $c'b'a'$ sunt cifrele iniţiale ale termenilor fracţiei f. Deci putem spune că dacă una din cifrele a sau a' este 1, 3, 7 sau 9 cealaltă trebue să fie neapărat 2, 4, 6, 8 sau 5. Valorile lui d care nu dau cifrele iniţiale în dm şi dm' în aceste condiţiuni nu sunt admisibile. Pentru a găsi valorile lui d ce trebuesc eliminate procedăm în modul următor. Luăm una din fracţiile m/m' şi împărţim 100, 200, 300,..., 1000 prin m şi apoi prin m'. Câturile $d_1, d_2, \ldots, d_9$ şi $d'_1, d'_2, \ldots, d'_9$ le aşezăm pe o scară liniară deasupra şi dedesuptul unor liniuţe perpendiculare pe linia scării la distanţe aproximativ proporţionale cu acele valori iar printre ele, pe deasupra şi dedesuptul scării, în intervalele dintre liniuţe scriem, numerele 1, 2...9 cu care au început deîmpărţiţii întrebuinţaţi. Astfel de exemplu, scara pentru $m/m' = 2/5$ se prezintă astfel:



Pe această scară se vede imediat că d nu poate fi cuprins între limitele următoare:

$$60 \leqslant d < 80, \quad 100 \leqslant d < 120, \quad 150 \leqslant d < 160, \quad 180 \leqslant d < 200.$$

Aceste regiuni s'au trasat punctate pe scară.

Din valorile lui d rămase se vor mai exclude acelea la care reducând pe f_1 la cea mai simplă expresiune o fac fracţiune convertibilă exact în zecimale. Astfel scara de mai sus ne arată că $d=88$ ar fi admisibil, însă $m = 2 \times 88 = 176$ şi $m' = 5 \times 88 = 440$ ne dă $f = 176/440$ şi deci $f_1 = 671/44 = 61/4 = 15{,}25$, fracţie exactă.

Un criteriu care reduce mult unele încercări este de a nu lua pentru d valori care să facă pe a', b', c' proporţionali cu a, b, c, căci din:

$$a/a' = b/b' = c/c',$$

scoatem:

$$100a/100a' = 10b/10b' = c/c' = (100a + 10b + c)/(100a' + 10b' + c') = f,$$

$$100c/100c' = 10b/10b' = a/a' = (100c + 10b + a)/(100c' + 10b' + a') = f_1,$$

şi cum $c/c' = a/a'$ reiese că $f = f_1$ şi deci f_1 nu poate fi periodică.

După enunţ numerele abc, $a'b'c'$ fiind de trei cifre, nu putem face $a = 0$ sau $a' = 0$. Pentru b, c, b', c' enunţul nu face nici o restricţiune, deci ele pot fi şi nule. Cu alte cuvinte putem admite ca răsturnatele termenilor fracţiei f să fie şi de două cifre sau chiar de o singură cifră. Dacă voim ca şi fracţia f_1 să aibă termeni de câte trei cifre nu vom lua d pereche dacă $m' = \mathfrak{M}5$, nici $d = \mathfrak{M}5$ dacă m sau m' este pereche.

Pentru reducerea încercărilor la găsirea lui d s'ar mai putea da unele criterii însă nu au o eficacitate suficientă pentru a înlocui munca unei încercări directe.

Cu aceste principii pornim la cercetarea soluţiilor problemei.

Să examinăm pe rând cele 20 valori pe care le poate lua fracţia m/m'. Vom trata problema complect pentru $m/m' = 1/2$ şi vom da numai rezultatele pentru celelalte cazuri.

In cazul fracţiei ireductibile 1/2, limitele lui d sunt 100 şi 499; deci ar fi de încercat 400 de valori. Observăm însă că în cazul de faţă $m' = 2m$, deci $dm' = 2dm$, sau $a'b'c' = 2abc$. Deci dacă toate cifrele lui abc sunt mai mici ca 5, cifrele lui dm' vor fi proporţionale cu ale lui $dm = d$ (căci $m = 1$). Se elimină dintr'o dată pentru d toate numerele următoare:

100 — 104, 110 — 114, 120 — 124, 130—134, 140—144, 200—204,

210 — 214, 220 — 224, 230 — 234, 240—244, 300—304, 310—314,

320 — 324, 330 — 334, 340 — 344, 400—404, 410—414, 420—424,

430 — 434, 440 — 444.

Se elimină dar 100 valori ale lui d.

$\frac{m}{m'}$	Soluţii	$d =$
1/2	110	106 – 109, 116—119, 125—129, 136—139, 145—149, 216—219, 235—239, 306—309, 316—319, 325, 327 — 329, 340 — 349, 425—429, 445 – 449, 451—459, 461, 463 — 482, 484 — 494, 496—499.
1/4	85	103—104, 106—109, 113—114, 116—119, 123—124, 126—129, 131, 133—134, 136—142, 144—149, 151 — 152, 154 — 162, 164, 166—174.
1/8	8	102 — 104, 106 — 109, 112.
1/5	41	103, 105—107, 109, 112—113, 115—119, 121, 123—125, 127—131, 133—134, 136—137, 139, 161, 163—164, 166—167, 169—175, 177—179.
2/5	58	51—53, 56—59, 81—83, 85—87, 89, 91, 93—98, 121, 123, 125, 127—131, 134, 136—137, 139—149, 161, 163—164, 166—167, 169—175, 177—179.
4/5	60	41, 45, 47—49, 51, 53, 58—59, 61—65, 67—71, 73—74, 81—83, 85—87, 89, 90—91, 93—95, 97—99, 121, 123, 140—142, 146—149, 151—152, 155—159, 161, 164, 172, 174—175, 177—179.
8/5	57	26—37, 41, 45, 47, 49, 51, 53, 56, 58—59, 61—64, 67—74, 76—79, 81—82, 85, 87, 89, 91, 93—98, 113, 115—119, 121, 123.
16/5	22	26—32, 34 —35, 37—39, 41, 45, 47—49, 51, 53, 57—59.
32/5	4	21, 26—28.
4/25	3	26, 34—35.
8/25	11	17—19, 23, 26, 28—31, 34, 37.
16/25	18	9—11, 13—15, 17, 19, 21, 23, 26, 28—31.
32/25	8	7, 10—11, 13—15, 23, 28.
64/25	5	7, 10—11, 13—14.
128/25	2	5—6.
16/125	1	7.
32/125	1	5.
64/125	4	2, 5—7.
128/125	0	
256/125	0	

Facem scara de eliminare pentru d. Ea se prezintă în felul următor, unde regiunile inadmisibile s'au desemnat punctate

d	100		200		300		400		500
a		1		2		3		4	
a'	2	3	4	5	6	7	8	9	
d		150		250		350		450	

De aci se vede că nu avem soluţii pentru $150 \leqslant d < 200$; $250 \leqslant d < 300$; $350 \leqslant d < 400$. Se elimină astfel încă $3 \times 50 = 150$ din valorile admisibile pentru d în limitele indicate.

Pentru valorile rămase facem fracţiile $f = d'/2d$ şi apoi pe f_1, cărora le căutăm fracţiile ireductibile. Se găseşte atunci că, $d = 405, 450, 495$ fac pe f_1 număr întreg; că $d = 105, 115, 135$ $305, 315, 326, 343$, fac pe f_1 fracţii zecimale exacte; că $d = 215,$ $407, 460, 462, 483$, fac pe $1/f_1$ fracţie zecimală exactă, iar $d = 205 - 219,\ 225 - 229,\ 245 - 249,\ 415 - 319$ şi $435 - 439$ fac pe f_1 şi pe $1/f_1$ de o dată echivalente cu fracţii periodice simple. Se pierd astfel încă $3 + 7 + 5 + 5 \times 5 = 40$ valori. Rămân ca soluţiuni $400 - 100 - 150 - 40 = 110$, care sunt date în tabloul alăturat. Valorile consecutive s'au indicat prin o liniuţă pusă între valorile extreme.

In tablou s'au trecut soluţiile găsite pentru d la toate valorile fracţiei m/m'. Se vede că ultimele două fracţii nu dau soluţiuni. In tablou nu sunt cuprinse soluţiile cu fracţii ireductibile de care am vorbit la început. Coloana a doua dă numărul soluţiunilor pentru diferitele fracţii m/m'. Numărul total al soluţiunilor este 498 şi cu inversele lor fac $2 \times 498 = 996$. La acestea adăogând cele 8 soluţii cu fracţii ireductibile găsim că problema admite în total *1004* soluţiuni.

PROF. GH. CONSTANTINESCU.

Problema a fost încercată de mulţi corespondenţi, însă cu totul insuficient. Numărul cel mai mare de soluţii găsite a fost de 44! Problema nu era grea, dar cerea oarecare muncă ordonată.

I. I.

PROBLEMA 4286. *Axul de omologie dintre triunghiul format de centrele cercurilor exînscrise triunghiului de referinţă şi triunghiul pedal al punctului lui* NAGEL, *este ax radical al cercurilor circumscrise acestui ultim triunghiu şi triunghiului de referinţă.*

C. IONESCU-BUJOR.

1°. *Soluţie* dată de D-nii: N. N. MIHĂILEANU (student, Bucureşti), CEZAR IVĂNESCU (Bârlad), T. G. COCEA, M. C. POSTELNICESCU (Lic. militar Mânăstirea Dealu) şi D. LEBĂDĂ.

Notăm ABC, $I_a I_b I_c$ triunghiul de referinţă şi acel format de centrele cercurilor exînscrise, $N_a N_b N_c$ triunghiul pedal al punctului lui NAGEL.

Dreptele $I_a N_a$, $I_b N_b$, $I_c N_c$ concură în ω centrul cercului $I_a I_b I_c$ şi sunt perpendiculare pe laturile corespunzătoare ale triunghiului ABC.

Deci $I_a I_b I_c$ este triunghiul antipodar al centrului cercului înscris I, iar $N_a N_b N_c$ este triunghiul podar al punctului ω şi cum ω, I sunt simetrice în raport cu centrul cercului ABC, le putem identifica respectiv cu punctele M, N ale proprietăţii [1]):

„Fie M *şi* N *două puncte în planul unui triunghiu, simetrice în raport cu centrul cercului său circumscris.*

Triunghiul podar al punctului M *este omologic cu triunghiul antipodar al punctului* N, *centru de omologie fiind* M, *iar ax de omologie fiind axul radical al cercurilor circumscrise triunghiului de referinţă şi triunghiului podar al lui* M".

Rezultă proprietatea cerută de problemă.

2°. O soluţie în coordonate baricentrice a fost dată de D-l M. MARGULIUS (Bucureşti).

C. I. B.

PROBLEMA 4313. *Să se găsească patratele de şase cifre, formate prin sudarea (alipirea) a două patrate de câte trei cifre.*

V. THÉBAULT.

---

1) C. IONESCU-BUJOR: „Asupra unor triunghiuri podare şi antipodare" — Revista Matematică din Timişoara, pag. 87. Vol. XIII.

Patratele căutate fiind de forma *abcxyz*, în care *abc* şi *xyz* pot fi unul din patratele

100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961,

vom lua pentru *abc* unul din aceste numere apoi, extrăgând rădăcina numărului *abcxyz*, astfel luat, vom determina pe *xyz* astfel încât rădăcina să se extragă exact, iar din numerele *xyz*, astfel determinate, vom reţine pe acelea cari sunt patrate perfecte.

1°. $\sqrt{10.0\,x\,.\,yz}$ | 317
$10\,x$ | $61 \times 1 = 61$
$(39+x)yz$ | $627 \times 7 = 4389$
$xyz = 489$

2°. $\sqrt{12.1\,x\,.\,yz}$ | 347
$31\,x$ | $64 \times 4 = 256$
$(44+x)yz$ | $687 \times 7 = 4809$
$xyz = 409$

3°. $\sqrt{14.4\,x\,.\,yz}$ | 380
$54\,x\,(x=4)$ | $68 \times 8 = 544$
$yz=0$ |
$xyz = 400 = 20^2$

4°. $\sqrt{16.9\,x\,.\,yz}$ | 412
$9x$ | $81 \times 1 = 81$
$(9+x)\,yz$ | $822 \times 2 = 1644$
$xyz = 744$

5°. $\sqrt{19.6\,x\,.\,yz}$ | 443
$36\,x$ | $84 \times 4 = 336$
$(24+x)\,yz$ | $883 \times 3 = 2649$
$xyz = 249$

6°. $\sqrt{22.5\,x\,.\,yz}$ | 475
$65\,x$ | $87 \times 7 = 609$
$(41+x)\,yz$ | $945 \times 5 = 4725$
$xyz = 625 = 25^2$

7°. $\sqrt{25.6\,x\,.\,yz}$ | 506
$6\,xyz$ | $1006 \times 6 = 6036$
$xyz = 036 = 6^2$

8°. $\sqrt{28.9\,x\,.\,yz}$ | 538
$39\,x$ | $103 \times 3 = 309$
$(81+x)\,yz$ | $1068 \times 8 = 8544$
$xyz = 444$

9°. $\sqrt{32.4\,x\,.\,yz}$ | 570
$74\,x\,(x=9)$ | $107 \times 7 = 749$
$yz=0$ |
$xyz = 900 = 30^2$

10°. $\sqrt{36.1\,x\,.\,yz}$ | 601
$1\,xyz$ | $1201 \times 1 = 1201$
$xyz = 201$

11°. $\sqrt{40.0\,x\,.\,yz}$ | 633
$40\,x$ | $123 \times 3 = 369$
$(31+x)\,yz$ | $1263 \times 3 = 3789$
$xyz = 689$

12°. $\sqrt{44.1\,x\,.\,yz}$ | 66
$81\,x$ | $126 \times 6 = 756$
$(54+x)\,yz$ | $1324 \times 4 = 5294$
| $1325 \times 5 = 6625$

13°. $\sqrt{48.4\,x\,.\,yz}$ | 696
$124\,x$ | $129\times 9 = 1161$
$(79+x)yx$ | $1386\times 6 = 8316$
$xyz = 416$

14°. $\sqrt{52.9\,x\,.\,yz}$ | 728
$39\,x$ | $142\times 2 = 284$
$(106+x)yz$ | $1448\times 8 = 11584$
$xyz = 984$

15°. $\sqrt{57.6\,x\,.\,yz}$ | 759
$86\,x$ | $145\times 5 = 725$
$(135+x)yz$ | $1509\times 9 = 13581$
$xyz = 081 = 9^2$

16°. $\sqrt{62.5\,x\,.\,yz}$ | 791
$135\,x$ | $149\times 9 = 1341$
$(9+x)yz$ | $1581\times 1 = 1581$
$xyz = 681$

17°. $\sqrt{67.6\,x\,.\,yz}$ | 822,...
$36\,x$ | $162\times 2 = 324$
$(36+x)\,yz$ | $1642\times 2 = 3284$

18°. $\sqrt{72.9\,x\,.\,yz}$ | 85
$89\,x$ | $165\times 5 = 825$
$(65+x)\,yz$ | $1704\times 4 = 6816$
$xyz = 316$

19°. $\sqrt{78.4\,x\,.\,yz}$ | 886
$144\,x$ | $168\times 8 = 1344$
$(96+x)\,yz$ | $1766\times 6 = 10596$
$xyz = 996$

20°. $\sqrt{84.1\,x\,.\,yz}$ | 917,...
$31\,x$ | $181\times 1 = 181$
$(129+x)yz$ | $1827\times 7 = 12789$

21°. $\sqrt{90.0\,x\,.\,yz}$ | 949
$90\,x$ | $184\times 4 = 736$
$(164+x)yz$ | $1889\times 9 = 17001$
$xyz = 601$

22°. $\sqrt{96.1\,x\,.\,yz}$ | 980,...
$151\,x$ | $188\times 8 = 1504$
$(6+x)\,yz$ | $1961\times 1 = 1961$

Deci singurele soluţii ale problemei sunt

$$144\,.\,400 = 380^2 = 12^2\,.\,1000 + 20^2\ ,\quad 225\,.\,625 = 475^2 = 15^2\,.\,1000 + 25^2,$$
$$226\,.\,036 = 506^2 = 16^2\,.\,1000 + 6^2\ ,\quad 324\,.\,900 = 570^2 = 18^2\,.\,1000 + 30^2,$$
$$576\,.\,081 = 759^2 = 24^2\,.\,1000 + 9^2$$

între cari figurează a doua şi ultima, în cari xyz are de fapt două cifre, cari ar putea să nu fie acceptate ca soluţii în sensul strict al enunţului.

Notă. 1°. La această problemă s'au trimis foarte multe încercări de soluţii, redactate cam în felul stereotip următor

„Căutând într'o tablă de patrate" ...

sau

„Extrăgând rădăcinile patrate" ...

şi cu toate aceste metode *infailibile, rezolvitorii* n'au reuşit să găsească toate soluţiile problemei, afară de D-nii: V. CEAUŞESCU şi M. AMĂRĂŞTEANU.

2°. Am dat acestei probleme soluția de mai sus, în care numărul extragerilor de rădăcină este redus la minimum. Problema se poate ataca însă și pe alte căi, dar cercetările sunt foarte laborioase.

In general, problema conduce la rezolvarea în numere întregi a ecuație nedeterminate

$$1000x^2 + y^2 = z^2, \tag{1}$$

operație care nu este grea. Ceeace este însă greu, este apoi impunerea condițiilor ca soluțiile găsite să aibă numărul de cifre indicat de problemă, iar examinarea completă a tuturor cazurilor posibile ar necesita câteva articole, nu numai un spațiu restrâns ca acesta.

Observând însă că z^2 se termină printr'un patrat de trei cifre, putem micșora numărul cercetărilor, utilizând tabloul calculat de D-l I. V. MĂTIEȘ (G. M. XXXVII, p. 366) din care vom extrage numai formele cari se termină cu un patrat de trei cifre. Vom avea astfel de examinat tabloul particular următor

y^2	z	x^2	y^2	z	$2x^2$
004	$500n \pm 2$	$n(250n \pm 2)$	001	$250n \pm 1$	$n(125n \pm 1)$
016	$500n \pm 4$	$n(250n \pm 4)$	009	$250n \pm 3$	$n(125n \pm 3)$
036	$500n \pm 6$	$n(250n \pm 6)$	025	$50n \pm 5$	$n(5n \pm 1)$
064	$500n \pm 8$	$n(250n \pm 8)$	049	$250n \pm 7$	$n(125n \pm 7)$
100	$100n \pm 10$	$n(10n \pm 2)$	081	$250n \pm 9$	$n(125n \pm 9)$
144	$500n \pm 12$	$n(250n \pm 12)$	121	$250n \pm 11$	$n(125n \pm 11)$
196	$500n \pm 14$	$n(250n \pm 14)$	169	$250n \pm 13$	$n(125n \pm 13)$
256	$500n \pm 16$	$n(250n \pm 16)$	225	$50n \pm 15$	$n(5n \pm 3)$
324	$500n \pm 18$	$n(250n \pm 18)$	289	$250n \pm 17$	$n(125n \pm 17)$
400	$100n \pm 20$	$n(10n \pm 4)$	361	$250n \pm 19$	$n(125n \pm 19)$
484	$500n \pm 22$	$n(250n \pm 22)$	441	$250n \pm 21$	$n(125n \pm 21)$
576	$500n \pm 24$	$n(250n \pm 24)$	529	$250n \pm 23$	$n(125n \pm 23)$
625	$100n \pm 25$	$n(10n \pm 5)$	729	$250n \pm 27$	$n(125n \pm 27)$
676	$500n \pm 26$	$n(250n \pm 26)$	841	$250n \pm 29$	$n(125n \pm 29)$
784	$500n \pm 28$	$n(250n \pm 28)$	961	$250n \pm 31$	$n(125n \pm 31)$
900	$100n \pm 30$	$n(10n \pm 6)$			

Deoarece z^2 are șase cifre, urmează că z este cuprins între 316 și 999, astfel că vom da lui n valori în consecință, reținând numai pe acelea pentru cari x^2 este patrat perfect.

Se vede că pentru $z = 500n \pm a$, nu putem avea decât $n = 1$, $n = 2$. Introducând aceste valori, găsim soluția $y = 6$, $z = 506$, $x = 16$.

Pentru $z = 250n \pm a$, putem lua $n = 2, 3, 4$. Introducând aceste valori, găsim, pentru $n = 3$, soluția $y = 9$, $z = 759$, $x = 24$.

Pentru $z = 100n \pm a$, putem lua $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. De această formă avem pentru z numai expresiile

$$100n \pm 10 \ , \ 100n \pm 20 \ , \ 100n \pm 25 \ , \ 100n \pm 30.$$

Examinarea acestora ne dă soluţiile $z = 380, 475, 570$.

In fine, mai rămân de examinat cazurile $z = 50n \pm 5$, $z = 50n \pm 15$ cari nu ne dau nici o soluţie.

In felul acesta se poate rezolva şi problema 4301, ce am propus înaintea problemei 4313 şi a cărei soluţie va apare în numărul viitor.

M. G.

PROBLEMA 4517. *Să se rezolve sistemul :*

$$\begin{cases} m_1 (x_1 + x_2) - n_1 x_1 x_2 = 0 \\ m_2 (x_2 + x_3) - n_2 x_2 x_3 = p_2 \\ m_3 (x_3 + x_1) - n_3 x_3 x_1 = p_3 , \end{cases}$$

ştiind că : $m_1 n_3 = m_3 n_1$.

O. N. ŢINO.

Să considerăm sistemul mai general

$$\begin{cases} m_1 (u + v) - n_1 uv = p_1 \\ m_2 (v + w) - n_2 vw = p_2 \\ m_3 (w + u) - n_3 wu = p_3 \end{cases} \qquad (1)$$

Observăm dela început că pentru oricare din ecuaţiunile sistemului (1), cât timp ne ocupăm de soluţiunile finite m_i şi n_i nu pot fi deodată nuli.

— Dacă presupunem toţi m_i nuli, sistemul se reduce la sistemul particular cunoscut:

$$uv = a \ , \ vw = b \ , \ wu = c \qquad (2)$$

având ca ecuaţiune rezolvată

$$uvw = \pm \sqrt{abc} . \qquad (3)$$

Soluţiunile se obţin împărţind pe rând una din ecuaţiunile (3) la ecuaţiunile sistemului (2). Avem astfel două sisteme de soluţiuni.

— Dacă toţi n_i sunt nuli, sistemul (1) se reduce la sistemul cunoscut:

$$u+v=a\ ,\ v+w=b\ ,\ w+u=c \tag{4}$$

a cărui ecuaţiune rezolvată este:

$$u+v+w=\frac{a+b+c}{2} \tag{5}$$

iar soluţiunile se obţin scăzând pe rând din (5) pe fiecare ecuaţiune a sistemului (4), după cum se ştie.

— Dacă toţi p_i sunt nuli, sistemul dat devine un sistem omogen, care admite sistemul de soluţiuni, evident, $u=v=w=0$. Pentru a găsi sistemul de soluţiuni nu toate nule, observăm că dacă presupunem una nulă, celelalte sunt de asemenea nule, deci sistemul de soluţiuni nu toate nule este format de soluţiuni toate diferite de zero. In acest caz, sistemul se reduce la cazul cunoscut:

$$\begin{cases} m_1\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)-n_1=0 \\ m_2\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right)-n_2=0 \\ m_3\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{u}\right)-n_3=0 \end{cases} \tag{6}$$

Deoarece u, v, w sunt diferite de zero, inversele lor au valori finite, deci nici un m_i nu poate fi nul şi sistemul poate fi pus sub forma:

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=a\ ,\ \frac{1}{v}+\frac{1}{w}=b\ ,\ \frac{1}{w}+\frac{1}{u}=c \tag{6'}$$

a cărui rezolvare este analoagă cu a sistemului (4).

Trecând la rezolvarea cazului general, observăm că fiecare din ecuaţiunile sistemului (1) în raport cu una din variabile este de gradul întâiu; putem deci rezolva ultimele două ecuaţiuni, de exemplu, în raport cu u şi v şi avem:

$$\begin{cases} m_1(u+v)-n_1uv=p_1 \\ (m_2-n_2w)v=p_2-m_2w \\ (m_3-n_3w)u=p_3-m_3w \end{cases} \tag{7}$$

Cum m şi n în aceeaşi ecuaţiune nu sunt deodată nuli, coeficienţii lui u şi v nu pot fi nuli, decât dacă între parametrii ecuaţiunilor există relaţiuni de condiţie. Lăsând deocamdată aceste cazuri particulare la o parte, din sistemul (7) deducem:

$$\left\{\begin{array}{l} u = \dfrac{p_3 - m_3 w}{m_3 - n_3 w}\ ,\ v = \dfrac{p_2 - m_2 w}{m_2 - n_2 w} \\ m_1\left[\dfrac{p_3 - m_3 w}{m_3 - n_3 w} + \dfrac{p_2 - m_2 w}{m_2 - n_2 w}\right] - n_1 \dfrac{(p_2 - m_2 w)(p_3 - m_3 w)}{(m_2 - n_2 w)(m_3 - n_3 w)} = p_1 . \end{array}\right. \tag{8}$$

Ultima ecuaţiune fiind ecuaţiune de gradul al doilea în raport cu w, sistemul (1) admite în general două sisteme de soluţiuni. Aceste sisteme sunt amândouă reale sau amândouă imaginare, după cum realizantul ecuaţiunii în w este mai mare sau mai mic ca zero. In cazul când realizantul este nul, cele două sisteme de soluţiuni se reduc la un singur sistem de soluţiuni reale.

Din sistemul (1) avem sistemul propus, punând $p_1 = 0$ şi $m_1 n_3 = m_3 n_1$. Presupunând în acest caz m_1, de exemplu, nul, urmează că $m_3 = 0$, deoarece n_1 este diferit de zero în acest caz; iar sistemul devine:

$$uv = 0\ ,\ m_2(v + w) - n_2 vw = p_2\ ,\ uw = -\frac{p_3}{n_3} . \tag{9}$$

Dacă $p_3 \neq 0$, trebue să luăm $v = 0$ şi sistemul se reduce la următorul:

$$m_2 w = p_2\ ,\ uw = -\frac{p_3}{n_3} \tag{10}$$

a cărui rezolvare este imediată (m_2 fiind presupus diferit de zero, cazul cellalt fiind examinat la început).

Dacă $p_3 = 0$, sistemul este nedeterminat.

— Dacă presupunem $n_3 = 0$, urmează că $n_1 = 0$ (deoarece m_3 în acest caz este diferit de zero) şi sistemul se reduce la următorul:

$$m_1(u + v) = 0\ ;\ m_3(w + u) = 0\ ;\ m_2(v + w) - n_2 vw = p_2 ,$$

sau încă:

$$u + v = 0\ ,\ w + u = 0\ ,\ v + w - \frac{n_2}{m_2} vw = \frac{p_2}{m_2} \tag{11}$$

a cărui rezolvare este imediată. Există două sisteme de soluţiuni reale, dacă $m_2^2 - n_2 p_2 > 0$. (Am presupus iarăşi $n_2 \neq 0$, cazul $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ fiind examinat la început).

— Dacă presupunem $m_2 = 0$, m_1 şi m_3 fiind diferiţi de zero, punând:

$$\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_3}{m_3} = m\,, \quad \frac{p_3}{m_3} = r\,, \quad \frac{p_2}{n_2} = p,$$

sistemul devine:

$$u + v - muv = 0\,;\; w + u - muw = r\,;\; vw = -p \qquad (12)$$

şi avem imediat, ca în cazul general,

$$v = \frac{u}{mu - 1} \quad w = \frac{u - r}{mu - 1}\,, \quad \frac{u^2 - ru}{(mu-1)^2} + p = 0 \qquad (12')$$

care, pentru $1 + mp^2 \neq 0$, admite două sisteme de soluţiuni finite reale, dacă $r^2 + 4mpr - 4p > 0$.

— Dacă toţi m_i sunt diferiţi de zero, a treia ecuaţiune a sistemului (8), punând:

$$\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_3}{m_3} = m\,, \quad \frac{n_2}{m_2} = n\,, \quad \frac{p_2}{m_2} = p\,, \quad \frac{p_3}{m_3} r\,,$$

devine:

$$\frac{r - w}{1 - mw} + \frac{p - w}{1 - nw} - m\frac{(p - w)\;(r - w)}{(1 - mw)\,(1 - nw)} = 0, \qquad (13)$$

care dă pentru sistemul propus două sisteme de soluţiuni finite şi reale, dacă:

$$n \neq 0 \text{ şi } (2 + nr - mr)^2 - 4n\,(r + p - mpr) > 0.$$

— Dacă în sistemul general presupunem, de exemplu, că: $m_2^2 = n_2 p_2$, ecuaţiunea a doua a sistemului (7) devine:

$$\left(\frac{m_2}{n_2} - w\right)\left(\frac{n_2}{m_2} v - 1\right) = 0, \qquad (14)$$

iar sistemul (7) se descompune în două sisteme:

$$\begin{cases} w = \dfrac{m_2}{n_2} \\ m_1\,(u + v) - n_1\,uv = p_1 \\ \left(m_3 - n_3 \dfrac{m_2}{n_2}\right) u = p_3 - m_3 \dfrac{p_2}{m_2} \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} v = \dfrac{m_2}{n_2} \\ m_1\,(u + v) - n_1\,uv = p_1 \\ (m_3 - n_3\,w)\,u = p_3 - m_3\,w \end{cases}$$

a căror rezolvare, în cazul general, este imediată.

Acelaşi lucru, dacă presupunem între parametrii ecuaţiei a treia relaţiunea $m_3^2 = n_3 p_3$.

Observare. Sistemul (1) poate fi generalizat pentru n variabile $x_1, x_2, \ldots x_n$, în acel caz însă rezolvarea sistemului depinde de rezolvarea unei ecuaţiuni de gradul $(n-1)$ cu o necunoscută.

Problema a fost rezolvată în cazul propus de D-l MIRCEA GRUMĂZESCU (Şcoala Ofiţeri Artilerie).

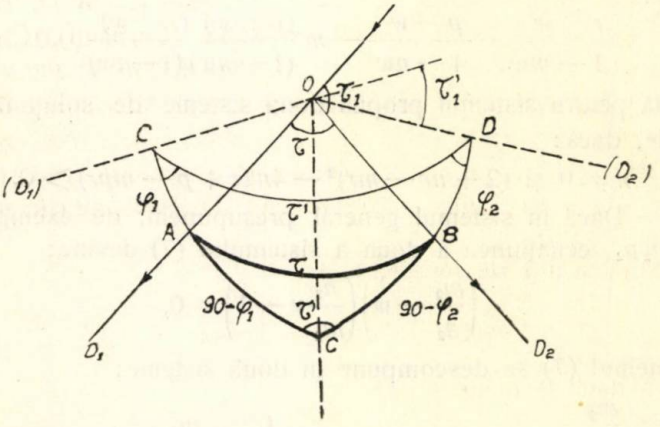
O. N. Ţ.

PROBLEMA 4531. *Se cere relaţia care leagă unghiul τ, ce-l fac în spaţiu două drepte concurente D_1 şi D_2 de înclinaţii cunoscute φ_1 şi φ_2, cu proiecţia lui pe un plan oarecare. Să se discute.*

GH. VASILIU.

Cu centrul în O, locul unde se întâlnesc cele două drepte date D_1 şi D_2 descriu o sferă pe care aceste două drepte o înţeapă în A şi B.

Un plan paralel cu planul de proecţie şi faţă de care dreptele D_1 şi D_2 au înclinaţii cunoscute φ_1 şi φ_2 şi pe care ele se proectează în (D_1) şi (D_2) tae sfera după arcul CD; arcul fiind egal cu unghiul τ' pe care-l fac între ele dreptele (D_1); (D_2).



Din triunghiul sferic ABC, deduc că:

$$\cos\tau = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\tau'. \qquad (1)$$

Relaţia este pentru cazul când cele două drepte faţă de punctul lor de întâlnire O sunt în acelaş sens înclinate; în cazul că ele sunt înclinate în sensuri diferite, de exemplu pentru τ_1; avem:

$$\cos\tau_1 = -\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\tau'_1. \qquad (2)$$

In fine dacă $D_1 \perp D_2$, atunci:

$$\cos\tau' = \mp \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 \qquad (3)$$

unde semnele sunt: — pentru înclinaţie de acelaş sens, + pentru sensuri contrarii. De aici deduc că proecţia unui unghiu drept în spaţiu este mai mare ca 90° când laturile lui înclină faţă de vârf în acelaş sens şi proecţia este mai mică ca 90° când laturile lui înclină în sensuri diferite.

La această problemă nu am primit nici o soluţie.

GH. V.

PROBLEMA 4545. *Să se rezolve ecuaţiunea:*

$$\sin^4 x - \sin^3 x \cos x - 3\sin^2 x \cos^2 x + 3\sin x(\cos 3x + 3\cos x \sin^2 x) = 0.$$

I. CURCHI.

Soluţie dată de D-nii: APOSTOL V. RADU (L. M. D. Târgovişte), BUZINCU I. I. (Iaşi), CARAMAN VASILE (Cernăuţi), CHIRIAC I. C. (Şc. Navală), COJOCARU P. (P.-Neamţ), CSEKE VILHELM (student, Cluj), FLORESCU VICTOR (clasa VI-a lic. Mânăstirea Dealu-Târgovişte), GAVRILESCU N. C. (Bacău), MARTEŞ GRIGORE (Şcoala Navală), MAZILU C. PANAIT (elev inginer), RUNCEANU N. C. (clasa VII-a lic. militar Cernăuţi) şi ŞTEFĂNESCU D. NICOLAE (lic. militar Mânăstirea Dealu).

Ţinând seamă de formula:

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

ecuaţiunea dată se poate scrie:

$$\sin x(\sin x - \cos x)(4\sin^2 x - 3) = 0$$

de unde

$$\text{I} \qquad \sin x = 0$$

$$\text{II} \qquad \sin x = \cos x$$

$$\text{III} \qquad 4\sin^2 x - 3 = 0$$

care dau respectiv soluțiile:

1) $x = k\pi$

2) $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

3) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (k fiind un întreg oarecare).

Observațiuni: 1°. D-nii: MAVRODIN D. și MOISESCU MIRCEA au rezolvat problema scriind ecuațiunea din enunț sub forma:

$$y^4 - y^3 - 3y^2 + 3y = 0$$

unde

$$y = \operatorname{tg} x.$$

2°. Deși problema dată se reduce la rezolvarea a trei ecuațiuni trigonometrice tratate în manualele de curs, totuși majoritatea rezolvitorilor nu au găsit toate soluțiunile problemei.

Au rezolvat parțial problema D-nii: BOROȘ ILIE, CEAUȘESCU V., COTESCU C., MARIN DAN, DOBRESCU PAUL, ENACHE I. D., LEUCO ION, MIHĂILESCU A., NĂSTASE M.

3°. Următorii în schimb, au găsit mai multe rădăcini decât cele cari convin problemei: BOGDAN IOAN, BUCUR VIRGIL, CERCELAU DUMITRU, CHIRIȚĂ MIHAIL, GRUMĂZESCU MIRCEA, CORNĂȚEANU I. AUREL, CĂLIN I. C. DIMITRIU, HORNSTEIN H. S., MĂNAC M., POSTELNICESCU M., RADA DIMITRIE și trebue să recunoaștem cu mirare printre aceștia, harnici corespondenți ai Gazetei.

A. A. R.

PROBLEMA 4701. *Se dau în plan punctele* A, B, C *și o dreaptă* Δ *trecând prin* A. *Fie* M *un punct pe* Δ. *Paralela din* M *la* BC *taie pe* AC *în* N *și pe* AB *în* N'. *Paralela din* N *la* AB *taie pe* MB *în* P, *iar paralela din* N' *la* AC *taie pe* MC *în* Q. *Să se demonstreze că dreptele* BQ, CP *sunt paralele cu* Δ.

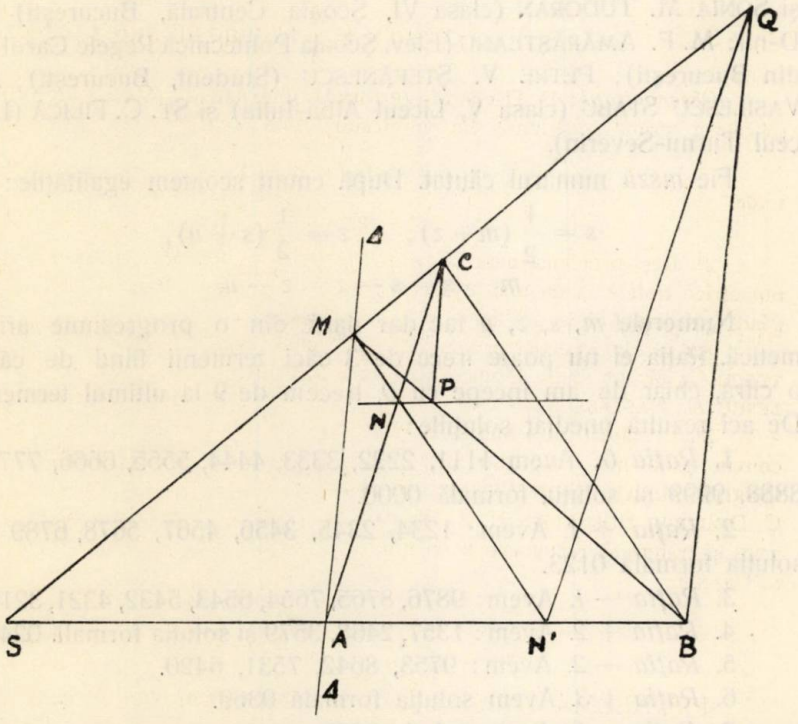
G-L GH. BUICLIU.

Soluție dată de D-șoara: ALEXANDRA VASILESCU (Lic. de fete Alba Iulia) și de D-nii: I. I. ȚIȚEICA, O. GH. RĂDULESCU, R. APOSTOL (Lic. militar, Târgoviște); M. L. A. NEGREA (Brăila); M. A. VASILESCU-STABU (Lic. Mihai Viteazul, Alba Iulia); BAL LASCU (Student, Cluj); S.-LT. M. GRUMĂZESCU; I. I. PETRESCU și A. M. DEUTSCH.

După teorema lui THALES avem

$$\frac{MP}{MB} = \frac{MN}{MN'} = \frac{MC}{MQ}$$

ceeace arată că BQ şi CP sunt paralele.



De asemeni dacă S este intersecţia lui MQ cu AB, din SAC şi SN'Q de o parte şi din SN'M şi SBC de altă parte, se scoate

$$\frac{SA}{SN'} = \frac{SC}{SQ} \text{ şi } \frac{SN'}{SB} = \frac{SM}{SC}$$

care prin înmulţire dau

$$\frac{SA}{SB} = \frac{SM}{SQ}$$

deci $\Delta \parallel BQ$ şi faţă cu prima parte $\Delta \parallel CP \parallel BQ$.

Bune soluţii analitice dela D-nii: M. F. AMĂRĂŞTEANU, H. M. BODNĂRESCU, D. MAVRODIN şi N. D. ŞTEFĂNESCU.

PROBLEMA 4747. *Se cere a se găsi numere de patru cifre aşa ca cifra a doua şi a treia a lor să fie media aritmetică a cifrelor între care se găsesc scrise.*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-rele: CORNELIA COMLOŞAN (Studentă, Cluj) şi SONIA M. TUDORAN (clasa VI, Şcoala Centrală, Bucureşti) şi D-nii: M. F. AMĂRĂŞTEANU (Elev, Şcoala Politecnică Regele Carol II din Bucureşti); PETRE V. ŞTEFĂNESCU (Student, Bucureşti); A. VASILESCU STABU (clasa V, Liceul Alba-Iulia) şi ST. C. FILICĂ (Liceul Turnu-Severin).

Fie *mszu* numărul căutat. După enunţ scoatem egalităţile:

$$s = \frac{1}{2}(m+z), \qquad z = \frac{1}{2}(s+u),$$

$$\therefore \quad m - s = s - z = z - u.$$

Numerele m, s, z, u fac dar parte din o progresiune aritmetică. Raţia ei nu poate trece de 3 căci termenii fiind de câte o cifră, chiar de am începe cu *0*, trecem de 9 la ultimul termen. De aci rezultă imediat soluţiile:

1. *Raţia 0.* Avem 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999 şi soluţia formală 0000.

2. *Raţia + 1.* Avem: 1234, 2345, 3456, 4567, 5678, 6789 şi soluţia formală 0123.

3. *Raţia — 1.* Avem: 9876, 8765, 7654, 6543, 5432, 4321, 3210.

4. *Raţia + 2.* Avem: 1357, 2468, 3579 şi soluţia formală 0246.

5. *Raţia — 2.* Avem: 9753, 8642, 7531, 6420.

6. *Raţia + 3.* Avem soluţia formală 0369.

7. *Raţia — 3.* Avem soluţia 9630.

Problema admite dar 30 soluţii efective şi 4 soluţii formale

A rezolvat problema pe o cale mai lungă şi a dat toate soluţiile în număr de 34 D-l V. FLORESCU (Liceul militar N. Filipescu, Mânăstirea Dealului). D-nii: S.-LT. M. C. VLAD (Student Cluj), D. M. PROTOPOPESCU (Liceul Brăila), TR. IGNATIU, M. D. POPA, A. V. PETRESCU, P. MAMUT şi L. M. BIVOLARU (Liceul Militar, Iaşi) şi D. RIPIANU au dat cele 30 soluţii efective. D-l S.-LT. M. GRUMĂZESCU nu a dat soluţiile terminate cu 0. Au dat 24 soluţii D-nii: M. L. A. NEGREA (Brăila) şi D. N. TEODORESCU (Liceul Mânăstirea Dealului); 21 soluţii D-nii: P. GH. GHEORGHIU şi P. V. CONSTANTIN.

D-l AL. C. JIPA (Liceul Militar, Iaşi) a studiat chestiunea pentru mediile geometrice şi a găsit ca soluţiuni numerele cu patru cifre identice, numerele care au la sute şi zeci cifra 0 precum şi numerele 1248 şi 8421. D-l M. T. AMĂRĂŞTEANU şi R. I. CIURESCU au considerat şi mediile geometrice dar au pierdut soluţiile cu $s = z = 0$.

D-l M. T. AMĂRĂŞTEANU a studiat şi cazul mediilor armonice şi a găsit că nu sunt alte soluţii decât cele cu $m = s = z = u$.

EXERCIȚII

13. Să se stabilească relația:

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{h_a - 2r}{h_a} & \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2} \\ 1 & \dfrac{h_b - 2r}{h_b} & \operatorname{tg}\dfrac{C}{2}\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} \\ 1 & \dfrac{h_c - 2r}{h_c} & \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

MARCEL F. AMĂRĂȘTEANU.

R. Avem:

$$\frac{h_a - 2r}{h_a} = 1 - \frac{2r}{h_a} = 1 - \frac{\dfrac{2s}{p}}{\dfrac{2s}{a}} = \frac{p-a}{p} = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Analog găsim:

$$\frac{h_b - 2r}{h_a} = \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}, \quad \frac{h_c - 2r}{h_c} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}.$$

Determinantul are în acest caz 2 coloane egale.

14. Să se stabilească relația:

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{h_a}{h_a + 2r_a} & \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2} \\ 1 & \dfrac{h_b}{h_b + 2r_b} & \operatorname{tg}\dfrac{C}{2}\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} \\ 1 & \dfrac{h_c}{h_c + 2r_c} & \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

MARCEL F. AMĂRĂȘTEANU.

R. Avem:

$$\frac{h_a}{h_a + 2r_a} = \frac{\dfrac{2s}{a}}{\dfrac{2s}{a} + \dfrac{2s}{p-a}} = \frac{\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{p-a}} = \frac{\dfrac{1}{a}}{\dfrac{p-a+a}{a(p-a)}} = \frac{p-a}{p} = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

etc.

15. Tangenta într'un punct M al curbei:

$$(x^2 + y^2)^k = Axy\left[C_k^1 x^{k-2} - C_k^3 x^{k-4} y^2 + C_k^5 x^{k-6} y^4 - \ldots\right]$$

face cu OM un unghiu care stă în raportul k cu unghiul MOX.

C. IONESCU-BUJOR.

R. Trecând la coordonate polare, ecuaţia curbei se scrie:

$$r^k = A \sin k\theta \qquad (1)$$

V fiind unghiul pe care tangenta în M îl face cu OM,

$$\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'},$$

dar din (1)

$$r^{k-1} r' = A \cos k\theta \qquad (2)$$

Impărţind (1) cu (2),

$$\operatorname{tg} V = \operatorname{tg} k\theta.$$

PROBLEME PROPUSE

4771. O fracţie are termenii mai mici ca 1000 şi este echivalentă cu 1/2. Răsturnându-i termenii ea devine echivalentă cu 8/5. Se cer soluţiunile care îndeplinesc aceste condiţiuni.

I. IONESCU.

4772. Fie A', B', C' picioarele bisectoarelor interioare ale unui triughiu ABC. Din A', B', C' se duc perpendicularele $A'A'_1$, $B'B'_1$, $C'C'_1$ respectiv pe bisectoarele BB', CC', AA'. Dreptele AA'_1, BB'_1, CC'_1 formează un triunghiu $A_2B_2C_2$, unde A_2 este intersecţia dreptelor BB'_1, CC'_1, etc.

1. Să se găsească suprafaţa triunghiului $A_2B_2C_2$ în funcţie de suprafaţa triunghiului ABC şi de laturile acestuia.

2. Să se deducă de aci că în cazul când ABC este echilateral, avem: Supr. ABC = 7 supr. $A_2B_2C_2$.

3. Să se deducă deasemenea că AA'_1, BB'_1, CC'_1 nu pot fi niciodată concurente.

OCTAV ORĂNESCU.

4773. Să se construiască un patrulater oarecare cunoscând lungimile laturilor şi segmentul care uneşte mijloacele diagonalelor.

GH. POPESCU-BOTOŞANI.

4774. Fie A, B, C, M patru puncte pe o dreaptă sau conciclice; O un punct oarecare şi P arbitrar pe cercul AMO; cercurile MPB şi MPC taie cercul OBC în β şi γ; perechile de cercuri OPβ, OAC şi OPγ, OAB sunt respectiv tangente.

N. N. MIHĂILEANU.

4775. In triunghiul ABC fie înălţimea AD. Să se ducă prin vârful C o dreaptă care să taie pe BD în E şi pe AB în F în aşa fel ca să avem:

$$\overline{CE} = \overline{FA} - \overline{FB}.$$

GH. VASILIU.

4776. Fie ABCD un patrulater ortodiagonal şi cercurile C_a, C_b, C_c, C_d cu centrele în A, B, C, D astfel ca perechile (C_a, C_b), (C_b, C_c), (C_c, C_d) să fie ortogonale.

1. Să se arate ortogonalitatea cercurilor C_a, C_d.

2. Să se determine raza cercului C_a astfel încât C_b, C_d să fie ortogonale. Discuţie.

3. Condiţia de adăogat pentruca deasemenea C_a, C_c să fie ortogonale.

C. IONESCU-BUJOR.

4777. Fie G centrul de greutate al unui tetraedru ABCD. Dacă prin un punct P se duc plane paralele cu feţele BCD, CDA, DAB, ABC care întâlnesc pe GA, GB, GC, GD în α, β, γ, δ, să se demonstreze că:

$$\frac{\overline{G\alpha}}{\overline{GA}} + \frac{\overline{G\beta}}{\overline{GB}} + \frac{\overline{G\gamma}}{\overline{GC}} + \frac{\overline{G\delta}}{\overline{GD}} = 0.$$

V. THÉBAULT.

4778. d_a, d_b, d_c fiind distanţele dela centrul cercului circumscris la laturile unui triunghiu, să se stabilească relaţia:

$$2S(a^2 + b^2 + c^2 - 6R^2) = a^3 d_a + b^3 d_b + c^3 d_c,$$

(celelalte notaţiuni fiind cele obicinuite).

LT. C. IONESCU-ŢIU.

4779. Intr'un triunghiu oarecare avem inegalitatea:

$$\frac{S.R}{2} + \frac{R^2}{a} \geqq 6R - \frac{1}{S},$$

notaţiunile fiind cele obicinuite.

HAR. P. IONESCU.

4780. O persoană bea bere cu halba. Prima sorbitură lasă nivelul lichidului la un unghiu $\alpha = 45^0$ faţă de gura halbei. Se cere numărul de sorbituri pentru a consuma întreg conţinutul presupunându-le cantitativ egale, iar halba un cilindru de dimensiuni obicinuite.

Care ar fi forma cea mai proprice a unei halbe, astfel ca numărul de sorbituri să fie minimum două?

Discuţia pentru α oarecare.

ALEXANDRU NICULESCU.

4781. Dacă între coeficienţii a_0, a_1, a_2 ai ecuaţiei:

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

avem relaţia:

$$4na_0 a_2 - 3(n-1) a_1^2 \geqq 0,$$

ecuaţiunea are neapărat rădăcini imaginare.

M. GHERMĂNESCU.

4782. Dintr'un punct fix P, situat în planul unui cerc fix (0), se duce o secantă care taie cercul (0) în A şi B. Să se găsească învelitoarea polarei punctului P în raport cu cercul descris pe $\overline{AB}$ ca diametru, când secanta PAB se roteşte în jurul lui P.

AL. ŞCODRANU.

ERATĂ. In Vol. XLII—219 la exerciţiul Nr. 6 se va scrie Z în loc de 2.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam Mircea (2461, 4578, E, N); *Amărăștеanu F. Marcel* (4767); *Anca I. Iuliu* (4727); *Anicolaesi V. Clement* (4634, 714); *Apostol V. Radu* (4494, 727, 56, 67); *Arșavschi Alexe* (4496, 707, 17, 46); *Bazac I. A. Dan* (4727); *Beiu-Paladi Gh. Ernest* (4570, 714, 52); *Beșchea C.* (4753); *Bivolaru M. Livius* (4634, 727, 29, 48, 52); *Bodnărescu H.* (4714); *Bogdan G. Ioan* (4634, 757, 65); *Bogza Vasile* (4634, 91, 765); *Botez Gica* (4714, 52); *Bran Gh.* (4727, 53); *Bucurencu I. Vasile* (4727); *Bucur N. Virgil* (4634, 714, 18, 27, 28, 29, 52); *Călinescu Aurelian* (4676, 727); *Câmpan Fl.* (A); *Caraman D. Vasile* (4757); *Cârdeiu D. Gh.* (4750, 52); *Chițulescu I. T.* (4759); *Cloc I. D-tru* (4727); *Ciurescu I. Radu* (4717, 53, 60); *Cojocaru P. Petru* (4756, 57, 67); *Comloșan Cornelia* (4760); *Constantinescu G. G.* (1876, 4437, 84, 542, 650, 753, N); *Cornățeanu I. Aurel* (4634, 716, 27, 52, 57, 69); *Cotescu Const.* (4634, 727, 29, 52); *Cotigher S. Iacob* (4570, 760, 67, R); *Crăciun I. I.* (4750, 52, 60); *Deciulescu D. Gh.* (4727); *Deutsch Adolf* (4727, 29, 43, 48, 52, 56, 57); *Dobrescu Paul* (4573, 77, 95, 622, 34, 48, 56, 60, 63, 67, 91, 701, 14, 18, 27, 32, 38, 52, 54, 56, 57, 67); *Dumitriu Călin Ioan* (4634, 91, 727, 28, 29, 52, 57, 65); *Dumitriu Gigea* (4691); *Eckstein Virgil* (4738); *Filică C. St.* (4723; 59); *Firu Paul* (4634, 752, 59); *Florescu L. Victor* (4542, 54, 719, 50, 60, 63, 65, 67); *Gheorghiu P. P.* (4760); *Gloden A.* (4662); *Goormaghtigh R.* (A); *Grumăzescu Mircea* (4628, 752, 60, 67, P); *Ianculescu Octavian* (3880, 4671, 96, 745, 53); *Iarca R. S.* (4760); *Ignatiu Traian* (4750, 52, 53); *Ioan A. Ilie* 4727); *Ionescu D. Stelian* (4727); *Ionescu G. Iulian* (4634, 752); *Ionescu M. C.* (4760); *Jareghie V. Ioan* (4750, 52); *Lascu Bal* (4732, 33); *Lăzărescu Stelian* (4727); *Mamut Petre* (4585, 634, 91, 712, 29, 36, 48, 50, 52, 53, 60); *Manoil E. Locot. Col.* (4760); *Marcovici E.* (4717, 32); *Marian V.* (A); *Martac Radu* (4763); *Mavrodin D-tru* (4279, 418, 53, 67, 78, 530, 42, 52, 54, 56, 676, 739, 43); *Mihăilescu G. Paul* 4750, P); *Musceleanu Ileana* (4750, 53); *Năstase Marin* (4691, 714); *Nedelcu V. Nicolae* (4758); *Negrea A. Mircea-Leonte* (4727, 45, 60, 63, 65, 67); *Negulescu D. Ștefan* (4727); *Pădureț A. Vasile* (4079, 714); *Pantelimon V. Const.* (4701, 50, 52); *Pascaru I. Const.* (4750); *Pascu Horia* (4727); *Petrescu I. Ion* (4645); *Petrescu V. Achile* (4750, 52); *Popa D. Mircea* (4585, 701, 50, 52, 60); *Popa I.* (A); *Popescu-Zorica A.* (4467, 518, 24, 70, 634); *Popoviciu Gr.* (4447, 520, 83, 85, 644, 61, 81, 82, 735, 39, 60, 67); *Postelnicescu C. M.* (4701, 50, 57, 59, 60); *Pungă I. Nicolae* (4634, 727, 48, 67); *Rădulescu Oct.* (4727); *Ripianu D-tru* (4727, 32, 33, 48); *Rohr I. Alex.* (4753, 59); *Romașcan Georgeta* (4767); *Roșculeț N. M.* (4759); *Runceanu N. C.* (4727); *Săndulache Const.* (P); *Segal J.* (4760); *Stănculescu I. I.* (4750); *Stănculescu Virgil* (4634, 752, 59); *Ștefănescu D. N.* (4676, 727, 33, 50, 60, 63, 67); *Ștefănescu V. Petre* (4748, 52); *Stoian S. Ioan* (4752, 57); *Streder G. Ioan* (4701, 50, 52, 53, 67); *Tanasiciuc V. Claudius* (4608, 713, 17, 27, 48); *Tânjală G. Emanoil* (4714, 39, 50, 53); *Teodorescu N. Dorin* (4727, 48, 52, R), *Țilenschi M. S.* (N); *Tilică C. Șt.* (4714, 17, 19, 39, 44, 60, 67); *Țițeica I. Ilie* (4286, 498, 727, 43, 65); *Trufin C. Traian* (4752, 53, 60); *Tudoran M. Sonia* (4708, 23, 39, 56, 60, 63); *Turcu R. Sandu* (4750, 52); *Vartic Gh. Nicolae* (4691, 714, 52); *Vasilescu-Stabu A. Mircea* (4570, 85, 622, 36, 714, 17, 27, 39, 48, 50, 52, 53); *Vișa Eugen* (4717); *Vlad I. C. Mihai* (4717); *Zamfirescu Gh. I. Locot.* (P).

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN**

C. 43379

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLII

NUMĂRUL 7.—MARTIE 1937

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASTRONOMIE" SIBIU

SUMARUL

1. Aritmetica lui G. Obradovici . . . . . *Victor Marian.*
2. Noţiuni de geometrie cinematică (urmare dela pagina 297) . . . . . *Eugen Viţa.*
3. Articol despre triunghiul echilateral . . . *Ernest Abason.*
4. Regulamentul fondului bursei „profesor Ion Ionescu".
5. Circulară adresată de Ministerul Educaţiei Naţionale tuturor şcolilor secundare.
6. Note Matematice: 33 — 35.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 264.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 2556, 4165, 4488, 4591, 4658, 4679, 4694, 4713, 4714, 4718, 4750.
11. Exerciţii: 16 — 19.
12. Probleme propuse: 4783 — 4794.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1937

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer-Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **D. Stan**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1936 şi nerezolvate sunt enumărate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4724, 26, 31, 34, 42, 49, 61, 66, 68, 70, 72, 75, 79, 80, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	220	260	80
5— 8 „	375	425	100
9—16 „	620	700	160
Coperta	120	160	80

Avem plăcerea a anunţa că dela 28 Ianuarie a. c., mai face parte din Societatea noastră şi Domnul Inginer HENRY THEODORU.

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLII. No. 7. *SUPLIMENT* MARTIE 1937

RECREAŢIUNI

1. **Jumătăţi de sate.** In Basarabia unele sate au numele precedate de cuvântul **Pol,** care înseamnă *jumătate* pe slavoneşte. Aşa sunt satele Pol-Medicăuţi, Pol-Onuţ, Pol-Rubotin, Pol-Vanicăuţi, Pol-Vantina în judeţul Hotin; satul Pol-Ţepilova în judeţul Soroca.

I. I.

*

2. **Demonstraţie rapidă.** In Suplimentul cu Exerciţii se cerea a se arăta că dacă $a + b + c = 0$, atunci:

$$\Sigma (1 - a)(b^2 + c^2 + bc) = 3(a^2 + b^2 + c^2)/2.$$

Se observă că $\Sigma (1 - a) = 3$ şi deci rămâne de arătat că:

$$3(b^2 + c^2 + bc) = 3(a^2 + b^2 + c^2)/2,$$

care se reduce la $(b^2 + c^2 + 2bc) = a^2$, relaţie adevărată căci provine din ridicarea la patrat a relaţiunii $(b + c) = - a$.

DORIN TEODORESCU.

*

3. **Din tezele elevilor.** Se cerea un triunghiu cu perimetrul de 36 cm asemenea cu triunghiul de laturi 3, 4 şi 5 cm.

Un elev, după ce toată ora muiase de geaba, în mod ritmic, tocul în cerneală, văzând că vin să strâng tezele, trase cu coada ochiului în caetul vecinului şi văzându-l pe el scriind 12 cm pe una din laturi, scrise grăbit şi clar: *laturile sunt 11, 12 şi 13.*

Şi ca verificare pentru cine nu crede: $11 + 12 + 13 = 36, \ldots$ c. c. t. a.

N. M.

*

4. **Problema şahului.** Iată cum explică poetul D. BOLINTINEANU această problemă a invenţiunii şahului, pe care după cum se vede, el nu a priceput-o:

„Nu este nici un joc care să mănânce mai mult timp ca jocul şahului. Acest joc se inventă de SEZA, filosof indian, şi iată cu ce ocazie:

„**Ardlir,** rege al Persiei, inventase jocul triostracului şi era mândru de aceasta. Toţi indienii se apucară să inventeze câte ceva, ca să placă Domnului lor. SEZA, unul dintre ei, descoperi jocul şahului şi îl arătă Regelui, care îi promise pentru recompensă orice va dori. Filosoful îi propuse să îi dea atâtea boabe de grâu, câte ochiuri se află în tabela de şah, îndoind la fiecare ochiu, adică şaizeci şi patru de ori. Regele mai întâiu râse de această cerere, dar când începuse a număra, după dorinţa filosofului, îndoind mereu boabele de grâu, văzu că nu este în stare a plăti atâta mare cătăţime, căci îndată ce ajunse la pătratul numărului ochiurilor, mai urmând, numărul se făcu nemărginit".

SEZA ceruse să-i dea $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$ boabe de grâu, număr care are 20 de cifre, dar nu este nici de cum nemărginit!

I. I.

*

5. **Matematica în literatură.** Colecţia *Recreaţiilor Matematice* au pus în evidenţă numeroase exemple de întrebuinţarea în literatură, în mod impropriu, a temeiurilor de ştiinţă şi mai cu seamă de matematică. Autorii moderni, în special, fac un abuz neertat în această privinţă pentru-că, în majoritatea cazurilor, nu-şi dau silinţa să cunoacă adevăratul senz al termenilor pe care-i întrebuinţează. In recreaţia aceasta voi da câteva exemple noi, luate din un roman al unui academician.

Vrând să facă o figură de efect, constată că un anume obiect este *«suspendat ca un loc geometric»*.

Cine nu ştie ce este locul geometric nu înţelege nimic, iar cine ştie ar putea spune D-lui autor *«vă rog nu vă supăraţi deschideţi . .* LAROUSSE *la pagina · · rândul · · unde veţi găsi o explicaţie sumară a noţiunei de loc geometric»*.

In altă parte acelaşi autor zice *«...Le tetraèdre de la chambre...»*. Oricât de cubist ar fi cineva, nu cred să fi văzut cameră tetraedrală, nu să ştie ce este tetraedrul unei camere. De altfel nici geometrii nu au această noţiune de *Tetraedru al unei camere!?*

In altă parte autorul proclamă că eroul său *«se met à danser comme un cosinus»*.

Şi încă multe altele.

Romantismul nu este ştiinţă, este adevărat. Cu toate astea FLAUBERT, părintele romantismului, nu întrebuinţa termeni matematici atât de impropriu în scrisul lui, cum fac scriitorii moderni.

Vom da exemple de admirabilă întrebuinţare a termenelor matematici în poezia lui EMINESCU, despre care avem dovezi că a studiat algebra cu temeiu pentru a nu *«suspenda locuri geometrice»*.

Scriitorii de seamă îşi dau silinţa să înveţe precis tot materialul pe care-l folosesc în literatură pentru că ei îşi dau seama că stilul este şi artă şi ştiinţă.

GH. B.

*

6. **Spiritul de observaţie!** In Istoricul pe care l-am publicat în Volumul jubilar pentru 40 ani de apariţie al *Gazetei Matematice*, intitulat *«Constituirea, administrarea şi redactarea Gazetei Matematice»*, am povestit un caz tipic de până unde poate duce spiritul de observaţiune. Un culegător tipograf, IORDAN MIHĂILESCU, — care nu avea nici patru clase primare — îmi trimite într'o seară corecturi cu un bileţel în care mă ruga să mă uit bine la o formulă greşită care conţinea integrale. Compar culesul cu manuscrisul autorului şi-l găsesc bun. Toată seara mi-am bătut capul să văd de unde a scos IORDAN că formula este greşită! Timp ca să refac toate teoriile şi calculele autorului nu aveam, şi nu i-ar fi putut trece nimănui prin cap ca un simplu zeţar să fi verificat pe autor. A doua zi de dimineaţă am dus eu corecturile la tipografie, am chemat pe IORDAN şi l-am întrebat ce l'a făcut să bănuiască că formula este greşită, căci găsesc că a culeş-o bine după manuscris. El îmi răspunde că nu a greşit dânsul ci autorul articolului, căci, să vezi D-ta: ăla nu ştie că după semnul ăsta $(\int)$ trebuie să vie în formulă un d de un fel oarecare.

Şi avea dreptate: autorul uitase să scrie după semnul integralei diferenţiala variabilei! Lui IORDAN i se întipărise faptul că semnul $\int$ fără vreun d după el nu poate sta într'o formulă şi acest fapt de observaţie l'a făcut să corecteze pe un doctor în matematici!

De curând s'a mai ivit un caz interesant de această natură. D-l culegător tipograf HERGOPOL GHEORGHE primeşte corecturile la culesul problemei 4528, tipărită la paginile 266 - 268 din acest an. Pe manuscris litera grecească ω nefiind clar scrisă, ea semăna mai mult a w, afară de câteva locuri unde se vedea clar că trebuia ω şi unde se şi pusese. Corectura s'a făcut de un licenţiat în matematici şi de un inginer care ambii nu au observat confuziunea şi au dat dar *«bun de imprimat»*. Culegătorul observă confuziunea şi o demonstrează corectorilor, trimiţând-o înapoi cu următoarea notă:

«NB. Se mai găsesc în text câţi-va **dubluve** *de cursive, rămân aşa sau se înlocuesc cu omega, după cum se vede în figură?»*.

Graţie acestei notiţe culegătorul a corectat şi pe autorul redactării problemei şi pe corectorii ei!

Societatea *Gazeta Matematică* încunoştiinţată de această atenţiune la culesul Revistei noastre, a votat o recompensă culegătorului tipograf HERGOPOL GHEORGHE.

I. IONESCU.

*

7. Realul politicianilor. Dintr'un discurs politic:

«Guvernarea partidului nostru a avut, asupra desvoltării economice a ţării, o reală influenţă».

Un opozant matematician replică: *«Reală, dar negativă»*.

N. M.

*

8 Anecdote dela un... institut tecnic! Mi s'au povestit următoarele anecdote pe care le dau fără comentarii:

a) Un profesor căpătând ecuaţia $x + y = 0$ face observaţia că „$(x + y)$ este ecuaţia unei drepte şi fiind egală cu zero, această dreaptă nu are ecuaţie".

Mai interesantă de cât această observaţie este observaţia că auditorul nu a avut de zis nimic!

b) Acelaş profesor având odată o parabolă cu vârful în jos îi găseşte două tangente paralele cu OX la distanţă finită: una $x = 3$ şi alta $x = 7$.

c) Alt profesor calculează $\int r/dr$ şi găseşte logr. La observaţia unui student că nu se poate, profesorul răspunde: *«nu e nimic, e invers»*. Somat să se explice, zice: *«în realitatea este log* $(1/r)$, *dar acesta este* — logr *şi pe noi nu ne interesează semnul»*.

Curiosul student a amuţit şi a amorţit la auzul acestui dezinteres!.

GH. B.

*

9. **Puţină bună cuviinţă.** Rândurile care urmează şi-ar avea loc aiurea, dacă *Gazeta Matematică* ar avea un spaţiu rezervat pentru morală. Cred că şi în „Recreaţii" vor putea servi la ceva.

Pe vremuri, sunt mulţi ani de atunci, eram fericit când primeam câte o problemă dela redactorii gazetari cu însemnări, observări, îndrumări, felicitări sau dojane. Şi nu era uşoară dojana D-lui I. IONESCU, care scria *«reluaţi problema pe care nu aţi atacat-o decât parţial»* s'au când scria regretatul V. CRISTESCU *«păcat că n'aţi desvoltat parte finală căutând o generalizare* sau D-l G. ŢIŢEICA, sau. . . . Nu găseam cuvintele cele mai potrivite să mulţumim şi nu ştiam câtă străduinţă să punem pentru a completa soluţia aşa cum ni se cerea.

Azi! Azi sunt alte vremuri. Am câteva exemple din care citez două.

Am primit o soluţie bună pentru problema 3703 dela un corespondent harnic care n'a cercetat decât cazul rădăcinilor exacte. I-am trimis problema înapoi prin poştă scriind *«soluţia e foarte bună, dar complectaţi-o şi pentru cazul când rădăcina pătrată se calculează cu aproximaţie»*.

Harnicul corespondent n'a găsit cu cale să mai răspundă în vre-un fel. Nici măcar vechea soluţie parţială n'a mai înapoiat-o.

Alt caz. Am primit de la cineva o foarte bună soluţie însoţită de numeroase şi interesante observaţiuni. I-am trimis soluţia de care m'am servit la redijarea problemei, cu următoarea adnotare: *«Refaceţi o figură mai simplă şi mai clară şi desvoltaţi proprietăţile de la Observaţii sub forma unui articol»*..

Am primit răspunsul în o formă şi un stil, care se poate trece cu vederea pentru o tinereţe neexperimentată, dar cu încheerea: *«Vă rog f. mult, altă dată, să nu-mi mai trimiteţi probleme de refăcut. Dacă nu se pot publica nu le publicaţi»*.

Scurt şi cuprinzător, ca la prăvălie, *dacă nu-ţi place, nu cumpăra.*

Numai că noi, la *Gazeta Matematică* nu tratăm problemele pe această cale.

Noi obişnuim a considera corespondenţii ca făcând parte din cercul societăţii şi ca atare căutăm a avea contact cât mai intim şi cât mai prietenos cu ei, fie că le publicăm soluţiile, fie că-i lăudăm sau nu, fie că-i îndrumăm sau îi dojenim.

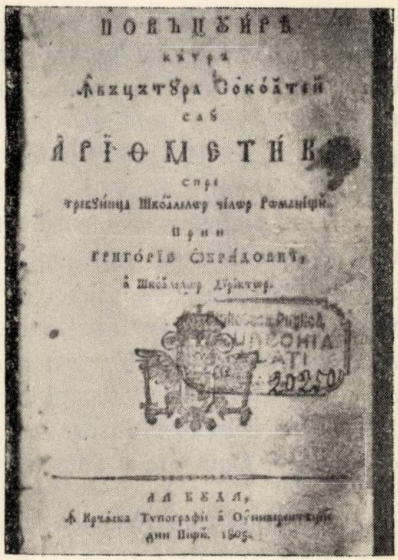
Străduinţa noastră e numai dragoste pentru ceva abstract ideal şi nepătat. Nu cerem în schimb recunoştinţă, asta ne-o luăm noi din plin prin roadele pe care le-a adus şi le aduce *Gazeta Matematică*, pe tărâmul frumos al matematicelor. Cerem însă puţină bună cuviinţă, foarte puţină. Nu-i greu de dat aşa de puţin, chiar şi în era sportului integral.

GH. B.

ARITMETICA LUI G. OBRADOVICI

Intr'un interesant articol publicat în numărul festiv al *Gazetei Matematice,* (Anul XL, No. 1), D-l profesor I. IONESCU a arătat că cele mai vechi cărţi de matematici româneşti sunt nişte aritmetici apărute în jumătatea a doua a veacului al XVI I-lea. Se cunosc până acum trei din acestea: cea dintâi e Aritmetica germano-română apărută la Viena în 1777, a doua e tipărită la Blaj în 1785 şi se datoreşte lui ŞINCAI, iar a treia e scrisă de ANFILOCHIE HOTINIUL şi tipărită la Iaşi în 1795.

Seria cărţilor de matematici din veacul al XIX-lea se deschide tot cu o aritmetică, apărută în Buda la 1805. Ea e datorită lui GRIGORIE OBRADOVICI, director al şcoalelor naţionale milităreşti din Caransebeş. Despre el scrie ŢICHINDEAL că *„mult se osteneşte cu o negrăită râvnă pentru luminarea neamului Daco-Românesc"*.



Cartea e tipărită cu litere cirilice şi are titlul următor: „POVĂŢUIREA | cătră | Învăţătura Socoatei | sau ARITHMETICĂ | spre | trebuinţa Şcoalelor celor Romaneşti prin | GRIGORIE OBRADOVICI, | a Şcoalelor Director. | La Buda,— In Crăiasca Typografie a Ouniversităţii din Peştiu. 1805".

Foaia de titlu poartă marca tipografiei din Buda. Formatul cărţii este 8⁰. Un exemplar se află la Biblioteca «V. A. URECHIĂ« din Galaţi; nu ştiu dacă mai există vreunul Exemplarul dela Galaţi are 90 de pagini, dar la sfârşit se vede că lipsesc câteva pagini. In bibliografia cărţilor tipografiei din Buda a lui BALOGHY am găsit că ea ar avea 96 de pagini.

La început aflăm cuprinsul cărţii sau *„Insămnarea a Învăţăturii Socoatei"*, după care urmează prefaţa scrisă de OBRADOVICI sau *„Inştiinţare"* cum o numeşte dânsul. In prefaţă insistă asupra

folosului *„învățăturii socoatei“* nu numai pentru neguțători și măestri, ci și *„insului plugariu, păcurariu și celui mai pregetat casnic“*. Acest scop, spune dânsul *„am ajuns : prefăcânduo încă la începutul diregătorii meale cei de Scoale, de pre limba cea nemțească și învățând pe învățătorii cei mai încredințați întrânsa ; și printrânșii să înparte tinerimei : însă neavând încă cărți tipărite despre aceaia, din scrisori cu mâna foarte greu și chitinel am lucrat“*. OBRADOVICI voia să dea *„în tipariu“* cartea, dar neavând bani a *„fost silit a lăsa lucrul acesta jos până astăzi“*. Intervine însă un mecenate. *Descoperind eu mai nainte de vreo câteva zile, gândul și dorința mea Domnului* PAVEL RUJA, *unterlaintenant înpărătesc a Reghimentului acestuia mărginatu, Valaho Illyricescu : meau dat curajuita nădejde ; ca nu mai să lucru eu, apoi Dumnealui număva lăsa în lipsă, întru toate ce sânt spre folosul Nației.* Frumos gest din partea unui *„unterlaitenant înpărătesc“ !*

Cuprinsul cărții, pe scurt, e următorul : Incepe cu *„Explicațiile (tâlcuirile) cele înainte miergătoare, sau curgătoare“*, urmează Cap. I. *„Pentru patru moduri de numărare înnumitele numere“*, Cap. II. *„Pentru numitele numere“*, Cap. III. *„Pentru Spargeri (Brüche)*, Cap. IV. *„Pentru Regula Detri“*. La sfârșit *„Adaugerea“* cuprinde *„Pentru Regula Soțialnică (Societatis)“*.

Din prefață se vede că OBRADOVICI a *„prefăcut“* adecă a tradus această carte din limba germană. Originalul e manualul școlar întrebuințat pe atunci în toată Ungaria și în Ardeal având titlul : *„Anleitung zum Rechnen, zum Gebrauche der Nationalschulen in dem Königreiche Ungarn und den damit verbundenen Staaten“* apărut în Buda la 1780, apoi în o mulțime de ediții pâla 1846. Ne putem convinge despre acest lucru asemănând textele celor două cărți. Dau numai câteva exemple :

Anleitung zum Rechnen :

1. *Was eine Einhelt ist. Jedes Ding einzeln betrachtet, ist eine Einheit ; ...*

2. *Was eine Zahl ist. Mehrere Einheiten von einerlei Art, heisst man eine Zahl ;*

Aritmetica lui OBRADOVICI :

1. *Ce iastă unișoara ? Tot lucrul privindusă de chilin iastă unișoară ;...*

2. *Ce iastă numărul ? Mai multe unișoare de un neam în preună să numește număr ;...*

Addiren heisst Zahlen, oder auch blosse Einheiten vor einerlei Art zusammengezählt worden, so hat man addirt.

Wie die Brüche entstehen?

Wenn—man ein Ganzes in gleiche Theile theilet und eine gewisse Anzahl solcher Theile bestimmt, so nennet solche Theile Brüche.

A aduna iastă numere sau simple unişoare de un neam la o laltă aduce.

Ce sânt Spargerile?

Când un întreg număr în asemenea părţi să desparte, şi să hotăreaşte ştiut număr de acele părţi; aceaia să numeşte spargere.

E locul aici să observăm că Aritmetica anonimă dela 1806, tipărită în aceeaşi tipografie din Buda e tradusă după acelaşi original german. Dar dacă originalul e identic nu se poate spune acelaşi lucru despre traducători. Stilul şi terminologia Aritmeticii lui OBRADOVICI e atât de diferită de cea a Aritmeticii dela 1806, încât la niciun caz nu el poate fi traducătorul acesteia din urmă.

Din fraza lui OBRADOVICI *„însă neavând încă cărţi tipărite“* de matematici se pare că el nu avea cunoştinţă de aritmeticile româneşti mai vechi. Cu toate acestea e curios că terminologia lui e aproape identică cu aceea a Aritmeticii dela 1777. Găsim şi la el: *unişoară, zăcişoară, nulla, speţies, poaste, nenumit număr, numit număr, addiţie* sau *adunare, summa, suptracţie* sau *scoatere, minuendus, subtrahendus, restu* sau *deschilinire, multiplicaţie* sau *înmulţire, factor, multiplicandus, multiplicator, product, divizie, dividendus, divizor, cvoţient, probă, rezoluţie* sau *dezlegare, număr dezlegătoriu, reducţie, regula detri dreaptă* şi cea *întoarsă*, întocmai ca în Aritmetica dela 1777 şi diferită de cea a lui ŞINCAI.

Influenţa originalului german asupra traducerii lui OBRADOVICI e jenantă îndeosebi acolo unde el avea la dispoziţie termini româneşti. Astfel, foloseşte adesea a *addirui* în loc de a aduna, *a subtrahirui* în loc de a scoate. Mai întâlnim *a înmulţirui, a dividirui, a rezolvirui, a reducţirui,* cari, aproape toate, se află şi în Aritmetica dela 1777. A înmulţi cu un număr arbitrar se chiamă a înmulţi cu un *număr plăcut.*

Terminul *„tabla Ţibeti,* sau a *„Ţibetului“*, întrodus de ŞINCAI nu intervine; tabla înmulţirii se numeşte *„tăbliţa multiplicaţiei“* sau *„odată unul“ (einmaleins).* In Aritmetica dela 1777 avem expresia asemănătoare *„ounulu odată face ounulu“.*

La *răspunderea numărului* aflăm că numerii de şase sau mai multe ţifre *„în clase a se despărţii să cade“ ;* astfel de ex. a şaptea *„să însemnează cu* **comma (opritoarea)“,** iar a 13-a *ţifră „cu doao opritori, sau comme, care* **bilioanele** *sau* **zeace sute de mii de milioane** *arată“.*

Mai interesante sunt acele capitole cari in aritmeticele româneşti mai vechi nu se află, cum e capitolul despre *spargeri.* Traducerea nemţescului *„Brüche“* cu spargeri în loc de fracţii i s'a părut nepotrivită chiar şi traducătorului, de aceea pune în paranteze şi terminul original. Aici se vorbeşte mai întâi de *numitoriu* şi *numărătoriu. Scrierea spargerilor* se face aşa că sub *numărătoriu tragem lenie,* iar sub ea se scrie *numitoriul.* In ce priveşte *respunderea spargerii* aflăm că: „a. *Sânt unele spargeri* **adevărate,** *la care e numărătoriul mai mic decât numitoriul.* S. P.—b. *Altele* **ne adevărate** *la acestea e mai mare numărătoriul decât numitoriul — sau amândoi asemenea“.* — Mai jos însă observă: *„De iastă numărătoriul asemenea de mare cu numitoriul, aşa iastă spargerea aceea o întreagă.* S: P:——“. Se mai deosebesc **„spargeri curate** *care înaintea sa* **curat (!)** *nu au“* şi **„spargeri amestecate** *aceştia au înaintea sa întreg“.* Se mai vorbeşte de *prefacerea* sau *schimbarea, scurtarea, dezlegarea* sau *rezoluţia* şi despre *reducţia spargerii.* A aduce *spargerile supt asemenea numitoriu* sau *supt un feliu de numitoriu* se numeşte *numitoriul cel de comun acord a afla.*

„Adaogerea“ dela sfârşitul cărţii se ocupă cu *Regula cea de Soţie (Societatis).* Ea poate fi *simplă* sau *alcătuită.* Se arată care e *păşirea* şi *temeiul păşirii* în ambele cazuri. Mai relev că deşi mai înainte se vorbeşte de *despărţire* sau *divizie,* în această ultimă parte dăm de *împărţirea* câştigului sau a pagubei, care se *împărtăşează* între *ortaci.* Oscilaţia între doi sau trei termini şi nehotărârea în alegerea definitivă a unuia e caracteristică pentru acea epocă în care tocmai se încerca crearea unei terminologii matematice româneşti.

Ca termini noui introduşi de OBRADOVICI relev: *numerile ceale geometriceşti proporţionalnice, mădulariu (termin),* precum şi *capital, camătă, interes* sau *protentă.* Aceasta din urmă este *„camăta de 100 la an“.*

Datorită râvnei lui OBRADOVICI şi jertfei băneşti a ofiţerului de graniceri RUJA, această Aritmetică a fost destinată îndeosebi şcoalelor din Banat. Nu ştiu dacă ea s'a răspândit şi în Ardeal, unde Aritmetica lui ŞINCAI desigur s'a epuizat. Ea, nu a ajuns la o nouă ediţie, poate şi din cauza că în anul următor, în aceeaşi tipografie din Buda, a apărut o altă Aritmetică, anonimă, dar având caracter oficial, care cu multele ei ediţii a ajuns unica aritmetică românească folosită în provinciile de dincolo de Carpaţi aproape în toată jumătatea întâi a veacului trecut.

VICTOR MARIAN.

NOŢIUNI DE GEOMETRIE CINEMATICĂ

(Urmare dela pagina 297)

18. *Reprezentarea simbolică a figurilor plane.*

I. *Cazul unei figuri plane rigide.*

Teoremă. — *O figură plană rigidă poate fi reprezentată în mod simbolic printr'un segment de dreaptă de lungime invariabilă şi reciproc orice segment de dreaptă de lungime invariabilă poate reprezenta o figură plană rigidă.*

Intr'adevăr, o figură plană rigidă este definită prin condiţia de formă

$$(2) \qquad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = r^2 = \text{const.},$$

(x_1, y_1) şi (x_2, y_2) fiind coordonatele a două puncte oarecari M_1 şi M_2 ale figurii.

Pentru a stabili directa teoremei trebue să arătăm că poziţia oricărui alt punct al figurii este determinată când punctele M_1 şi M_2 sunt date.

Fie pentru aceasta un punct arbitrar al figurii, M.

Coordonatele lui, x şi y, verifică relaţiile

$$(3) \qquad \begin{aligned} (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 &= r_1^2 = \text{const.} \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 &= r_2^2 = \text{const.}, \end{aligned}$$

cari se pot scrie condensat într'una singură

$$(3') \quad (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = r_i^2 = \text{const.} \quad (i = 1, 2),$$

observând că relaţia (2) este simetrică atât faţă de abscisele cât şi faţă de coordonatele punctelor M_1 şi M_2.

Relaţiile (3) determină coordonatele punctului M în funcţie de acelea ale punctelor M_1 şi M_2.

Coordonatele punctelor M_1 şi M_2 se pot exprima însă în funcţie de trei parametri, deoarece ele sunt legate prin relaţia de condiţie (2).

Rezultă că poziţia punctului arbitrar M şi prin urmare poziţia întregei figuri în ansamblul său va depinde de trei parametri.

Să presupunem acum că cele două puncte M_1 şi M_2 sunt date. In acest caz parametrii de cari depinde poziţia punctului arbitrar M vor avea nişte valori determinate. In consecinţă poziţia acestui punct şi prin urmare poziţia figurii întregi în ansamblul său va fi determinată.

Partea directă a teoremei este astfel demonstrată.

Reciproca încă se stabileşte foarte uşor. N'avem pentru aceasta decât să facem raţionamentul de adineaori în sens invers.

Fie într'adevăr un sistem de două puncte în plan M_1 şi M_2 definind în ansamblul lor un segment de dreaptă de lungime invariabilă.

Intre coordonatele (x_1, y_1) şi (x_2, y_2) ale acestor puncte există prin urmare relaţia de formă

$$(4) \qquad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = r^2 = \text{const.},$$

care ne spune că poziţia acestui sistem în ansamblul său depinde de trei parametri.

Fie acum un punct arbitrar M în plan, de coordonate (x, y).

Vom zice că punctul M este legat sau antrenat de mişcarea de ansamblu a sistemului nostru dacă poziţia lui în plan depinde de aceiaşi parametri de cari depinde şi poziţia acestui sistem.

Realizăm acest lucru stabilind între coordonatele punctului M şi ale punctelor M_1 şi M_2 două relaţiuni de forma

$$(5) \qquad \begin{aligned} f(x, y, x_1, y_1, x_2, y_2) &= 0 \\ g(x, y, x_1, y_1, x_2, y_2) &= 0, \end{aligned}$$

cari vor determina coordonatele punctului M deci poziţia acestui punct în funcţie de coordonatele punctelor M_1 şi M_2 adică în funcţie

de cei trei parametri de cari depinde poziția sistemului format din aceste două puncte în ansamblul său.

Să presupunem acum că relațiile (5) se reduc la

$$(6)\qquad \begin{aligned}(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 &= r_1^2 = \text{const.}\\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 &= r_2^2 = \text{const.}\end{aligned}$$

Aceste relațiuni fiind însă caracteristice punctelor unei figuri plane rigide din care fac parte și punctele M_1 și M_2, rezultă în mod necesar că, segmentul de dreaptă $\overline{M_1M_2}$, care satisface condiției de formă exprimată prin relația (4), reprezintă o figură plană rigidă.

Astfel este demonstrată și reciproca teoremei enunțate.

Definiția mișcării cu un parametru a unei figuri plane rigide.

Poziția unei figuri plane rigide în propriul său plan depinzând de trei parametri, rezultă că pentru a defini mișcarea cu un parametru a unei astfel de figuri trebue să ne fixăm pentru două oarecari dintre elementele ei de poziție niște condițiuni date, între aceste elemente putând figura evident și curbele cari aparțin figurii rigide.

II. *Cazul unei figuri plane care rămâne echivalentă cu ea însăși.*

Teoremă. — *O figură plană care rămâne echivalentă cu ea însăși poate fi reprezentată în mod simbolic printr'un triunghiu de arie constantă și reciproc.*

Intr'adevăr, fie M_1, M_2, M_3 trei puncte oarecari ale figurii. Condiția de formă care definește figura se exprimă prin relația

$$(7)\qquad S = \text{const.}$$

unde S are ca expresie

$$S = (M_1, M_2, M_3) = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

și care reprezintă aria orientată a triunghiului (M_1, M_2, M_3).

Fie acum un punct arbitrar M al figurii.

Coordonatele lui, (x, y), verifică relaţiunile

$$S_i = \text{const.} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{8}$$

unde S_i reprezintă rezultatul înlocuirii coordonatelor punctului M_i din expresia lui S prin coordonatele punctului M.

Se ştie însă că ariile S_1, S_2, S_3 nu sunt toate independente, ele fiind legate prin relaţia

$$S_1 + S_2 + S_3 = S. \tag{9}$$

Rezultă atunci că două oarecari din relaţiile (8) ne vor determina pe x şi y în funcţie de coordonatele punctelor M_1, M_2, M_3.

Coordonatele acestor din urmă puncte se pot însă exprima în funcţie de cinci parametri, ele fiind legate prin relaţia de condiţie (7).

Concluzia finală este că poziţia punctului arbitrar M, deci poziţia întregei figuri în ansamblul său depinde de aceiaşi parametri, în număr de cinci, de cari depinde şi poziţia sistemului format din cele trei puncte M_1, M_2, M_3 legate între ele prin condiţia de formă dată de relaţia (7).

Prin urmare figura noastră poate fi reprezentată foarte bine în mod simbolic printr'un triunghiu de arie constantă.

Reciproca teoremei se poate stabili şi în acest caz tot aşa de uşor ca şi în cazul precedent.

Definiţia mişcării cu un parametru a unei figuri plane care rămâne echivalentă cu ea însăşi.

O figură plană care rămâne echivalentă cu ea însăşi, bucurându-se de cinci grade de libertate din punct de vedere al poziţiei, rezultă că mişcarea cu un parametru a unei astfel de figuri se va defini impunând trei dintre elementele ei de poziţie unor condiţiuni date, acestea putând fi puncte sau curbe cari fac parte din figura plană considerată.

III. *Cazul unei figuri plane care rămâne asemenea cu ea însăşi.*

Se poate demonstra pe aceeaşi cale că, orice figură plană care rămâne asemenea cu ea însăşi poate fi reprezentată în mod simbolic printr'un triunghiu care rămâne asemenea cu el însuşi şi reciproc.

Cât priveşte mişcarea cu un parametru a unei astfel de figuri, aceasta se va defini prin trei relaţiuni de poziţie, deoarece poziţia ei în plan depinde de patru parametri.

IV. *Cazul general al unei figuri plane propriu zise oarecare.*

In cazul general al unei figuri plane oarecare definită prin condiţiuni de formă date se poate arăta, bazaţi pe consideraţiuni de aceeaşi natură cu cele făcute în cazurile particulare tratate, că o astfel de figură este susceptibilă de reprezentări simbolice prin sisteme discrete de puncte, ea bucurându-se de o libertate de poziţie de ordin finit ceeace necesită un număr finit de relaţiuni de condiţie pentru definiţia mişcării cu un parametru a figurilor de acest fel.

19. *Legătura dintre cele trei cazuri clasice.* Am arătat cum se pot reprezenta în mod simbolic cele trei figuri plane clasice în modul cel mai simplu.

Trebue să remarcăm însă că ele sunt susceptibile şi de alte reprezentări.

In această ordine de idei ne propunem să vedem dacă nu putem găsi o reprezentare comună pentru cele trei cazuri şi care să difere dela unul la altul numai prin nişte particularităţi de importanţă secundară şi care este cea mai simplă reprezentare de acest fel, dacă există?

Vom proceda pentru aceasta în felul următor:

Observând că atât figura plană care rămâne echivalentă cu ea însăşi cât şi cea care rămâne asemenea cu ea însăşi se reprezintă prin nişte triunghiuri cari diferă numai prin condiţiile de formă la cari sunt supuse, aceste reprezentări fiind şi cele mai simple, ne punem direct problema dacă o figură plană rigidă nu poate fi reprezentată cumva şi ea printr'un triunghiu?

Or, lucrul acesta este posibil deoarece noi am remarcat, (punct, 15, aliniat 3), că mişcarea cu un parametru a unui triunghiu de mărime invariabilă poate fi definită prin aceea a unui segment de dreaptă de lungime invariabilă, care poate fi oricare dintre laturile sale.

Proprietatea se poate demonstra însă în mod riguros utilizând o metodă pe care am mai utilizat-o.

Vrem să arătăm că o figură plană rigidă poate fi reprezentată în mod simbolic printr'un triunghiu de mărime invariabilă.

Fie pentru aceasta trei puncte, M_1, M_2, M_3 ale figurii. Coordonatele lor verifică relaţiile:

$$(10)\quad r_{12} = \text{const.}\ ,\ r_{23} = \text{const.}\ ,\ r_{31} = \text{const.}\ ,\ (r_{ik} = \overline{M_iM_k}).$$

Coordonatele unui punct arbitrar, M, al figurii vor verifica relaţiile:

$$(11)\qquad r_1 = \text{const.}\ ,\ r_2 = \text{const.}\ ,\ r_3 = \text{const.},$$

unde $r_i = \overline{MM_i}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Două dintre aceste relaţii determină coordonatele (x, y) ale punctului M în funcţie de cei trei parametri de cari depinde şi poziţia triunghiului.

Reciproca se stabileşte făcând raţionamentul în sens invers.

Avem prin urmare rezultatul că toate cele trei figuri plane clasice se pot reprezenta prin nişte triunghiuri cari nu diferă decât prin condiţiile de formă la cari sunt supuse. Lucrul acesta are importanţa lui după cum vom vedea în cele ce urmează.

III.

Ecuaţiile mişcării cu un parametru în cazul figurilor plane clasice.

20. Raportându-ne la proprietatea că oricare dintre figurile plane clasice poate fi reprezentată printr'un anumit triunghiu, ne propunem a stabili ecuaţiile mişcării cu un parametru în cazul acestor figuri.

Fie pentru aceasta o figură plană clasică şi un sistem de două axe cari să facă parte din această figură.

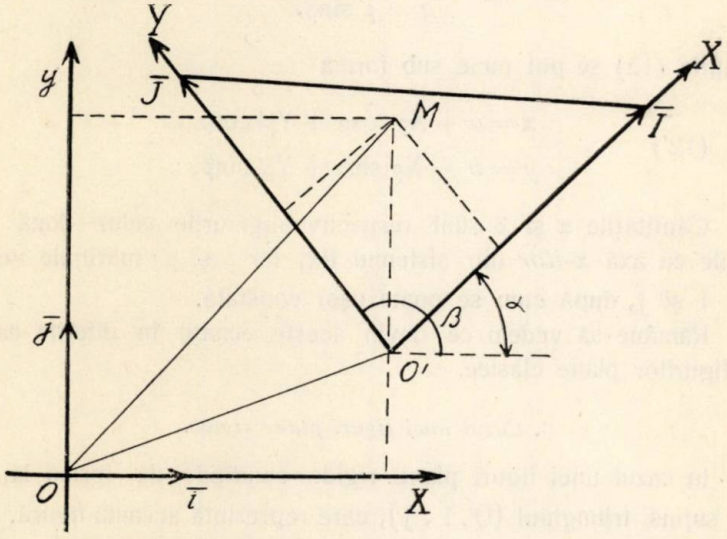
Vom reprezenta figura prin triunghiul definit de origina acestor axe şi de extremităţile a doi vectori situaţi pe aceste axe şi cari determină sensurile lor, $\bar{I}$, $\bar{J}$.

Ne mai alegem un sistem de axe fix $(0, x, y)$, sistemul mobil fiind $(0', X, Y)$. Sistemul fix îl putem alege în particular rectangular aşa încât $\bar{i}$, $\bar{j}$ fiind vectorii unitari ai acestor axe avem

$$\bar{i}^2 = 1,\ \bar{j}^2 = 1,\ \bar{i} \cdot \bar{j} = 0,$$

unde am notat prin $\bar{i}^2$ şi $\bar{j}^2$ patratele scalare ale vectorilor $\bar{i}$ şi $\bar{j}$, iar prin $\bar{i} \cdot \bar{j}$ produsul scalar al acestor vectori.

Să considerăm acum un punct arbitrar, M al figurii. El va avea două feluri de coordonate: unele faţă de sistemul fix: (x, y) şi altele faţă de sistemul mobil: (X, Y).



Să mai notăm acum prin (a, b) coordonatele originei sistemului mobil O' faţă de sistemul fix şi prin (m, n) şi (p, q) componentele vectorilor $\bar{I}$ şi $\bar{J}$ respectiv după axele fixe [1]).

Avem după figură:

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}.$$

sau

$$x\bar{i} + y\bar{j} = a\bar{i} + b\bar{j} + X\bar{I} + Y\bar{J},$$

sau încă

$$x\bar{i} + y\bar{j} = a\bar{i} + b\bar{j} + X(m\bar{i} + n\bar{j}) + Y(p\bar{i} + q\bar{j})$$

de unde deducem imediat formulele:

$$(12) \qquad \begin{aligned} x &= a + Xm + Yp \\ y &= b + Xn + Yq \end{aligned}$$

şi cari constitue ecuaţiile mişcării sub forma brută.

[1]) Cantităţile a, b; m, n şi p, q sunt toate variabile.

Făcând transformarea definită de relaţiile :

$$(13)\qquad \begin{aligned} m &= \rho\cos\alpha \\ n &= \rho\sin\alpha \\ p &= \rho'\cos\beta \\ q &= \rho'\sin\beta, \end{aligned}$$

ecuaţiile (12) se pot pune sub forma

$$(12')\qquad \begin{aligned} x &= a + X\rho\cos\alpha + Y\rho'\cos\beta \\ y &= b + X\rho\sin\alpha + Y\rho'\sin\beta. \end{aligned}$$

Cantităţile α şi β sunt respectiv unghiurile celor două axe mobile cu axa *x-ilor* din sistemul fix, iar ρ şi ρ' mărimile vectorilor $\bar{I}$ şi $\bar{J}$, după cum se poate uşor constata.

Rămâne să vedem ce devin aceste ecuaţii în diferite cazuri ale figurilor plane clasice.

1. *Cazul unei figuri plane rigide.*

In cazul unei figuri plane rigide condiţiile de formă la cari este supus triunghiul $(O', \bar{I}, \bar{J})$, care reprezintă această figură, sunt ca trei dintre elementele lui de formă să fie invariabile, de ex. ca cele trei laturi ale lui să fie constante. Trebue cu alte cuvinte să avem

$$\bar{I}^2 = \text{const.}\ ,\ \bar{J}^2 = \text{const.}\ ,\ (\bar{I} - \bar{J})^2 = \text{const.}$$

Putând alege însă constantele după voie, vom lua

$$\bar{I}^2 = 1,\ \bar{J}^2 = 1,\ (\bar{I} - \bar{J})^2 = 2$$

de unde deducem relaţiile următoare

$$\bar{I}^2 = 1,\ \bar{J}^2 = 1,\ \bar{I}\cdot\bar{J} = 0$$

a căror expresie analitică este

$$(14)\qquad \begin{aligned} m^2 + n^2 &= 1 \\ p^2 + q^2 &= 1 \\ mp + nq &= 0. \end{aligned}$$

Condiţiile de formă exprimate prin relaţiile (14) se pot însă exprima şi sub forma

$$(14') \qquad \rho^2 = 1,\ \rho'^2 = 1,\ \rho\rho' \cos(\beta - \alpha) = 0$$

cari se capătă operând asupra relaţiilor (14) transformarea (13).

Un sistem de soluţii al ecuaţiilor (14') este

$$\rho = 1,\ \rho' = 1,\ \beta = 90^0 + \alpha$$

aşa încât ecuaţiile mişcării sunt în acest caz

$$(I) \qquad \boxed{\begin{aligned} x &= a + X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y &= b + X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{aligned}}\ .$$

Aceste ecuaţiii definesc de fapt o transformare cunoscută de axe de coordonate, anume transformarea de rotire şi translaţie a axelor, cunoscută din geometria analitică.

II. *Cazul unei figuri plane care rămâne asemenea cu ea însăşi.*

In acest caz condiţiile de formă la cari este supus triunghiul $(O', \bar{I}, \bar{J})$ sunt ca două din unghiurile lui să fie constante.

Exprimăm însă acelaş lucru scriind că rapoartele a două oarecari dintre laturile lui către a treia sunt constante. Fie

$$\frac{|\bar{I}|}{|\bar{I} - \bar{J}|} \quad \text{şi} \quad \frac{|\bar{J}|}{|\bar{I} - \bar{J}|}$$

aceste rapoarte. Trebue să scriem că ele sunt constante. Vom avea:

$$|\bar{I}| = k_1 |\bar{I} - \bar{J}|$$

$$|\bar{J}| = k_2 |\bar{I} - \bar{J}|$$

sau ceeace este tot una

$$\bar{I}^2 = k_1^2 (\bar{I}^2 + \bar{J}^2 - 2\,\bar{I} \cdot \bar{J})$$

$$\bar{J}^2 = k_2^2 (\bar{I}^2 + \bar{J}^2 - 2\,\bar{I} \cdot \bar{J}).$$

Ne putem alege însă constantele k_1 şi k_2 după voie. Vom lua anume

$$k_1 = k_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

ultimele relaţiuni scriindu-se atunci

$$\bar{I}^2 = \bar{J}^2 = \tfrac{1}{2}\left(\bar{I}^2 + \bar{J}^2 - 2\,\bar{I}\cdot\bar{J}\right),$$

de unde deducem

$$\bar{I}^2 = \bar{J}^2,\ \bar{I}\cdot\bar{J} = 0$$

sau sub formă analitică

$$(15) \qquad m^2 + n^2 = p^2 + q^2\ ,\ mp + nq = 0.$$

Relaţiile (15) se mai pot pune însă şi sub forma

$$(15') \qquad \rho^2 = \rho'^2\ ,\ \rho\rho' \cos(\beta - \alpha) = 0$$

operând ca şi în cazul precedent asupra formulelor (15) transformarea (13).

Un sistem de soluţii al ecuaţiilor (15') este

$$\rho' = \rho\ ,\ \beta = 90^0 + \alpha$$

aşa încât ecuaţiile mişcării sunt în acest caz

$$(II) \qquad \boxed{\begin{aligned} x &= a + \rho\,(X\cos\alpha - Y\sin\alpha) \\ y &= b + \rho\,(X\sin\alpha + Y\cos\alpha) \end{aligned}}$$

III. *Cazul unei figuri plane care rămâne echivalentă cu ea însăşi.*

In acest caz triunghiul $(O', \bar{I}, \bar{J})$ este supus unei singure condiţiuni de formă, anume condiţiei ca aria lui să fie constantă.

Pentru ca această arie să fie constantă, trebue ca produsul vectorial al vectorilor $\bar{I}$ şi $\bar{J}$, pe care-l notez cu $\bar{I} \times \bar{J}$, să fie constant.

Mărimea acestui produs este însă radicalul din $(\bar{I} \times \bar{J})^2$ luat cu semnul pozitiv. Condiţia noastră se poate exprima însă şi sub forma

$$(\bar{I} \times \bar{J})^2 = k^2 = \text{const.}$$

sau

$$\overline{I}^2\overline{J}^2-(\overline{I}\,.\,\overline{J})^2=k^2$$

sau încă analitic sub forma

$$(16)\qquad (m^2+n^2)(p^2+q^2)-(mp+nq)^2=1$$

luând constanta $k=1$. Condiția (16) se reduce de fapt, făcând calculele, la

$$(mq-np)^2=1$$

care se mai poate scrie și sub forma

$$(16')\qquad \rho^2\rho'^2\sin^2(\beta-\alpha)=1$$

de unde deducem, luând pentru radical semnul $(+)$:

$$\rho'=\frac{1}{\rho\sin(\beta-\alpha)}$$

așa încât ecuațiile mișcării în acest caz sunt:

$$(III)\qquad \boxed{\begin{aligned} x&=a+X\rho\cos\alpha+Y\frac{\cos\beta}{\rho\sin(\beta-\alpha)}\\ y&=b+X\rho\sin\alpha+Y\frac{\sin\beta}{\rho\sin(\beta-\alpha)}\end{aligned}}$$

Avem astfel în (I), (II) și (III) ecuațiile mișcării cu un parametru respectiv în cazurile unei figuri plane rigide, al unei figuri plane care rămâne asemenea cu ea însăși și al figurii plane care rămâne echivalentă cu ea însăși.

Aceste ecuațiuni sunt fundamentale pentru desvoltarea studiului mișcării cu un parametru în cazul acestor figuri.

EUGEN VIȘA
Profesor, Blaj.

ARTICOL DESPRE TRIUNGHIUL ECHILATERAL

In Fizică şi cu deosebire în Electricitate, studiul unor anume fenomene pune în evidenţă configuraţia geometrică formată dintr'un *sistem de trei vectori concurenţi, a căror sumă este nulă,* sau ceeace este echivalent, un *triunghiu oarecare cu centrul de greutate într'un punct anumit al planului.*

Dintre aceste configuraţii, un rol fundamental îl joacă *sistemul de trei vectori concurenţi, egali şi făcând între ei unghiuri de câte 120°*, sau configuraţia echivalentă, *triunghiul echilateral.*

Această configuraţie din urmă, reprezintă faţă de prima, elementul *simetric (ideal).*

Studiul fizic la care ne referim mai sus, are adeseaori, ca obiect să reducă cercetarea unui anume fenomen *natural,* care are în general un caracter *nesimetric,* şi a cărui imagine geometrică este *triunghiul oarecare,* — la o sumă de fenomene similare, cu caracter *ideal (simetric),* având ca imagină *triunghiul echilateral.*

Rezultatele pe care le-am stabilit într'o asemenea cercetare, ne-au condus la formularea unor proprietăţi ale triunghiului echilateral, care pe lângă importanţa lor în Fizică, prezintă şi un interes pur geometric [1]).

Deoarece aceste rezultate au un caracter *elementar,* avem credinţa că ele vor interesa pe cititorii *Gazetei Matematice,* care vor găsi în ele şi un exemplu care ilustrează faptul că nu numai Matematica este un auxiliar al Fizicei, dar că şi anume probleme ale acesteia pot da naştere la cercetări cu caracter pur matematic.

I.

Preliminarii.

§ 1. In cele ce urmează vom întrebuinţa, pentru demonstrarea diferitelor proprietăţi, *calculul cu cantităţi complexe.*

In raport cu două axe dreptunghiulare Ox, Oy, — un punct oarecare $M(x, y)$ din plan este reprezentat prin cantitatea complexă $z = x + iy$, numită şi *afixul* punctului considerat.

1) A se vedea spre exemplu, legătura dintre aceste proprietăţi şi o *teoremă* a D-lui D. POMPEIU (pag. 12 şi pag. 18).

Acelaş afix, reprezintă şi vectorul $\overline{OM}$, care uneşte origina O cu punctul M.

Se scrie : $M(z)$ (sau $\overline{OM}(z)$) şi se citeşte: punctul M (sau vectorul $\overline{OM}$), de afix z.

Să însemnăm cu $r = OM$, *modulul* lui z şi cu $\varphi = \sphericalangle(Ox, OM)$ *argumentul semidreptei* $\overline{OM}$; vom scrie :

$$(1) \qquad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\,\underline{|\varphi}. \qquad (i = \sqrt{-1})$$

Dacă modulul r este egal cu unitatea, cantitatea complexă : $z = \underline{|\varphi}$ se numeşte şi *versor de unghiul* φ.

Să notăm:

$$(2) \qquad v = \underline{\left|\frac{2\pi}{3}\right.} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\,.$$

Acest versor, este (ca orice versor de altfel) un *operator geometric,* adică: dacă înmulţim afixul z prin v, — cantitatea rezultată vz, reprezintă vectorul care se obţine din vectorul $\overline{OM}$, prin rotirea acestuia, în sensul *pozitiv,* de unghiul $\frac{2\pi}{3}$.

Cantitatea $\frac{1}{v}z$ reprezintă vectorul obţinut prin rotirea, în sensul *negativ,* a vectorului $\overline{OM}$, de unghiul $\frac{2\pi}{3}$.

Se stabileşte lesne că, $-vz$ şi $-\frac{1}{v}z$, reprezintă vectorii ce se deduc din $\overline{OM}$, prin rotirea acestuia, — respectiv în sens *negativ* sau *pozitiv,* de unghiul $\frac{\pi}{3}$; într'adevăr:

$$(3) \qquad -v = \underline{\left|-\frac{\pi}{3}\right.} \quad \text{şi} \quad -\frac{1}{v} = \underline{\left|\frac{\pi}{3}\right.}\,.$$

In cele ce urmează, sunt utile şi relaţiunile:

$$(4) \qquad 1 + v + v^2 = 0\,, \quad v^3 = 1.$$

§ 2. **Condiţiunea ca afixele z_1, z_2, z_3 să reprezinte vârfurile unui triunghiu cu centrul de greutate în origina O.**

Fie un triunghiu *oarecare* MNP, ale cărui vârfuri au respectiv afixele z_1, z_2, z_3; afixul mijlocului M' al laturii NP, spre exemplu, este:

$$z_{M'} = \frac{z_2 + z_3}{2},$$

iar afixul punctului G, $\left(\frac{\overline{GA}}{\overline{GM'}} = 2\right)$, adică a centrului de greutate al ariei triunghiului MNP, — are expresiunea:

$$(5) \qquad z_G = \frac{z_1 + 2z_{M'}}{3} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Rezultă de aci:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 3z_G,$$

iar dacă $z_G = 0$, deci G coincide cu O:

$$(6) \qquad \boxed{z_1 + z_2 + z_3 = 0}$$

şi *reciproc:* dacă între z_1, z_2, z_3 există relaţia (6), — centrul de greutate G al triunghiului MNP este în O.

§ 3. **Condiţiunea ca afixele z_1, z_2, z_3 să reprezinte vârfurile unui triunghiu echilateral.**

Fie două puncte M şi N, date arbitrar în plan, prin afixele respective z_1 şi z_2; pe segmentul MN se pot construi două triunghiuri echilaterale: MNP şi MNP'.

Convenim să privim ca *pozitiv,* un triunghiu ale cărui vârfuri se succed în sensul pozitiv din Trigonometrie şi ca *negativ* în caz contrar; în fig. 1, triunghiul MNP este pozitiv, iar triunghiul MNP' este negativ.

Această convenţiune permite să spunem că pe un segment dat MN se poate construi un *singur* triunghiu echilateral, de un anumit semn.

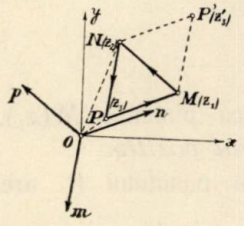


Fig. 1.

Fiind date afixele z_1 şi z_2 ale vârfurilor M şi N, ne propunem să determinăm afixul z_3 al vârfului P, — triunghiul MNP fiind echilateral şi pozitiv.

Să ducem prin origina O, vectorii $\overline{Om}$, $\overline{On}$, $\overline{Op}$, equipolenţi respectiv cu vectorii $\overline{NP}$, $\overline{PM}$, $\overline{MN}$.

Afixul vectorului $\overline{Om}$ este:

$$z_P - z_N = z_3 - z_2 ,$$

iar afixul vectorului $\overline{Op}$ este:

$$z_N - z_M = z_2 - z_1 .$$

Dacă triunghiul MNP este echilateral şi pozitiv — cum s'a presupus — putem scrie:

$$z_3 - z_2 = v \,.\, (z_2 - z_1) \tag{7}$$

şi *reciproc,* dacă această din urmă relaţie este îndeplinită, rezultă: $\sphericalangle(\overline{Op}\,,\,\overline{Om}) = \frac{2\pi}{3}$ şi $Op = Om$; deci $MN = NP$ şi $\sphericalangle MNP = 60^0$, deci triunghiul MNP este echilateral şi pozitiv.

Din (7) obţinem:

$$z_3 = z_2 + v(z_2 - z_1)$$

sau

$$z_3 = -vz_1 + (1+v)z_2$$

şi ţinând seama de relaţiile (4)

$$z_3 = -vz_1 - v^2 z_2 \tag{5}$$

sau

$$\boxed{z_3 = -vz_1 - \frac{1}{v} z_2} \tag{5}_1$$

care dă afixul căutat z_3, în funcţiune de afixele date z_1 şi z_2.

Relația (5) se mai poate scrie:

$$v^2 z_1 + z_2 + v z_3 = 0$$

sau

$$\boxed{z_1 + v z_2 + v^2 z_3 = 0} \tag{8}$$

care este condițiunea *necesară și suficientă* ca punctele $M(z_1)$, $N(z_2)$, $P(z_3)$ să formeze un triunghiu *echilateral pozitiv*.

In mod analog se găsește că afixul z'_3 al punctului P' are expresiunea:

$$\boxed{z'_3 = -\frac{1}{v} z_1 - v z_2} \tag{9}$$

din care se obține relația:

$$\boxed{z_1 + v^2 z_2 + v z'_3 = 0} \tag{10}$$

care reprezintă condițiunea *necesară și suficientă* ca punctele $M(z_1)$, $N(z_2)$ și $P'(z'_3)$ să formeze un triunghiu *echilateral negativ*.

§ 4. **Condițiunea ca afixele z_1, z_2, z_3 să reprezinte vârfurile unui triunghiu echilateral pozitiv și care să aibă centrul de greutate în origina** O.

Cu notațiile de mai sus, și ținând seama de condițiunile (6) și (8), găsim că între z_1, z_2, z_3 trebue să existe relațiunile:

$$z_1 + v z_2 + v^2 z_3 = 0$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

sistem care conduce la soluția:

$$\frac{z_1}{\begin{vmatrix} v & v^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{z_2}{\begin{vmatrix} v^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{z_3}{\begin{vmatrix} 1 & v \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

sau

$$\frac{z_1}{1} = \frac{z_2}{v} = \frac{z_3}{v^2}$$

deci:

$$(11) \qquad \boxed{z_2 = vz_1} \text{ şi } \boxed{z_3 = v^2 z_1} \quad \left(\text{sau } z_3 = \frac{1}{v} z_1\right)$$

relaţiuni care dau afixele z_2 şi z_3 în funcţiune de afixul z_1 *dat arbitrar,* astfel ca triunghiul MNP să fie *echilateral, pozitiv* şi *cu centrul de greutate în* O.

Observare. Relaţiunile (11) se puteau obţine şi direct; astfel referindu-ne la fig. 1 este suficient să ne dăm, după voie vârful M (z_1), (sau vectorul $\overline{Om}$).

Vectorii $\overline{On}$ şi $\overline{Op}$ se deduc din $\overline{Om}$, prin rotirea acestuia, în sens pozitiv de unghiurile $\frac{2\pi}{3}$ şi $\frac{4\pi}{3}$.

In cazul când triunghiul MNP este *echilateral, negativ şi cu centrul de greutate în* O, se găseşte în mod analog:

$$(12) \qquad \boxed{z_2 = \frac{1}{v} z_1} \text{ şi } \boxed{z_3 = \frac{1}{v^2} z_1} \quad (\text{sau } z_3 = vz_1).$$

II.

Aceste preliminarii stabilite, vom demonstra următoarele proprietăţi ale triunghiului echilateral.

I. Proprietate. a) *Fie triunghiul echilateral* **pozitiv** ABC *şi* O *un punct oarecare din planul său; dacă rotim vectorul* OB *în sens* **pozitiv** *de unghiul* $\frac{2\pi}{3}$, *în* $\overline{OB_1}$ *şi vectorul* $\overline{OC}$ *în sens* **negativ,** *de acelaş unghiu în* $\overline{OC_1}$ *— triunghiul* AB_1C_1 *are centrul de greutate în* O (fig. 2).

Observând că nu se restrânge generalitatea enunţului dacă alegem origina axelor în O, este suficient să stabilim relaţia:

$$z_A + z_{B_1} + z_{C_1} = 0.$$

Intr'adevăr, ABC fiind un triunghiu echilateral pozitiv, — oarecare faţă de origina O, există relaţiunea: (Vezi 8).

$$(13) \qquad z_A + vz_B + v^2 z_C = 0.$$

Dar: $z_{B_1} = vz_B$ şi $z_{C_1} = \frac{1}{v} z_C = v^2 z_C$.

Relaţia (13) devine deci:

$$z_A + z_{B_1} + z_{C_1} = 0,$$

ceeace era de demonstrat.

b) *Fie triunghiul echilateral* **pozitiv** ABC *şi* O *un punct oarecare din planul lui; dacă rotim vectorul* OB *în sens* **negativ** *de unghiul* $\frac{2\pi}{3}$ *în* OB′ *şi vectorul* OC *în sens* **pozitiv** *de unghiul* $\frac{2\pi}{3}$ *în* OC′, *triunghiul* AB′C′ *este echilateral şi* **negativ.**

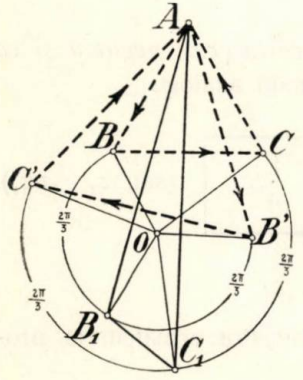


Fig. 2.

Intr'adevăr:

$$z_{B'} = \frac{1}{v} z_B \quad \text{şi} \quad z_{C'} = vz_C .$$

Prin ipoteză însă triunghiul ABC este *echilateral şi pozitiv,* deci:

$$z_A + vz_B + v^2 z_C = 0$$

care în virtutea relaţiilor de mai sus, devine:

$$z_A + v^2 z_{B'} + vz_{C'} = 0$$

adică triunghiul AB′C′ este *echilateral şi negativ.* (Vezi (10)).

Reciproca proprietăţii I. *Fie un triunghiu oarecare* **pozitiv** AB_1C_1, *de centru de greutate* O; *segmentul* OA *rămânând fix, să rotim în jurul punctului* O *segmentele* OB_1 *şi* OC_1 *de* $2\pi/3$ *şi anume:*

1) *pe* OB_1 *în sens* **negativ,** *până în* OB *şi pe* OC_1, *în sens* **pozitiv** *până în* OC, *apoi* 2) *pe* OB_1 *în sens* **pozitiv** *până în* OB′ *şi pe* OC_1 *în sens* **negativ** *până în* OC′.

Triunghiul ABC *este* **echilateral şi pozitiv,** *iar triunghiul* AB′C′ *este* **echilateral şi negativ,** (fig. 2).

1) Intr'adevăr fie z_A, z_{B_1}, z_{C_1} afixele vârfurilor triunghiului iniţial; prin ipoteză, O fiind centrul de greutate al triunghiului AB_1C_1, se poate scrie:

$$z_A + z_{B_1} + z_{C_1} = 0.$$

Prin construcția din enunț:

$$z_B = \frac{1}{v} z_{B_1} \quad \text{și} \quad z_C = v z_{C_1}$$

deci:

$$z_A + v z_B + v^2 z_C = z_A + z_{B_1} + v^3 z_{C_1} = 0 \qquad (v^3 = 1)$$

adică ABC este un triunghiu *echilateral și pozitiv* (vezi relația (8)).

2) In mod analog se găsește:

$$z_{B'} = v z_{B_1} \ , \ z_{C'} = \frac{1}{v} z_{C_1}$$

deci:

$$z_A + v^2 z_{B'} + v z_{C'} = z_A + v^3 z_{B_1} + z_{C_1} = 0$$

adică AB'C' este un triunghiu *echilateral* și *negativ* (vezi relația (10)).

Observare. Această reciprocă, se poate enunța și sub următoarele variante:

($\mathfrak{V}_1$) *Fie un triunghiu oarecare* ABC, *cu centrul de greutate,* G (fig. 3).

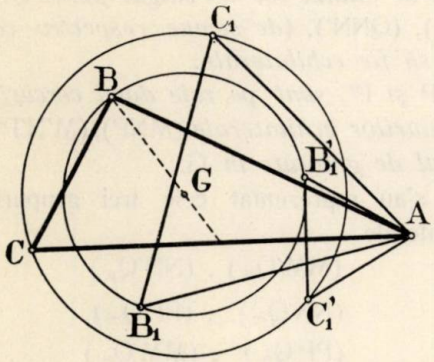


Fig. 3.

Se construesc triunghiurile echitaterale ($BB_1B'_1$), ($CC_1C'_1$) *de acelaș centru de greutate, dar de orientări diferite. Triunghiurile* AB_1C_1 *și* $AB'_1C'_1$ *sunt deasemeni echilaterale.*

O demonstrație directă, diferită de aceia de mai sus am dat-o într'o notă. *„Un théorème de géométrie". (Bulletin de mathématiques et de physique de l'Ecole Polytechnique Roi Carol II.* Tome VII. fasc. 19—20—21 pag. 8).

După cum am arătat în nota citată, proprietatea precedentă revine la următoarea:

($\mathfrak{V}_3$). *Fie două cercuri concentrice de centru* G ; (fig. 4) *oricare ar fi pe aceste cercuri, poziţiunea a două arce* MN *şi* M'N', *egale cu* $\frac{2\pi}{3}$, *dar pe semne contrare:*

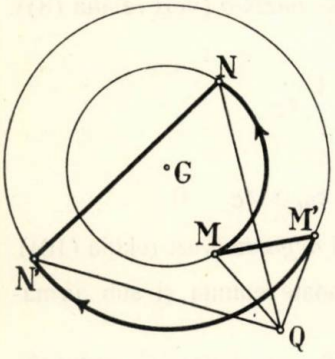


Fig. 4.

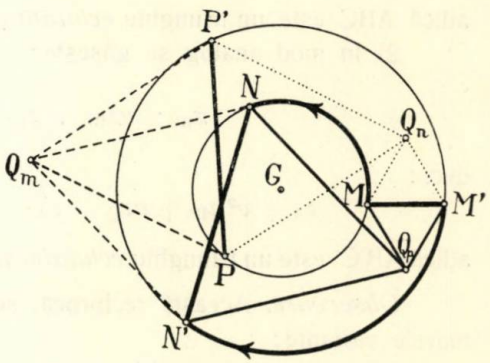


Fig. 5.

1°. *Există în planul lor un singur punct* Q. *astfel ca triunghiurile* (QMM'), (QNN'), (*de semne respectiv contrare arcelor* MN *şi* M'N') — *să fie echilaterale.*

2°. *Dacă* P *şi* P', *sunt pe cele două cercuri, celelalte vârfuri ale triunghiurilor echilaterale* (MNP), (M'N'P'), — *triunghiul* PP'Q *are centrul de greutate în* G.

In fig. 6 s'au reprezentat cele trei grupuri de câte două triunghiuri echilaterale

$$(MM'Q_p)\ ,\ (NN'Q_p)$$
$$(NN'Q_m)\ ,\ (PP'Q_m)$$
$$(PP'Q_n)\ ,\ (MM'Q_n)$$

şi care corespund respectiv, următoarelor trei cuple de arce egale şi de semne contrare:

$$(MM')\ ,\ (NN')$$
$$(NN')\ ,\ (PP')$$
$$(PP')\ ,\ (MM').$$

(Va urma). ERNEST ABASON.

REGULAMENTUL
FONDULUI BURSEI „PROFESOR ION IONESCU"

Art. 1. Soc. *Gazeta Matematică* primeşte să administreze fondul instituit de un grup de foşti elevi ai D-lui Profesor ION IONESCU, reprezentat prin D-nii: GH. EM. FILIPESCU, A. IOANOVICI, H. THEODORU şi D. STAN, membri ai Societăţii *Gazeta Matematică,* din venitul căruia să se acorde o bursă anuală elevilor Şcoalei Politecnice Regele Carol II.

Bursa va purta numele: **Bursa Profesor ION IONESCU** şi este menită în conformitate cu dorinţa donatorilor să perpetueze tradiţia muncii şi disciplinii introduse de D-l Prof. ION IONESCU în vechea Şcoală Naţională de Poduri şi Şosele şi continuitate în Şcoala Politecnică.

Art. 2. Fondul iniţial este constituit din efecte publice 3% (Renta Consolidării) în valoare nominală de 1.000.000 lei.

Art. 3. Venitul acestui fond, micşorat cu cotele prevăzute la art. 7 din Regulamentul general al Administrării Fondurilor *Gazetei Matematice,* se acordă sub formă de bursă, plătită lunar, în rate egale timp de 9 luni, unuia din elevii cei mai meritoşi ai Secţiei de Construcţii dela Şcoala Politecnică Regele Carol II, care satisface următoarele condiţii:

a) Să fie român.

b) Să fi fost cel puţin 2 ani corespondent al *Gazetei Matematice.*

c) Sa fie elev în anul III sau IV al Şcoalei.

d) Să fi promovat anii anteriori în timpul minim regulamentar.

Art. 4. Bursa este unică şi individuală.

Art. 5. Dacă într'un an nu se poate acorda bursa, ea se va acorda în anii următori elevilor care urmează în îndeplinirea condiţiilor dela art. 3. In nici un caz venitul fondului nu se capitalizează.

Art. 6. In cazul când elevul care a avut bursa în anul III, termină toate îndatoririle din programul Şcoalei înainte de începerea cursurilor anului IV, el va continua să primească bursa, în mod automat şi în anul IV.

Bursa poate fi suprimată în cursul anului, dacă elevul căruia i s'a atribuit, dă vădite dovezi că nu-şi mai îndeplineşte toate îndatoririle şcolare. In acest caz bursa poate fi acordată altui elev pentru restul anului.

Art. 7. Bursa se acordă de o comisiune, compusă din: doi membri ai *Gazetei Matematice* dintre care unul trebue să facă parte din Delegaţie, desemnaţi de prima Adunare Generală anuală şi din toţi profesorii şi conferenţiarii Şcoalei Politecnice dela Secţia Construcţiilor, activi şi onorari, cari sunt membri ai *Gazetei Matematice.*

Aceeaşi Comisiune va hotărî şi asupra cazurilor de retragere a bursei, prevăzute la art. 6.

Art. 8. Bursa se achită de Casierul *Gazetei Matematice* direct elevului, la 15 ale fiecărei luni, începând cu 15 Octomvrie şi terminând cu 15 Iunie.

Art. 9. Fondul iniţial poate fi mărit prin donaţiuni ulterioare, acceptate de Societatea *Gazeta Matematică,* conform cu prevederile ei statutare.

Veniturile produse de aceste sporiri, se vor capitaliza până ce vor permite acordarea unei noui burse de valoare egală în condiţiunile acestui Regulament.

Art. 10. In caz de dizolvare a Societăţii *Gazeta Matematică,* fondul se va trece în Administrarea Şcoalei Politecnice „Regele Carol II", din Bucureşti, cu acelaş regulament.

CIRCULARĂ ADRESATĂ DE MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE TUTUROR ŞCOLILOR SECUNDARE

Direcţiunea Invăţământului Secundar din Ministerul Educaţiei Naţionale, cu No. 22412 din 29 Ianuarie 1937, a adresat Serviciilor Locale de Invăţământ din întreaga ţară următoarea circulară:

Pe măsură ce şcolarul îşi îmbogăţeşte mintea şi sufletul prin învăţământ, el va manifesta, din ce în ce mai pronunţat, interesul pentru un anumit grup de materii. Liceul unitar nu trebue să ucidă acest interes, ci trebue să-l pună în slujba scopurilor ce le urmăreşte dând şcolarilor prilejul de muncă, care să completeze, să adâncească şi să intensifice cunoştinţele dobândite în orele de cursuri.

Munca aceasta pornită dintr'un interes sau dintr'o înclinare spre un anumit grup de materii, va face ca şcolarul să-şi petreacă timpul liber cu îndeletniciri nobile şi folositoare, şi prin aceasta îl va feri de influenţa stricătoare a diferitelor spectacole sau activităţi nepotrivite cu vârsta lui.

Să nu pierdem deci nici o ocazie de a recomanda şcolarilor noştri publicaţii care pot să contribue la o astfel de muncă şi să sprijinim cu toată căldura publicaţiile ce pot să ne fie de ajutor în stimularea elevilor noştri spre o activitate liber voită.

Profesorilor de matematici le este bine cunoscută *Gazeta Matematică,* care a contribuit în o măsură aşa de mare la formarea generaţiei de matematicieni, cari azi fac cinste ştiinţei şi neamului. Această gazetă scoate, de un an încoace şi un supliment cu probleme şi exerciţii pentru elevii şcolilor secundare. Nu e nevoe să spunem cuvinte de bună apreciere despre această culegere de exerciţii. Faptul că apare ca supliment sub egida *Gazetei Matematice* este cea mai bună recomandare.

Ne facem o datorinţă recomandând d-lor profesori de matematici răspândirea *Gazetei Matematice* şi a *Suplimentului* ei între şcolarii lor, fiind convinşi că sunt utile şi că vor contribui într'o largă măsură la întregirea şi adâncirea cunoştinţelor prescrise de programă.

In felul cum sunt redactate, ele vor ajuta pe profesor să realizeze îndemnul exprimat în instrucţiunile generale ce însoţesc programa analitică, de a înfiinţa cu elevii claselor ce conduc acele comunităţi de muncă în care elevii desfăşoară, din îndemn propriu, o activitate folositoare şcoalei şi lor înşile.

Gazeta Matematică se poate comanda dela redacţie. (Bucureşti, Calea Griviţei No. 158).

Comunicaţi şcoalelor din regiunea d-voastră.

p. MINISTRU,
(ss) **I. Bratu.**

p. DIRECTOR,
(ss) *Al. Ivaşcu.*

NOTE MATEMATICE

33. *O proprietate a numerelor 2 şi 5.* D-l V. THÉBAULT, demonstrează, în articolul publicat la pag. 283, din acest volum, că 5 este *singurul număr care se descompune în suma patratelor a două numere consecutive şi al cărui patrat este de asemeni egal cu suma patratelor a două numere consecutive,* anume:

$$5 = 1^2 + 2^2 \quad \text{şi} \quad 5^2 = 3^2 + 4^2.$$

Observ că numerele 1, 2, 3, 4 sunt consecutive în ansamblul lor. Ne propunem să căutăm *un număr* X *şi 4 numere întregi consecutive astfel ca* X *să fie egal cu suma patratelor a două din cele 4 numere, iar* X^2 *să fie egal cu suma patratelor celorlalte două.* Dacă $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ sunt 4 numere întregi consecutive şi X un întreg, problema ce ne propunem, cere examinarea următoarelor sisteme:

$$(1)\ \begin{cases} X = (n-1)^2 + n^2 \\ X^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} X = (n+2)^2 + n^2 \\ X^2 = (n+1)^2 + (n-1)^2 \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} X = (n+2)^2 + (n-1)^2 \\ X^2 = (n+1)^2 + n^2 \end{cases} \qquad (4)\ \begin{cases} X = (n+1)^2 + n^2 \\ X^2 = (n+2)^2 + (n-1)^2; \end{cases}$$

$$(5)\ \begin{cases} X = (n+1)^2 + (n-1)^2 \\ X^2 = (n+2)^2 + n^2 \end{cases} \qquad (6)\ \begin{cases} X = (n+1)^2 + (n+2)^2 \\ X^2 = (n-1)^2 + n^2. \end{cases}$$

1^0. Prima din ecuaţiile (1) dă

$$X - 1 = 2n(n-1), \tag{7}$$

iar a doua

$$(X-1)(X+1) = 2n^2 + 6n + 4. \tag{8}$$

Din (7) şi (8) se scoate

$$2n(n-1)(X+1) = 2n^2 + 6n + 4$$

care arată că n trebuie să fie un divizor al lui 2, adică 1, 2, sau 4 pe care ducându-le în (1) dau numai soluţia

$$5 = 1^2 + 2^2 \ ; \ 5^2 = 3^2 + 4^2$$

pentru $n = 2$.

2°. Scăzând ecuaţiile (3) una din alta se obţine

$$X^2 - X = -4$$

care nu dă soluţii pentru X.

3°. Ca şi la ecuaţiile (3) din (4) se scoate

$$X^2 - X = 4$$

care nu dă soluţii.

4°. Din (5) se scoate

$$X(X-1) = 2(2n+1).$$

Dar prima şi ultima din ecuaţiile (5) dau

$$X = 2(n^2+1)$$
$$X - 1 = 2n^2 + 1$$
$$X^2 - X = 2(2n+1).$$

De unde

$$X^2 - X = X(X-1) = 2(n^2+1)\ (2n^2+1) = 2(2n+1)$$

care nu admite de cât soluţia $n = 0$. Avem

$$2 = (1)^2 + (-1)^2 \text{ şi } 2^2 = 2^2 + 0^2.$$

Rezultă că numai numerele 2 şi 5 răspund problemei ce ne-am propus. Cele 4 numere consecutive sunt respectiv

$$-1,\ 0,\ 1,\ 2 \quad \text{şi} \quad 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

G-L GH. BUICLIU.

34. *Asupra problemei 4700.* Iată o soluţie mai simplă a acestei probleme:

Excluzând cazul că d ar fi *0* sau *1*, prima valoare neavând sens şi a doua dând o terminaţie de patrat perfect cu *11*, ceeace nu se poate, ne rămân numai cazurile când:

$$d = 4,\ 6$$

căci este indicatorul lui b, adică este par, şi terminaţie de patrat. Acestor valori corespunde:

$$a = 2,\ 2 \quad \text{şi} \quad c = 1,\ 1.$$

Aşa dar rezultă că vom avea soluţiile:

$$2b14 \quad \text{şi} \quad 2b16$$

dacă ţinem seamă că:

$$c < a < d < b$$

deoarece avem:

$$d = \varphi_1(b);\ a = \varphi_2(b) \text{ şi } c = \varphi_3(b).$$

Dar, dintre numerele de mai sus, numai ultimul are terminaţie de patrat perfect, prin urmare cum $b > 6$, rezultă că nu poate avea decât valoarea *7* sau *9* deoarece

$$\varphi_1(b) = 6.$$

Soluţia va fi deci *2916.*

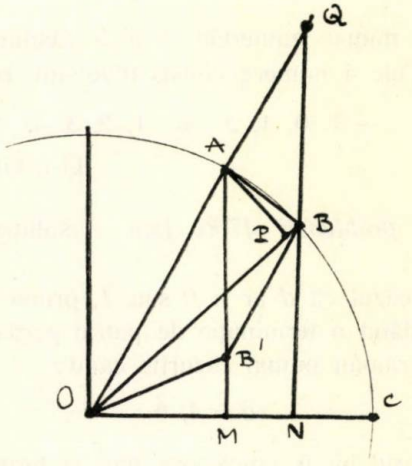
MAIOR I. LINTEŞ.

35. *Asupra sinusului diferenţei a două arce.*

In cercul trigonometric de centru O, fie C originea arcelor şi arcele $CA = a$, $CB = b$; M şi N proiecţiile punctelor A şi B pe $\overline{OC}$, P proiecţia lui A pe $\overline{OB}$, Q intersecţia dreptelor $\overline{OA}$, $\overline{BN}$.

$$\overline{BQ} = \overline{NQ} - \overline{NB} = \overline{ON}.\frac{\overline{MA}}{\overline{OM}} - \overline{NB}$$

$$= \cos b \frac{\sin a}{\cos a} - \sin b = \frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{\cos a}.$$



B′ fiind intersecţia paralelei din B la $\overline{OA}$, cu $\overline{AM}$, triunghiurile OAB şi OAB′ sunt echivalente, sau

$$\overline{OB} \times \overline{PA} = \overline{B'A} \times \overline{OM}$$

însă

$$\overline{OB} = 1, \overline{PA} = \sin(a - b), \overline{B'A} = \overline{BQ}, \overline{OM} = \cos a$$

deci

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

Acestei formule i s'au dat numeroase demonstraţii ; pe aceasta n'am întâlnit-o nicăeri.

ILIE A. IOAN
Cl. VI-a Lic. mil. „N. Filipescu".

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Vol. CXXIII. Fascicola I. Ianuarie 1937. Buenos Aires. Fundamentele matematice ale muzicei, de A. E. SAGASTUME BERRA. Generalizarea unei formule a lui SCHWAZ, de J. C. VIGNAUX. Note asupra circulaţiei atmosferice pe teritoriul argentinian şi asupra radiaţiei solare, de E. L. DÍAZ. Funcţia y de primă aproximaţie, definiţia analitică a suprafeţelor de frecvenţă experimentală de F. L. GASPAR. KARL PEARSON. (necrolog) de F. L. G.

Boletin Matematico. Anul IX. Nr. 9. Noemvrie 1936. Buenos Aires. Asupra numerelor prime, de R. NOGUERA. Ecuaţii simultane, de A. MOESSNER.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XLII. Nr. 10. Octomvrie 1936. Menasha, Wis. Instrumentul analizei de VANNEVAR BUSH. Probleme asupra valoarii medie în statistică, de A. T. CRAIG. Asupra conservării unghiurilor şi a punctelor limită la suprafeţele conforme de S. E. WARSCHAWSKI. Asupra unei note din numărul precedent, de FRANCIS REGAN. Asupra principiului lui HAMILTON şi CARTAN, de J. W. CAMPBELL. Notă asupra formei canonice a ecuaţiilor parametrice, aparţinând spaţiului curb de C. R. WYLIE. O generalizare a algoritmului invers, de D. H. LEHMER.

Idem. Vol. XLII. Nr. 11. Noemvrie 1936. Menasha, Wis. Congresul internaţional de la Oslo, de MARSTON MORSE. Bibliografie.

Contribucione al Estudio de las Cientias Fizicas y Matemáticas. (Seria matematică). Nr. 107. Vol I. Fasc. III. Septemvrie 1936. La Plata. Asupra unei generalizări a convergenţei lui LEJA pentru seriile duble, de DURAÑONA Y VEDIA. Serie de polionoame de o variabilă complexă hiperbolică, de A. DURAÑONA Y VEDIA şi J. C. VIGNAUX. Asupra convergenţei seriilor duble a lui DIRICHLET, de C. A. TREJO. Teoria funcţiilor poligene de una şi de mai multe variabile complexe duale, de J. C. VIGNAUX.

Journal de Mathématiques Elementaires, publié par H. Vuibert. LXI. Nr. 9. 1 Februarie 1937. Paris.

Idem. Anul LXI. Nr. 10. 15 Februarie 1937. Paris.

Numerus. Vol. II. Caietul 20. Ianuarie 1937. Bucureşti. Portrete matematice: TRAIAN LALESCU. Géométrie du triangle, par T. LALESCO.

Pitagora. Anul II. Nr. 4. Ianuarie 1937. Craiova. Formule trigonometrice, de C. GEORGESCU.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVI. Nr. 12. Februarie 1937. Timişoara. Asupra unei chestiuni de aritmetică, de V. THÉBAULT. O aplicaţie geometrică a momentelor de inerţie, de M. GHERMĂNESCU.

Sphinx. Revue mensuelle des questions récréatives. Anul VII. Nr. 3. Martie 1937. Bruxelles.

CAIUS IACOB. *Memoriu de titluri şi lucrări.* Ianuarie 1937. Cluj.

CRISTEA MATEESCO. *Calcul des plaques élastiques rectangulaires simplement appuyées sur le pourtour et soumises à la flexion par un moment le long d'un coté.* (Extras din *Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique Roi Carol II).* Bucureşti 1937.

CAIUS JACOB. *Etude d'un jet gazeux.* (Extras din *Bulletin scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara,* Roumanie). Tome 7. Fasc. 1 — 2. Timişoara 1937.

CAIUS JACOB. *Asupra probabilităţii pe care o are un elev de a fi admis la un examen.* (Extras din *Revista matematică din Timişoara).* Timişoara 1937.

CERERI

264. D-l ŞTEFAN CIOBANU a găsit un catalog vechiu din 1845, rămas dela boerul Basarabean CONSTANTIN TUFĂSCU, în care este menţionată **„Aritmetica Moldovenească".**

Se mai găseşte vreun exemplar din acea aritmetică? In caz afirmativ am dori o dare de seamă asupra ei.

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

A. WITTING. Einführung in die Infinitesimalrechnung. Lipsca 1912.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

MARTIN LINDOW. Die Anwendung der Differentialrechnung auf das technische Zeichnen. Jena 1910.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ORĂŞANU. Curs de Topologie.
Donat de D-l C. ORĂŞANU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2556. *Să se găsească curba* (C), *așa că dacă* (C_1) *e desfășurata ei,* (C_2) *desfășurata lui* (C_1), (C_3) *a lui* (C_2) *etc., razele de curbură ale curbei* (C_n) *să fie egale cu ale curbei* (C) *în punctele corespunzătoare.*

C. MITITELU.

Soluția autorului.

Fie ρ raza de curbură a curbei (C); ρ_n a curbei (C_n); $d\sigma$ diferențiala de arc a lui (C_1) și θ unghiul tangentei la (C) cu axa Ox. Se știe că

$$d\sigma = d\rho$$

Dar

$$\rho_1 = \frac{d\sigma}{d\theta_1} = \frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}$$

de oare ce θ_1 de pe (C_1) diferă cu $\frac{\pi}{2}$ de θ. Se deduce

$$\rho_n = \frac{d^n \rho}{d\theta^n} .$$

Condiția din enunț

$$\rho_n = \rho$$

dă o ecuație diferențială de forma

$$\frac{d^n \rho}{d\theta^n} - \rho = 0$$

care dă

$$\rho = 2 \sum_1^n C_i \, e^{r_i \theta}$$

unde r_i sunt rădăcinile a $n-a$ ale unității, iar C_i sunt constante.

Dacă p este distanța dela origină la tangenta curbei (C), se știe că avem:

$$\rho = p + \frac{d^2 p}{d\theta^2}$$

$$\therefore \quad p + \frac{d^2 p}{d\theta^2} = \sum e_i \, e^{r_i \theta}$$

ecuație lineară cu membrul al II-lea, care integrată dă

$$p = A \cos\theta + B \sin\theta + \sum C_i \, e^{r_i \theta} .$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

Inlocuim aici pe p şi θ respectiv prin valorile lor $xy' - y$ şi $\operatorname{arctg} y'$ şi găsim ecuaţia

$$xy' - y = \frac{A + By'}{\sqrt{1 + y'^2}} + \Sigma C_i e^{r_i \operatorname{arctg} y'} = f(y'). \qquad (1)$$

Aceasta este ecuaţia diferenţială a curbelor cerute.

Pentru integrare se pune $y' = u$ şi se derivează (1). Găsim

$$x \frac{du}{dx} = f'_u(u) \frac{du}{dx} . \qquad (2)$$

Care dă:

1°. Soluţia singulară

$$\frac{du}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad y = C_1 x + C_2$$

linia dreaptă şi

2°. $$x = f'_u(u) = f'_y(y') = \varphi_1(u). \qquad (3)$$

Apoi

$$dy = y'dx = u\, df'_{y'}(y')$$

$$\therefore \quad y = \int u\, df'_{y'}(y') = \int \varphi_2(u) \qquad (4)$$

(3) şi (4) dau curba parametric.

Un harnic corespondent, care trimite foarte multe probleme grele, din care majoritatea necomplet studiate a trimis şi o soluţie eronată şi neriguroasă pentru această problemă.

G-L A. B.

PROBLEMA 4165. *Să se desvolte determinantul*

$$\begin{vmatrix} a_0^r & (a_0+1)^r & (a_0+2)^r & \dots & (a_0+r)^r \\ a_1^r & (a_1+1)^r & (a_1+2)^r & \dots & (a_1+r)^2 \\ a_2^2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r^r & (a_r+1)^r & \dots & \dots & (a_r+r)^r \end{vmatrix} .$$

I. B. FLORESCU.

Soluţie dată de D-l DIM. MAVRODIN.

In articolul „Câţiva determinanţi", din G. M. XL, p. 151, D-l Prof. N. CIORĂNESCU calculează valoarea determinantului

$$(a) \quad D^n_{n+1} = \| (x_i + a_0)^n (x_i + a_1)^n \ldots (x_i + a_n)^n \|$$

şi găseşte

$$(b) \quad D^n_{n+1} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} k_n V_{n+1}(a_0, a_1, \ldots a_n) V_{n+1}(x_0, x_1, \ldots x_n)$$

unde $V(u, v, \ldots)$ este determinantul VAN DER MONDE al cantităţilor $u, v, \ldots$ iar

$$k_n = \frac{(n!)^{n-1}}{[1!\ 2! \ldots (n-1)!]^2}.$$

Dacă facem $x_i = a_i$, $a_i = i$, $n = r$, regăsim determinantul propus; observând că

$$V_{r+1}(0, 1, \ldots r) = r!\ (r-1)! \ldots 1!,$$

valoarea determinantului propus va fi, după (b)

$$D^r_{r+1} = (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} \frac{(r!)^r}{1.2! \ldots (r-1)!} V_{r+1}(a_0, a_1, \ldots a_r).$$

Notă. 1°. D-l D. MAVRODIN calculează şi determinantul

$$\Delta^r_{r+1} = \| (a_i - k)^r \|,$$

găsind aceeaşi valoare.

2°. Problema propusă este anterioară articolului D-lui N. CIORĂNESCU. Până la apariţiunea acestui articol, s'au mai primit două soluţiuni, insuficiente însă.

M. G.

PROBLEMA 4488. *Se cere patratul de forma* **abc90abc.**

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de D-l G. G. CONSTANTINESCU.

Dacă N^2 este patratul căutat atunci

$$10090100 < N^2 < 99990999$$

$$\therefore \quad 3176 < N \leqslant 9999. \qquad (1)$$

Conform enunţului avem

$$N^2 = abc\,90\,abc = 11 \times 9091 \times abc + 90000$$

$$\therefore (N + 300)(N - 300) = 11 \times 9091 \times abc. \qquad (2)$$

Faţă de (1) se vede că $N + 300$ şi $N - 300$ nu pot fi simultan multipli de 9091. De asemeni nu pot fi simultan multipli de 11 căci atunci diferenţa lor, 600 ar trebui să se dividă cu 11. Rezultă că (2) nu poate conduce de cât la următoarele posibilităţi.

$$\text{I.} \begin{cases} N + 300 = 11\,p \\ N - 300 = 9091\,q \end{cases} \quad \text{şi} \quad \text{II.} \begin{cases} N + 300 = 9091\,p \\ N - 300 = 11\,q. \end{cases}$$

Cazul I. Din (1) se scoate

$$N - 300 = 9091\,q \leqslant 9619$$

$$\therefore\ q \leqslant 1 \quad \therefore\ q = 1$$

care dus în I dă

$$N = 9391$$

care este o soluţie a problemei căci

$$9391^2 = 88190881.$$

Cazul II. Analog cu cazul precedent

$$N + 300 = 9091\,p \leqslant 10299$$

$$\therefore\ p = 1 \quad \text{şi} \quad N = 8791.$$

Dar

$$8791^2 = 76581681$$

nu este soluţie a problemei.

D-l M. F. AMĂRĂŞTEANU (Lic. Fraţii Buzeşti, Craiova) a găsit soluţia exactă examinând terminaţiunile de 4 cifre de forma $Oabc$ din tabelul de terminaţiuni dat la pag. 134 Vol. XXXV G. M.

PROBLEMA 4591. *La Şcoala Politecnică din Bucureşti se făcuse propunerea de a se reduce durata de predare a unei lecţiuni dela o oră la 50 de minute. Admiţând că profesorul pierde în mediu 5 minute la începutul unei lecţiuni şi 3 minute la urmă, să se calculeze:*

1. *Cu cât trebue să-şi reducă cursul un profesor dacă iuţeala de predare rămâne aceeaşi?*

2. *Cu cât ar trebui sporită iuţeala de predare spre a se preda tot cursul în acelaşi număr de lecţiuni tot anul?*

3. *Cu cât s'ar spori numărul lecţiunilor, dacă iuţeala de predare nu se schimbă, şi nici nu se face reducere de materie predată?*

4. *Admiţându-se reducerea cursului, menţinând iuţeala de predare, cu cât ar trebui lungite cursurile anuale pentruca Şcoala să se termine în 4 ani în loc de 5?*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: CONST. SĂNDULACHE şi AL. D. STOICA.

Fie C mărimea unui curs exprimată în pagini de o carte de un anumit format, n numărul lecţiunilor anuale ale acelui curs şi v iuţeala lui de predare exprimată în pagini pe minut. Cum o lecţiune durează efectiv $60 - 5 - 3 = 52$ minute, vom avea:

$$C = 52nv. \qquad (1)$$

Dacă un alt curs de C′ pagini se predă în n' lecţiuni cu iuţeala v' în $50 - 5 - 3 = 42$ minute efective, atunci vom avea:

$$C' = 42n'v'. \qquad (2)$$

Din aceste două relaţiuni deducem:

$$C'/C = 42n'v'/52nv = (21/26).(n'/n).(v'/v). \qquad (3)$$

Cu această relaţie putem rezolva cele patru chestiuni puse.

1. Dacă nu se schimbă numărul lecţiunilor şi nici iuţeala de predare, atunci $n = n'$ şi $v = v'$ şi relaţia (3) ne dă:

$$C'/C = 21/26,$$

$$\therefore \quad (C - C')/C = 5/26 = 0{,}1923\ldots$$

Deci cursul trebuie scurtat cu $19{,}23^0/_0$, sau aproximativ cu $20^0/_0$.

2. Dacă nu se modifică nici cursul, nici numărul de lecţiuni, atunci $C = C'$, şi $n = n'$, iar (3) ne dă:

$$v'/v = 52/42 = 26/21,$$

$$\therefore \quad (v' - v)/v = 5/21 = 0{,}2381\ldots$$

Deci iuţeala de predare trebue sporită cu $23{,}81^0/_0$, sau rotund cu $24^0/_0$.

3. Dacă nu se reduce cursul şi nu se modifică nici iuţeala de predare, atunci $C = C'$ şi $v = v'$, iar (3) ne dă:

$$n/n' = 42/52 = 21/26,$$

$$\therefore \quad (n' - n)/n = 5/21 = 0{,}2381 \ldots$$

Deci numărul lecţiunilor trebue sporit cu $23{,}81\%$, sau rotund cu 24%.

4. Pentru ca o Şcoală care se termină în 5 ani să se termine în 4 ani, trebue ca durata anuală a cursurilor să se sporească în raportul $5/4 = 1{,}25$, adică cu 25% mai mult. Cursul fiind însă redus la $21/26$ din ce era, timpul în care s'ar putea face redus este $(5/4) \times (21/26) = 105/104 = 1{,}0096 \ldots$, deci un spor de $0{,}96\%$, adică ceva mai puţin de 1%. Aceasta nu reprezintă decât cel mult 2 zile pe an. Dacă dar prin reducerea orelor de predare se urmăreşte reducerea cursurilor este, mai raţional ca să se păstreze orele de predare anual şi iuţeala de predare pentru ca elevii să absolve Şcoala în 4 ani în loc de 5.

PROBLEMA 4658. *Dacă* A, B, C *sunt unghiurile unui triunghiu, avem relaţia:*

$$\frac{\cos(B-C)}{\cos A} + \frac{\cos(C-A)}{\cos B} + \frac{\cos(A-B)}{\cos C} + 2 = \frac{\cos(B-C)\cos(C-A)\cos(A-B)}{\cos A \cos B \cos C}.$$

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţia I dată de D-l DUMITRU D. MATEI («Lic. internat» Iaşi). Avem:

$$\cos(B-C) = \cos B \cos C + \sin B \sin C = 2\cos B \cos C + \cos A$$

şi la fel pentru $\cos(C-A)$, $\cos(A-B)$.

Făcând aceste înlocuiri obţinem:

$$2\sum \frac{\cos B \cos C}{\cos A}$$

$$+5=\frac{(2\cos B\cos C+\cos A)\,(2\cos C\cos A+\cos B)\,(2\cos A\cos B+\cos C)}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$=\frac{8\cos^2A\cos^2B\cos^2C+4\cos A\cos B\cos C\Sigma\cos^2A+2\Sigma\cos^2B\cos^2C+\cos A\cos B\cos C}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$\therefore\quad 2\,\Sigma\frac{\cos B\cos C}{\cos A}+5=8\cos A\cos B\cos C$$

$$+4\,\Sigma\cos^2A+2\,\Sigma\frac{\cos B\cos C}{\cos A}+1$$

sau:

$$1=2\cos A\cos B\cos C+\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C.$$

Ajungem aşa dar la o identitate cunoscută, ceeace verifică relaţia propusă.

Soluţia II dată de D-l D. O. SACTER.

Plecăm dela identitatea:

$$(1)\qquad \frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}+2=\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{xyz}$$

în care înlocuim pe x, y, z, prin laturile triunghiului ortic.

$a\cos A,\ b\cos B,\ c\cos C$. Obţinem:

$$(2)\qquad \frac{b\cos B+c\cos C}{a\cos A}+\frac{c\cos C+a\cos A}{b\cos B}$$

$$+\frac{a\cos A+b\cos B}{c\,\mathrm{sos}\,C}+2$$

$$=\frac{(b\cos B+c\cos C)\,(c\cos C+a\cos A)\,(a\cos A+b\cos B)}{a\cos A\times b\cos B\times c\cos C}.$$

Insă:

$$b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C)\ldots\ \text{etc.}$$

şi înlocuind în relaţia (2) obţinem:

$$\sum\frac{\cos(B-C)}{\cos A}+2=\frac{\cos(B-C)\cos(C-A)\cos(A-B)}{\cos A\cos B\cos C}.$$

Soluția III dată de D-l VIRGIL ECKSTEIN.

Fie ABC un triunghiu și O centrul cercului circumscris de coordonate baricentrice (sin 2A, sin 2B, sin 2C). Paralela dusă prin O la latura BC va avea ecuația:

$$\alpha + k(\alpha + \beta + \gamma) = 0$$

care trebuind să treacă prin O ne va da:

$$\sin 2A + K(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 0.$$

Scoatem de aci valoarea lui K și introducând-o în ecuația paralelei la BC obținem după efectuarea calculelor:

$$\alpha \frac{\cos(B-C)}{\cos A} - \beta - \gamma = 0.$$

Prin permutări circulare se deduc celelalte două drepte ce trec prin O și sunt paralele la CA și AB.

Scriind că ele sunt concurente găsim:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\cos(B-C)}{\cos A} & -1 & -1 \\ -1 & \dfrac{\cos(C-A)}{\cos B} & -1 \\ -1 & -1 & \dfrac{\cos(A-B)}{\cos C} \end{vmatrix} = 0$$

care desvoltat ne dă tocmai relația din enunț.

Soluții foarte bune s'au primit dela D-nii: RADU APOSTOL, VICTOR L. FLORESCU, ȘTEFAN NEGULESCU (lic. militar M-rea Dealu), AURELIAN CĂLINESCU (prof. Roșiori de Vede), MIRCEA A. NEGREA (Brăila), Sublt. MIRCEA GRUMĂZESCU (Iași), EUGEN MARCOVICI (Iași); M. F. AMĂRĂȘTEANU (Craiova), JULIAN V. IONIȚĂ (Roman), A. MIHĂILESCU, FLORIN VASILOSCHI, IOAN STREDER, COSMA A. SCABIOLA (lic. militar Iași), STELIAN LĂZĂRESCU (liceul militar N. Filipescu).

Observații. 1°. D-l MIRCEA A. NEGREA observă că dacă d_a, d_b, d_c sunt distanțele dela centrul cercului circumscris la laturi, iar δ_a, δ_b, δ_c distanțele dela centrul cercului lui EULER la laturi, atunci relația propusă se poate scrie:

$$\frac{\delta_a}{d_a} + \frac{\delta_b}{d_b} + \frac{\delta_c}{d_c} + 4 = \frac{\delta_a \cdot \delta_b \cdot \delta_c}{4\, d_a \cdot d_b \cdot d_c}.$$

2°. Dacă notăm cu A', B', C' punctele unde înălțimile AH, BH, CH taie a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC, relația din enunțul problemei se poate scrie:

$$\frac{AA'}{AH}+\frac{BB'}{BH}+\frac{CC'}{CH}+2=\frac{AA'\cdot BB'\cdot CC'}{AH\cdot BH\cdot CH}.$$

PROBLEMA 4679. *Fie* ABC *un triunghiu dreptunghic în* A *și* AA' *înălțimea lui. Bisectoarea unghiului* AA'C *taie latura* AC *în* C', *iar bisectoarea unghiului* AA'B *taie latura* AB *în* B'.

Să se arate că:

1°. *Cercurile* (A'B'B), (A'C'C) *sunt tangente în* A'.

2°. *Dreapta* B'C' *e o tangentă exterioară a acestor cercuri.*

3°. *Raportul razelor satisface relația* $R_b/R_c = c^2/b^2$.

ALEXANDRU V. NICULESCU.

I. *Soluție* dată de D-l VIRGIL ECKSTEIN:

1°. Fie O_b, O_c centrele celor două cercuri. E suficient să arătăm că O_b, O_c, A' sunt coliniare. Vom demonstra că:

$$\sphericalangle O_b A'B = \sphericalangle O_c A'C.$$

Să facem mai întâi o observație de ordin *topologic*: dacă O_b este nterior triunghiului ABC, O_c e neapărat exterior și invers, altfel coliniaritatea n'ar fi posibilă. Intr'adevăr fie $\sphericalangle B > 45^0$, rezultă:

$$\sphericalangle BB'A' = 135^0 - \hat{B} < 90^0,$$

deci O_b este interior triunghiului ABC; avem apoi:

$$\sphericalangle CC'A' = 135 - \hat{C} = 45 + B > 90^0$$

și prin urmare O_c este exterior triunghiului ABC.

Din triunghiul O_b A'B avem:

$$\sphericalangle O_b A'B = \frac{1}{2}(180^0 - \overset{\frown}{BO_b A'}) = \frac{1}{2}(180^0 - 270^0 + 2\hat{B}) = \hat{B} - 45^0;$$

din triunghiul O_c A'C rezultă:

$$\sphericalangle O_c A'C = \frac{1}{2}(180 - \overset{\frown}{CO_c A'}) = \frac{1}{2}(180 - 90 - 2\hat{C}) = 45^0 - \hat{C}.$$

Cum:

$$\hat{B} - 45^0 = 90 - \hat{C} - 45^0 = 45^0 - \hat{C}$$

avem deci:

$$\sphericalangle O_b A'B = \sphericalangle O_c A'C.$$

2°. Patrulaterul AB'C'A' fiind inscriptibil rezultă:

$$\sphericalangle A'B'C' = \hat{B} \quad \sphericalangle A'C'B' = \hat{C};$$

dar:

$$\sphericalangle O_b B'A' = \frac{1}{2}(180 - 2\hat{B}) = \hat{C}$$

$$\sphericalangle O_c C'A' = \frac{1}{2}(180 - 2C) = \hat{B}$$

şi deci:

$$O_b B' \perp B'C' \; ; \; O_c C' \perp B'C'.$$

3°. Triunghiurile isoscele $O_b B'A' \sim O_c CA'$ ne dau:

$$R_b/R_c = A'B/A'C = \frac{\overline{AB}^2}{BC} \Big/ \frac{\overline{AC}^2}{BC} = \frac{c^2}{b^2}.$$

II. *Soluţie* dată de D-l LASCU S. BAL. (student):

1°. 2°. Ducem mediana MA' a triunghiului A'B'C';

Avem următoarele egalităţi de unghiuri:

$$\sphericalangle MA'B' = \sphericalangle A'B'M = \sphericalangle A'AC = \hat{B}$$

$$\sphericalangle MA'C' = \sphericalangle A'C'M = \sphericalangle A'AB = \hat{C}.$$

Rezultă că dreptele MA', MB', MC' sunt tangente cercurilor (A'B'B) (A'C'C) şi deci aceste cercuri sunt tangente în A', admiţând pe B'C' tangentă comună exterioară.

3°. Triunghiurile $O_b B'M$, $O_c C'M$ fiind asemenea cu triunghiul ABC rezultă rapoartele:

$$\frac{R_b}{B'M} = \frac{c}{b} \; ; \; \frac{R_c}{C'M} = \frac{b}{c}$$

şi împărţind aceste rapoarte obţinem relaţia din enunţ.

III. *Soluţie şi generalizare* dată de ŞTEFĂNESCU D. NICOLAE (Lic. M-rea Dealu):

1°. Presupun că cele două cercuri se retaie într'un punct α'. Unim pe B şi C cu α. Patrulaterul $B'B\alpha A'$ este inscriptibil, deci:

$$\sphericalangle A'\alpha B = \sphericalangle AB'A' \qquad \sphericalangle A'\alpha C = \sphericalangle AC'A'$$

şi de aci:

$$\sphericalangle A'\alpha B + \sphericalangle A'\alpha C = 180^0$$

căci patrulaterul AB'A'C' este inscriptibil.

Rezultă coliniaritatea punctelor: B, α, C de unde deci $\alpha \equiv A'$. Cercurile sunt atunci tangente în A'.

E de observat că această proprietate subsistă pentru orice triunghiu ABC, *oricare ar fi punctul* A' *pe* BC, *cu singura condiţie ca patrulaterul* A'B'C'A *să fie inscriptibil.*

Restul ca la prima soluţie.

IV. *Soluţie analitică* de D-l EUGEN MARCOVICI (Iaşi).

Luăm ca axe de coordonate ipotenuza BC şi înălţimea AA'. Ecuaţiile dreptelor AB, AC, A'B', A'C' sunt:

$$(AB) \quad -\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=\frac{c}{a} \qquad (AC) \quad \frac{x}{b}+\frac{y}{c}=\frac{b}{a}$$

$$(A'B') \quad x+y=0 \qquad (A'C') \quad x-y=0.$$

Coordonatele punctelor B' şi C' vor fi:

$$B'\left[-\frac{bc^2}{a(b+c)}\,,\ \frac{bc^2}{a(b+c)}\right],\quad C'\left[\frac{b^2c}{a(b+c)}\,,\ \frac{b^2c}{a(b+c)}\right].$$

Putem scrie acum imediat ecuaţiile celor două cercuri:

$$(A'B'B) \quad x^2+y^2+\frac{c^2}{a}x-\frac{c^2(b-c)}{a(b+c)}y=0$$

$$(A'C'C) \quad x^2+y^2-\frac{b^2}{a}x+\frac{b^2(b-c)}{a(b+c)}y=0.$$

Centrele O_b, O_c şi razele acestor cercuri sunt determinate de

$$O_b\left[-\frac{c^2}{2a}\,,\ \frac{c^2(b-c)}{2a(b+c)}\right],\ O_c\left[\frac{b^2}{2a},-\frac{b^2(b-c)}{2a(b+c)}\right]$$

$$(1) \qquad R_b=\frac{c^2}{a\sqrt{2}} \qquad R_c=\frac{b^2}{a\sqrt{2}}.$$

Avem atunci:

$$(2)\ \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{c^2}{2a} & \frac{c^2(b-c)}{2a(b+c)} & 1 \\ \frac{b^2}{2a} & -\frac{b^2(b-c)}{2a(b+c)} & 1 \end{vmatrix} \equiv -\frac{b^2c^2(b-c)}{4a^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{c^2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{b^2} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Din (1) şi (2) rezultă demonstraţia propoziţiilor 1° şi 3°.

Calculând acum distanţele punctelor O_b, O_c la dreapta B'C de ecuaţie:

$$x(b^2-c^2) - y(b+c)^2 + 2\frac{b^2c^2}{a^2} = 0$$

se găseşte:

$$B'O_b = \frac{c^2}{a\sqrt{2}},\quad C'O_c = \frac{b^2}{a\sqrt{2}};$$

Conchidem deci că B'C' e tangentă comună celor două cercuri.

V. Au mai rezolvat problema D-ra ALEX. A. VASILESCU (cl. 7-a Lic. Alba-Iulia) şi D-nii: PROF. A. DOBRESCU, ARŞAVSCHI ALEXE şi APOSTOL RADU, FLORESCU VICTOR, RĂDULESCU OCTAVIAN, ŢIŢEICA ILIE ION (elevi Lic. M-rea Dealu), dând soluţii analaoge sau puţin diferite de prima.

Observări. 1°. D-l POSTELNICESCU C. M. dă o soluţie interesantă, demonstrând întâiu punctul 2°) al problemei, iar pentru 1°) aplică o propoziţie enunţată de D-l GENERAL GH. BUICLIU în „R. M. T.", Vol. XIV — nota 20. —: *„Cercurile cari trec prin* A *şi sunt tangente în* B *şi* C *ipotenuzei* BC *a unui triunghiu dreptunghic, sunt tangente în* A".

2°. D-l ŞTEFĂNESCU D. NICULAE observă că punctul 2°) al problemei este adevărat şi în cazul, când prin A' se duc două *drepte perpendiculare oarecari.*

3°. Se poate arăta că avem:

$$\frac{1}{AB'} = \frac{1}{AC'} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

4°. D-l POPOVICIU S. DAVID (Şc. Politechnică) a interpretat şi soluţionat greşit problema.

ALEX. V. N.

PROBLEMA 4694. *Dacă* A, B, C *sunt unghiurile unui triunghiu avem relaţia:*

$$\sin\frac{\pi}{5}\sum\sin\frac{A}{10}+\cos\frac{\pi}{5}\sum\cos\frac{A}{10}+\cos\frac{\pi}{10}$$

$$=-4\sin\frac{3\pi}{20}\sin\frac{A}{20}\sin\frac{B}{20}\sin\frac{C}{20}+4\cos\frac{3\pi}{20}\cos\frac{A}{20}\cos\frac{B}{20}\cos\frac{C}{20}.$$

LT. C. IONESCU-ŢIU.

Soluţie dată de D-nii: AURELIAN CĂLINESCU (profesor, Roşiorii de Vede) şi MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU (Student, Bucureşti).

Avem:

$$\sin\frac{\pi}{5}\,\Sigma\sin\frac{A}{10}+\cos\frac{\pi}{5}\,\Sigma\cos\frac{A}{10}=\Sigma\cos\left(\frac{\pi}{5}-\frac{A}{10}\right),$$

apoi:

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}-\frac{A}{10}\right)+\cos\frac{\pi}{5}=2\cos\left(\frac{3\pi}{20}-\frac{A}{20}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}-\frac{A}{20}\right)=2\cos\left(\frac{3\pi}{20}-\frac{A}{20}\right)\cos\frac{B+C}{20}$$

şi

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}-\frac{B}{20}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{5}-\frac{C}{20}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{5}-\frac{B+C}{20}\right)\cos\frac{B-C}{20}$$

$$=2\cos\left(\frac{3\pi}{20}+\frac{A}{20}\right)\cos\frac{B-C}{20}.$$

Deci prima parte a egalităţii se poate scrie:

$$2\cos\left(\frac{3\pi}{20}-\frac{A}{20}\right)\cos\frac{B+C}{20}+2\cos\left(\frac{3\pi}{20}+\frac{A}{20}\right)\cos\frac{B-C}{20}=2\cos\frac{3\pi}{20}\cos\frac{A}{20}\cos\frac{B+C}{20}$$

$$+2\sin\frac{3\pi}{20}\sin\frac{A}{20}\cos\frac{B+C}{20}+2\cos\frac{3\pi}{20}\cos\frac{A}{20}\cos\frac{B-C}{20}-2\sin\frac{3\pi}{20}\sin\frac{A}{20}\cos\frac{B-C}{20}$$

$$=2\cos\frac{3\pi}{20}\cos\frac{A}{20}\left(\cos\frac{B+C}{20}+\cos\frac{B-C}{20}\right)+2\sin\frac{3\pi}{20}\sin\frac{A}{20}\left(\cos\frac{B+C}{20}-\cos\frac{B-C}{20}\right)$$

$$=4\cos\frac{3\pi}{20}\cos\frac{A}{20}\cos\frac{B}{20}\cos\frac{C}{20}-4\sin\frac{3\pi}{20}\sin\frac{A}{20}\sin\frac{B}{20}\sin\frac{C}{20}.$$

Notă. Dacă folosim relaţia:

$$\sin A_1+\sin B_1+\sin C_1=4\cos\frac{A_1}{2}\cos\frac{B_1}{2}\cos\frac{C_1}{2}$$

şi facem transformarea:

$$A_1=\frac{3\pi}{10}+\frac{A}{10},\ B_1=\ldots,\ C_1=\ldots,\ A+B+C=\pi,$$

obţinem relaţia din enunţ.

C. I. Ţ.

PROBLEMA 4713. *Să se demonstreze că dacă* a *şi* b *sunt două numere prime între ele, expresiunea*

$$(a^6 + b^6 - 1)(a^6 + b^6 - 2)$$

se împarte exact cu 252.

P. SERGESCU.

Soluţie dată de D-nii: G. G. CONSTANTINESCU, A. ARŞAVSCHI (profesor, Chilia), AURELIAN CĂLINESCU (Tg.-Mureş), BAL LASCU, V. HERMAN (studenţi Cluj), VICTOR FLORESCU (cl. VI-a, lic. militar N. Filipescu), C. GAVRILESCU (Şcoala ofiţeri infanterie), D. RIPIANU.

Cum $252 = 4 \times 7 \times 9$, e necesar şi suficient să dovedim divizibilitatea prin fiecare din factorii 4, 7, 9.

Divizibilitatea cu 4. a şi b nu pot fi pereche în acelaş timp. Dacă $a = 2m$, $b = 2n + 1$, expresia $a^6 + b^6 - 1$ e $\mathcal{M}.4$; iar dacă $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$, avem:

$$a^6 + b^6 - 2 = a^6 - 1 + b^6 - 1 = (a^3 - 1)(a^3 + 1) + (b^3 - 1)(b^3 + 1) =$$

$$\mathcal{M}.4 + \mathcal{M}.4 = \mathcal{M}.4.$$

Divizibilitatea cu 7. a şi b nu pot fi în acelaş timp multipli de 7. Dacă $a = \mathcal{M}.7$, $b \neq \mathcal{M}.7$, în baza teoremei lui FERMAT, avem $b^6 - 1 = \mathcal{M}.7$, deci $a^6 + b^6 - 1 = \mathcal{M}.7$. Dacă însă $a \neq \mathcal{M}.7$ şi $b \neq \mathcal{M}.7$, avem $a^6 - 1 = \mathcal{M}.7$, $b^6 - 1 = \mathcal{M}.7$ şi deci:

$$a^6 + b^6 - 2 = a^6 - 1 + b^6 - 1 = \mathcal{M}.7 + \mathcal{M}.7 = \mathcal{M}.7.$$

Divizibilitatea cu 9. a şi b nu pot fi în acelaş timp multipli de 3.

Dacă $a = \mathcal{M}.3$, $b \neq \mathcal{M}.3$, avem $b^6 = \mathcal{M}.9 + 1$ şi deci:

$a^6 + b^6 - 1 = \mathcal{M}.9$. Dacă însă $a \neq \mathcal{M}.3$, $b \neq \mathcal{M}.3$, avem

$$a^6 = \mathcal{M}.9 + 1, \quad b^6 = \mathcal{M}.9 + 1 \text{ şi ca atare:}$$

$$a^6 + b^6 - 2 = a^6 - 1 + b^6 - 1 = \mathcal{M}.9.$$

Prin urmare produsul dat se împarte exact cu $4 \times 7 \times 9 = 252$.

PROBLEMA 4714. *Perpendicularele ridicate în* A *pe laturile* AB, AC *ale triunghiului* ABC *întâlnesc dreapta* BC *în* C', B'. *Să se arate că paralelele duse prin* B' *şi* C' *respectiv la* AB *şi* AC *se întâlnesc pe înălţimea vârfului* A.

C. IONESCU-BUJOR.

Soluţia I. Paralelele duse prin B', C' respectiv dreptelor AB, AC sunt înălţimi ale triunghiului AB'C' — deci se vor întâlni pe a treia înălţime a triunghiului, adică pe înălţimea vârfului A al triunghiului ABC.

Soluţie dată de D-rele: GICA BOTEZ (Liceul Notre Dames de Sion, Iaşi), CORNELIA COMLOŞAN (studentă Cluj) şi de D-nii: I. COTIGHER (elev inginer Bucureşti), P. DOBRESCU, Slt. M. GRUMĂZESCU, V. HERMAN (student Cluj), D. MAVRODIN (student), G. I. POPOVICI (elev inginer Bucureşti), Slt. M. C. I. VLAD (student Cluj), dela Liceul militar Iaşi: C. V. ANICOLAESI, V. N. BUCUR, I. G. BOGDAN, G. D. CÂRDEIU, A. I. CORNĂŢEANU, P. FIRU, P. P. GHEORGHIU, I. IMBRU, T. IGNAŢIU, I. V. JAREGHIE. A. C. JIPA, P. T. MAMUT, A. T. NADOLU, C. V. PANTELIMON, C. I. PASCARU, I. I. PASCARU, M. D. POPA, N. A. PUNGĂ, A. PETRESCU, L. R. POPOVICI, V. STĂNCULESCU, T. C. TRUFIN, S. TURCU, N. G. VARTIC; — dela liceul militar Cernăuţi: N. G. APOSTOL, S. D. IONESCU, N. V. NEDELCU, D. V. NISTORESCU, CL. V. TANASICIUC; dela Liceul militar N. Filipescu: R. APOSTOL, G. D. DECIULESCU, B. I. PETRESCU, H. V. PASCU, N. D. ŞTEFĂNESCU, D. THEODORESCU; — I. I. PETRESCU, M. STĂNCULESCU (Lic. Spiru Haret Bucureşti), EM. TÂNJALĂ (Bacalaureat Brăila), M. VASILESCU-STABU (Liceul Alba Iulia); dela Liceul militar Chişinău: D. I. BAZAC, V. A. PĂDUREŢ, H. TOMESCU; şi A. A. POP (Liceul militar Tg. Mureş).

Soluţia II. Fie H proecţia lui A pe BC. Din triunghiurile dreptunghice AB'C, A'BC' avem:

$$\overline{AH}^2 = \overline{HB'}.\ HC = \overline{HB}.\ \overline{HC'},$$

deci

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{HB'}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{HC'}}.$$

Notând A_b , A_c punctele în care AH întâlneşte paralelele duse prin B', C' dreptelor AB, AC,

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{HB'}} = \frac{\overline{HA}}{\overline{HA_b}} , \quad \frac{\overline{HC}}{\overline{HC'}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{HA_c}} ,$$

de unde

$$\frac{\overline{HA}}{\overline{HA_b}} = \frac{\overline{HA}}{\overline{HA_c}}$$

şi deci A_b , A_c coincid.

Au rezolvat astfel problema D-nii: I. ŢIŢEICA (Liceul Mânăstirea Dealu), H. BODNĂRESCU (Seminarul Pedagogic Titu Maiorescu Bucureşti), L. BIVOLARU (Liceul militar Iaşi), A. CĂLINESCU (Tg.-Mureş), V. FLORESCU (Liceul mililitar N. Filipescu), C. N. GAVRILESCU (Şcoala pregătitoare ofiţeri Bucureşti), H. IOACHIM (Liceul militar Iaşi), BAL LASCU (student Cluj), S. P. LĂZĂRESCU (Liceul militar N. Filipescu), M. NĂSTASE (Liceul militar N. Filipescu), M. A. NEGREA (Brăila), I. STĂNCULESCU (Liceul Spiru Haret Bucureşti), EM. G. TÂNJALĂ (Bacalaureat Brăila), S. C. TILICĂ (Lic. Traian, T.-Severin).

Soluţia III dată de D-l M. C. POSTELNICESCU:

Cu notaţiile precedente, avem

$$\overline{HB} = \overline{AB} \cos B$$

$$\overline{HB'} = \overline{AH} \operatorname{tg} \widehat{HAB'} = \overline{AH} \operatorname{tg} C$$

de unde,

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{HB'}} = 2R \frac{\cos B \cos C}{\overline{AH}} .$$

Aceeaşi valoare se găseşte pentru $\frac{\overline{HC}}{\overline{HC'}}$, apoi soluţia urmează mersul celei precedente.

Soluţia IV: (analitică). Alegem BC drept axă Ox, iar înălţimea coborîtă din A drept Oy.

Fie A (o, a), B (b, o), C (c, o).

$(AC') \equiv y - a = \frac{b}{a}x$ de unde

$C'\left(-\frac{a^2}{b}, o\right)$ şi cu notaţiile date la Soluţia II.

$(A_c C') \equiv y = -\frac{a}{c}\left(x + \frac{a^2}{b}\right)$, analog

$(A_b B') \equiv y = -\frac{a}{b}\left(x + \frac{a^2}{c}\right)$.

Conchidem că A_b, A_c au aceleaşi ordonate.

Soluţie dată de D-nii: D. MAVRODIN (student), G. I. POPOVICI (elev inginer Bucureşti), I. COTIGHER (elev inginer Bucureşti), M. F. AMĂRĂŞTEANU (Şc. Politehnică Regele Carol II), E. BEIU-PALADI (Lic. M. Viteazul Bucureşti), C. BEŞCHEA (Lic. militar Tg. Mureş), M. C. BULAT (Lic. militar Chişinău), D. I. A. BAZAC (Lic. militar Chişinău), V. N. BUCUR şi I. G. BOGDAN (Lic. militar Iaşi), H. M. BODNĂRESCU (Seminarul pedagogic Titu Maiorescu, Bucureşti), C. COTESCU (Bacău), C. I. DIMITRIU (Galaţi), C. N. GAVRILESCU (Şcoala pregătitoare ofiţeri Bucureşti), R. STROHAL (Lic. militar Cernăuţi), I. STOIAN (Lic. militar Tg.-Mureş), CL. V. TANASICIUC (Lic. militar Cernăuţi).

Notă. D-l O. G. RĂDULESCU soluţionează problema folosind relaţiile unghiulare ale figurii.

C. I. B.

PROBLEMA 4718. *Intr'un triunghiu oarecare avem relaţia:*

$$\frac{\cos B + \cos C - \sin B - \sin C}{1 - \sin A - \cos A} = \cos B + \sin B \operatorname{cotg}\frac{A}{2}.$$

LT. C. IONESCU-ŢIU.

1. *Soluţie* dată de D-nii: A. CĂLINESCU (Tg.-Mureş) şi VICTOR L. FLORESCU (Cl. VI-a Lic. militar „N. Filipescu").

Prima parte se poate scrie succesiv:

$$\frac{\cos B+\cos C-\sin B-\sin C}{1-\sin A-\cos A}=\frac{\cos B-\sin B-\cos(A+B)-\sin(A+B)}{1-\sin A-\cos A}$$

$$=\frac{\cos B(1-\sin A-\cos A)-\sin B(1-\sin A+\cos A)}{1-\sin A-\cos A}$$

$$=\cos A+\sin B\,\frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1};$$

însă

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{\sin A}=\frac{\sin A}{1-\cos A}=\frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1},$$

deci

$$\frac{\cos B+\cos C-\sin B-\sin C}{1-\sin A-\cos A}=\cos B+\sin B\operatorname{cotg}\frac{A}{2}.$$

c. c. t. d.

2. *Soluție* dată de D-nii: MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila), VIRGIL ECKSTEIN (București), NICOLAE D. ȘTEFĂNESCU (Lic. militar „N. Filipescu"), PETRU P. COJOCARU (Cl. VIII-a Lic. militar Iași), GAVRIL I. POPOVICIU (elev-inginer, București), CONST. N. GAVRILESCU (Școala pregătitoare de Ofițeri București), RADU APOSTOL (Cl. VII-a), GHEORGHE D. DECIULESCU (Cl. V-a), BENONE P. PETRESCU (Cl. VII-a), OCTAVIAN GH. RĂDULESCU (elevi Lic. militar „N. Filipescu"), MARCEL F. AMĂRĂȘTEANU, ADOLF M. DEUTSCH, RADU I. CIURESCU (Cl. VII-a Colegiul Național „Sf. Sava"), MATEI D. DUMITRU (Cl. VIII-a Lic. Internat Iași), SLT. MIRCEA GRUMĂZESCU, SLT. M. C. I. VLAD (student, Cluj), I. GR. BOGDAN (Iași), AUREL CORNĂȚEANU (Lic. militar Iași) și ȘT. TILICĂ (Lic. „Traian" Tr.-Severin),

Se poate scrie succesiv:

$$\frac{\cos B+\cos C-\sin B-\sin C}{1-\cos A-\sin A}$$

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin^2\frac{A}{2}-2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{B-C}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} - \sin\frac{B+C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{B-C}{2}\left(\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\frac{C-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{\sin\frac{A}{2}\cos B + \sin B\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$= \cos B + \sin B \operatorname{cotg}\frac{A}{2}.$$

c. c. t. d.

Observare. Partea doua a relației nefiind simetrică se deduce și relația:

$$\cos B + \sin B \operatorname{cotg}\frac{A}{2} = \cos C + \sin C \operatorname{colg}\frac{A}{2}.$$

C. I. Ț.

PROBLEMA 4750. *In cercul de centru* O, *fie* A *și* B *capetele a doi diametri perpendiculari; un diametru* D, *oarecare, taie tangentele din* A *și* B *în* T *și* U. *Simetricul diametrului* OA *față de* D, *taie pe* BU *în* V; *simetricul lui* B *față de* V, *fie* W. *Să se arate că* UW = AT.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluție dată de D-nii: DORIN N. THEODORESCU (cl. V-a, lic. milit. Mânăstirea Dealu) și EMANOIL GH. TÂNJALĂ (Bacalaureat, Brăila). Fie U' intersecția perpendicularei în O pe OU, cu tangenta în B. Triunghiul OVU e isoscel, căci $\sphericalangle VOU = \sphericalangle UOA = \sphericalangle VUO$; deasemenea e isoscel triunghiul OVU' căci $\sphericalangle VU'O = \sphericalangle U'OV$, complemente ale unghiurilor egale VOU și VUO. Rezultă că în triunghiul dreptunghic UOU', V este mijlocul ipotenuzei UU' (UV = VO = VU') deci VU' = VU, apoi VB = VW prin enunț, deci UW = BU'. Dar triunghiurile OU'B, OAT sunt egale — dreptunghice, cu unghiurile din O egale, formate de laturi perpendiculare și OA = OB. Deci U'B = AT și în concluzie UW = AT.

c. c. t. d.

Soluție trigonometrică: Notând $\sphericalangle(D, OA)$ cu α, avem:

$$UW = BU - 2VB = \operatorname{cotg}\alpha - 2\operatorname{cotg}2\alpha =$$

$$\operatorname{cotg}\alpha - \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{\operatorname{cotg}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = AT.$$

Notă. 1°. Alte soluții geometrice date de D-nii: RADU I. CIURESCU (cl. VII-a, Colegiul național Sf. Sava București), HERMANN VICTOR (Student Cluj) și NEGREA A. MIRCEA (Brăila).

2°. Soluții trigonometrice date de D-rele: ILEANA MUSCELEANU (cl. VII-a, Caracal), CORNELIA COMLOȘAN (Cluj) și D-nii: Sublt. MIHAIL C. I. VLAD (Cluj), PETRE P. COJOCARU (cl. VIII-a, lic. militar Iași), ADOLF DEUTSCH, BAL LASCU, EUGEN MARCOVICI, I. STĂNCULESCU (cl. VII-a, lic. „Spiru Haret", București), STREDER IOAN (Iași), VASILESCU STABU A. MIRCEA (cl. V-a lic. Mihaiu Viteazul" Alba Iulia), RADU V. APOSTOL, VICTOR FLORESCU, M. C. POSTELNICESCU, NICULAE D. ȘTEFĂNESCU (elevi la lic. militar Mânăstirea Dealu).

3°. Soluții analitice date de D-nii: MARCEL F. AMĂRĂȘTEANU, PAUL G. MIHĂILESCU (Școala Politehnică, București) și MUREȘANU GH. (lic. militar Tg.-Mureș).

4°. S'a mai primit încă 12 soluții identice dela liceul militar Iași, care au fost anunțate pe copertele Gazetei. Astfel de soluții nu se pot considera.

EXERCIȚII

16. Intr'un triunghiu ABC în care diferența unghiurilor B și C este egală cu 90°, segmentul determinat pe latura BC de înălțimea și mediana ce pleacă din vârful opus, este egal cu raza cercului circumscris.

M. C. POSTELNICESCU.

R. Tangenta în A la cercul O circumscris triunghiului, intersectează latura BC într'un punct H_a, astfel că:

$$\sphericalangle AH_a B = \frac{1}{2}(\text{arc}\,AC - \text{arc}\,AB) = \frac{1}{2}(\hat{2B} - \hat{2C}) = 90°.$$

Dreapta AH_a este prin urmare înălțime în triunghiul dat.

In consecință, dacă M_a este mijlocul segmentului BC, patrulaterul $AH_a M_a O$ este un dreptunghiu și deci:

$$H_a M_a = OA = R.$$

c. t. d.

17. Să se arăte că dacă:

$$x + y + z = 0$$

avem relaţia:

$$2\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{x^3+y^3+z^3}{3} \cdot \frac{x^4+y^4+z^4}{4} \cdot \frac{x^5+y^5+z^5}{5} = \left(\frac{x^7+y^7+z^7}{7}\right)^2.$$

MIRCEA ADAM.

R. Notăm:

$$s_n = x^n + y^n + z^n$$

şi ţinem seama de relaţiile cunoscute din Culegerea de Probleme de Algebră Ediţia III:

$$s_7 = \frac{7}{12} s_3 \cdot s_2^2 \qquad \text{(XXXVII p. 13)}$$

$$3s_2 s_5 = 5s_3 \cdot s_4 \qquad \text{(XXXVII p. 22)}$$

obţinem:

$$2s_4 = s_2^2 \qquad \text{(II. p. 18)}$$

18. Să se demonstreze că expresia:

$$E = 2\left[x - y + \sqrt{2(x^2+y^2)}\right]\left[x + y + \sqrt{2(x^2+y^2)}\right]$$

este un patrat perfect.

TUDOR STOICESCU.

R. Efectuez şi găsesc:

$$2\left[x^2 - y^2 + 2x\sqrt{2(x^2+y^2)} + 2(x^2+y^2)\right] = 2x^2 + 4x\sqrt{2(x^2+y^2)} + 4x^2 + 2y^2$$

$$= 4x^2 + 4x\sqrt{(x^2+y^2)\cdot 2} + 2(x^2+y^2) = \left[2x + \sqrt{2(x^2+y^2)}\right]^2.$$

19. Să se găsească un polinom $P(x)$ care satisface relaţia:

$$\frac{P(x^2)}{P(x)} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^7.$$

Generalizare.

LT. C. IONESCU-ŢIU.

R. Avem:

$$\frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdots \frac{1-x^{2^n}}{1-x^{2^n-1}} = \frac{1-x^{2^n}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{2^n-1}.$$

sau

$$(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^n-1}) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{2^n-1}.$$

$$P(x) = (1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{2^n-1}).$$

PROBLEME PROPUSE

4783. Cum putem găsi perechi de fracţii aşa ca numărătorul sumei lor să fie suma numărătorilor lor, fără ca ele să aibă acelaş numitor?

I. IONESCU.

4784. Din numărul format de primele n cifre de la stânga lui N^2 se scade N, iar după diferenţa obţinută se scrie numărul format de restul cifrelor lui N^2. Să se demonstreze că numărul astfel obţinut se divide prin N.

G-L GH. BUICLIU.

4785. Să se construiască un paralelogram căruia i se cunosc laturile şi suma sau diferenţa diagonalelor.

ULPIU FLORESCU.

4786. Fie A', B', C' picioarele a trei ceviene concurente în punctul M, în triunghiul ABC. Să se arate că dreptele lui GAUSS ale patrulaterelor AB'C'M, BC'A'M, CA'B'M sunt concurente.

ALEXANDRU V. NICULESCU.

4787. Pe înălţimea AA' a triunghiului ABC dreptunghiu în A, se ia un punct M. Dacă N este punctul de întâlnire al perpendicularelor duse din B şi C respectiv pe CM şi BM, să se găsească locul punctului N când M se mişcă pe AA'.

THEODOR M. COCEA.

4788. M fiind un punct în planul unui exagon regulat $A_1A_2\ldots A_6$, să se arate că există relaţia:

$$\overline{MA_1^2}+\overline{MA_3^2}+\overline{MA_5^2}=\overline{MA_2^2}+\overline{MA_4^2}+\overline{MA_6^2}.$$

Generalizare.

AL. A. ROŞU.

4789. Fie a, b, α, β patru numere oarecare. Se formează triunghiul dreptunghic ABC, cu ipotenuza BC, astfel că:

$$\overline{AB} = a\alpha - b\beta\,,\quad \overline{AC} = a\beta + b\alpha.$$

Se construeşte apoi triunghiul BCD, vârful D fiind în afara triunghiului ABC, astfel că:

$$\overline{BD} = a\beta - b\alpha\,,\quad \overline{CD} = a\alpha + b\beta.$$

Să se demonstreze relaţia:

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC} = (a^2 - b^2)(\alpha^2 + \beta^2).$$

GH. DUMITRESCU.

4790. Să se arate că valoarea determinantului:

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \dots & a \\ b & x_2 & a & \dots & a \\ b & b & x_3 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

este

$$(-1)^n\,\frac{a\,P(b) - b\,P(a)}{a-b}\,,$$

unde $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$.

A. ANGELESCU.

4791. Să se calculeze, pentru $n=\infty$, limita expresiunei:

$$n^p\cdot\sqrt[n]{n} - C_p^1(n-1)^p\cdot\sqrt[n-1]{n-1} + C_p^2(n-2)^p\sqrt[n-2]{n-2} - \dots$$
$$\dots + (-1)^p C_p^p\cdot(n-p)^p\sqrt[n-p]{n-p}$$

p fiind un număr întreg şi pozitiv, fix.

M. GHERMĂNESCU.

4792. A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu, să se stabilească relaţia:

$$\frac{2\sin^2A \cdot \sin^2B \cdot \sin^2C + \Sigma \sin^2A \sin^2B (\sin^2A + \sin^2B)}{\Sigma \sin A \sin B \sin(B-A)} = \frac{(\sin^2A + \sin^2B)(\sin^2B + \sin^2C)(\sin^2C + \sin^2A)}{\sin(B-C) \cdot \sin(C-A) \cdot \sin(A-B)}.$$

C. IONESCU-BUJOR.

4793. Ecuaţia

$$\cos 2z + 5 = 4\cos z$$

are rădăcini imaginare. Să se calculeze aceste rădăcini.

GH. TH. GHEORGHIU.

4794. C fiind un punct dat pe bisectoarea interioară a unghiului AOB, se duce prin C o secantă variabilă care taie laturile OA şi OB în D şi E. Se duce cercul tangent în D la OA şi trecând prin C, apoi cercul tangent în E la OB şi trecând prin C. Fie M punctul lor de intersecţie, afară de C. Să se găsească şi să se construiască locul geometric (M) al lui M şi să se afle aria acestei curbe. Să se arate că dacă unghiul AOB este drept, curba (M) este înfăşurătoarea cercului de diametru AB şi podara unei iperbole echilatere în raport cu unul din vârfurile sale.

N. ABRAMESCU.

RECTIFICARE. 1. — La pag. 260: Valoarea lui Δ se rectifică, înlocuind-o prin

$$\Delta = \frac{1}{1-k}\left[bc - k\left\{a(\mu - \nu) + c(\lambda - \mu)\right\}\right]$$

şi înlocuind apoi pe S_1 prin $(1-k)S_1$.

2. — La pag. 261: Formula (2) se înlocueşte prin

$$(2) \qquad S_1 = \frac{1}{1-k}(S - kS').$$

3. — La pag. 301: Ultimul număr din rândul 4 de jos al tabloului se termină în 961, nu în 761.

4. — La pag. 309: Rândul 17 de sus se înlocueşte *Nota* prin *Data*.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam Mircea (3562, E, P); *Amărăşteanu F. Marcel* (4712, 13, 19, 35 36, 40, 57, 59, 60, 65, 69, 78, P); *Apostol V. Radu* (4643, 719, 51, 52, 57 65, 74, 76, 82); *Bărbieru Victor* (4739); *Basacov Gh.* (C, E); *Bivolaru M. Liviu* (4634, 95, 736, 56, 67); *Bostangiu D. I.* (4769); *Botez Gică* (4634); *Bucurenciu I. Vasile* (4679, 91, 705, 14, 28, 39, 52, 57, 60, 73, 82); *Călinescu Aurelian* (4746); *Cârdeiu D. Gh.* (4760, 73); *Cetățeanu Stelian* (4634, 773); *Cherciu I. Gh.* (4552, 57, 750, 60); *Cioc I. D-tru* (4747, 50); *Ciurescu I. Radu* (4718, 19, 35, 56, 64, 67, 69); *Cocea Theodor* (P); *Cornățeanu I. A.* (4552, 695, 748, 56, 57, 59, 60); *Cotigher S. Iacob* (4520, 85, 99, 644, 61, 735, 69); *Deciulescu Gh.* (4735); *Deutsch Adolf* (4744); *Dimitriu Gigea* (4634); *Dobrescu Paul* (4737); *Eckstein Virgil* (4737, 73, 74, 76, 77, 78); *Enache D. I.* (4634, 91); *Firu P.* (4714); *Florescu Victor* (4667, 95, 727, 43, 76); *Gavrilescu N. Const.* (4622, 56, 48, 727, 48, 62, 71); *Ianculescu S. O.* (4744); *Ignatiu Traian* (4634); *Ioachim L. Har.* (4634, 91, 95, 736, 48, 52, 56, 57, 67); *Ionescu G. I.* (4748, 67); *Jareghie V. Ioan* (4773); *Jipa C. Alex.* (4418, 634, 91, 718, 27, 28, 29, 48, 50, 52, 57, 60, 65, 67); *Lăzărescu H.* (4756); *Mamut I. Petre* (4718, 50, 56, 57, 59, 65); *Marcovici E.* (4618, 713, P); *Martac V. Radu* (4776, 73); *Mihăilescu G. P.* (4714, 69); *Milu I. Nicolae* (4634, 76, 714, 57); *Mureşan Gh.* (4750); *Nadolu T. Andrei* (4695, 752, 56); *Negrea A. Mircea-Leonte* (4625); *Niculescu Gh. Mircea* (4634, 91, 95, 736, 50, 52, 56, 67); *Oprişan Cornel* (4745); *Pantelimon V. Const.* (4773); *Parepeanu C. Ion Subloc.* (4714, 18, 19, 27, 28, 32, 37, 39, 56, 60, 65, 67, 76); *Pascaru I. Ion* (4752, 57, 65); *Petrescu Achille* (4760, 63, 73, 76); *Petrescu Gh. Vintilă* (4634, 714, 52, 59, 67); *Popa D. M.* (4644, 739, 71, 73, 76, P); *Popescu-Zorica Al.* (4636); *Popovici Gavril* (4665, 740, 63); *Postelnicescu C. M.* (4751); *Pungă I. Nic.* (4634, 91, 95, 756, 67); *Rădulescu Gh. O.* (4748, 52, 67, 69, 76, P); *Ripianu D-tru* (4717, 60, 64, 81); *Roşculeț I. Marcel* (4748, 53, 60, 64); *Rosciescu F. M.* (4736, 48, 67); *Săndulache C.* (4771, C); *Stănculeanu P. Mihail* (4736, 57, 67); *Stănculescu Mihail* (4634); *Stănculescu V.* (4736, 48, 67); *Ştefănescu D. Nic.* (4378, 721, 44, 51, 53, 56, 57, 65, 76, 82, C, N); *Stoian St. D.* (4727, 36); *Streder Ioan* (4705, 48, 56, 57, 59); *Thébault V.* (P); *Theodorescu N. Dorin* (4570, 634. 760, 67); *Tica P. Marin-Gall* (4756, 67); *Trufin C. Traian* (4763, 73, 76); *Tudoran M. Sonia* (4735, 59); *Turcu R. Sandu* (4739, 73, 76); *Vartic Nicolae* (4634); *Vasilescu-Stabu Al. Mircea* (4581, 634, 720, 60, 63, 73, 82); *Vlad I. C. M.* (4760).

Manuscrisele se vor scrie pe **o singură parte a foii și nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE"

Colecţiunea *„Gazetei Matematice"* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN**

C. 43574

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLII

NUMĂRUL 8. — APRILIE 1937

BIBLIOTECA CENTRALA

SUMARUL

1. Articol despre triunghiul echilateral (urmare de la pag. 360) . . . . . *Ernest Abason.*
2. Parametrul parabolei circumscrise unui trapez . *E. Caraman.*
3. Despre originea teoremei lui Pitagora . . . *Fl. Cânpan.*
4. Premiul „Inginer Al. Roşu".
5. Note Matematice: 36 — 39.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 265.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2187, 2398, 2780, 4476, 4643, 4665, 4703, 4727, 4737, 4756, 4759, 4763, 4771.
10. Exerciţii: 20 — 21.
11. Probleme propuse: 4795 — 4806.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1937

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer-Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **D. Stan**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1936 şi nerezolvate sunt enumărate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4724, 26, 31, 34, 42, 49, 61, 68, 70, 72, 75, 79, 80, 83, 86, 90, 91, 92, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 800, 01, 02, 03, 04, 05, 06.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	220	260	80
5— 8 „	375	425	100
9—16 „	620	700	160
Coperta	120	160	80

ARTICOL DESPRE TRIUNGHIUL ECHILATERAL

(Urmare dela pag. 360).

Consecinţe. I. Proprietatea I-a, se mai poate enunţa şi astfel: *Fiind dat un triunghiu echitateral* ABC *şi un punct oarecare* O *în planul său, segmentele* OA, OB, OC, *sunt medianele unui triunghiu* (fig. 6).

Intr'adevăr: $OB = OB_1$ şi $OC = OC_1$, iar O fiind centrul de greutate al triunghiului AB_1C_1, lungimile OA, OB, OC sunt două treimi din medianele acestui triunghiu, sau, ele sunt egale cu medianele unui triunghiu asemenea cu AB_1C_1 şi în raportul 2/3 faţă de acesta.

II. Observând că *totdeauna* se poate construi un triunghiu cu medianele unui triunghiu, proprietatea de mai sus, poate fi enunţată şi astfel:

Cu lungimile OA, OB, OC *care unesc un punct oarecare din planul unui triunghiu echilateral* ABC *cu vârfurile acestuia, se poate forma totdeauna un triunghiu,* proprietate enunţată şi demonstrată pe altă cale de D-l Prof. D. POMPEIU [1]).

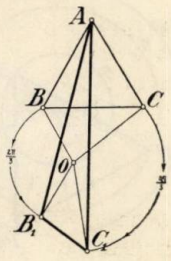


Fig. 6.

II. Proprietate. *Fiind date trei cercuri concentrice, de centru comun* O *şi raze* r_1, r_2, r_3, $(r_3 < r_1 + r_2)$ *este totdeauna posibil să construim un triunghiu echilateral* MNP, *astfel ca vârfurile lui să fie situate pe câte unul din cele trei cercuri.*

1) Sub această din urmă formă, proprietatea de mai sus, cunoscută şi sub numele de *teorema* D-lui POMPEÏU, a primit până în prezent numeroase demonstraţiuni, dintre care, unele pur geometrice.

A se vedea:

D. POMPEÏU. *Une identité entre nombres complexes et un théorème de géométrie élémentaire.* (Bull. de Math. et de Phys. de l'Ecole Polytechnique Roi Carol II. Tome VI. Fasc. 16—17—18, pag. 6).

G. BRATU (Cluj). *Un théorème* de M. POMPEÏU (Bull. de Math. et de Physique de l'Ecole Politechnique Roi Carol II. Tome VII. Fasc. 19—20—21. pag. 3).

N. OBRETCKOFF (Sofia) *Sur un théorème* de M. POMPEÏU. (Id. pag 4).

HAROLD HILTON. (Londra). *Sur un théorème* de M. D. POMPEÏU (Id. pag. 5).

N. BOTEA. *Une relation entre nombres complexes et la généralisation d'un théorème de géométrie élémentaire.* (Id. pag. 13).

E. ABASON. *Sur une propriété du triangle equilatéral.* (Id. pag. 6).

E. ABASON. *Un théorème de Géometrie.* (Id. pag. 8).

Un studiu asupra aceleiaşi chestiuni, a fost expus la seminarul de matematici al D-lui Prof. D. POMPEIU, de către D-l DAN BARBILIAN; acest studiu va apare în Bulletin Mathématique de la Société Roumanie de Sciences (1937).

Această proprietate se găseşte enunţată ca simplu exerciţiu (nerezolvat) în BOURDON, *Applications de l'Algèbre à la Géométrie.* (Paris 1880. Exercice IX. page 48).

Ne propunem să o stabilim, în cele ce urmează, folosind cantităţile complexe; apoi vom da şi o construcţiune geometrică.

Ne vom da în acest scop, în mod arbitrar vârful M (z_1), (fig. 7) pe cercul de rază r_1; chestiunea revine să determinăm vârful N (z_2) situat pe cercul de rază r_2, deoarece vârful P (z_3) situat pe cercul de rază r_3, rezultă din una din relaţiile (8) sau (10) după cum triunghiul MNP este pozitiv sau negativ.

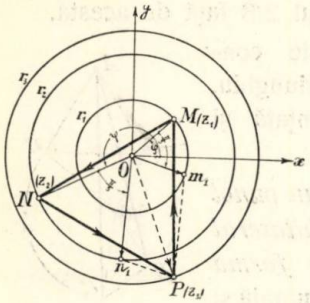


Fig. 7.

Fie: (r_1, r_2, φ daţi; ψ necunoscut)

$$z_1 = r_1 \lfloor \varphi \quad , \quad z_2 = r_2 \lfloor \psi \; .$$

1. Dacă triunghiul MNP este pozitiv, avem:

$$z_1 + v z_2 + v^2 z_3 = 0$$

din care se obţine:

$$(14) \qquad z_3 = -v z_1 - \frac{1}{v} z_2 .$$

Cantităţile $-vz_1$ şi $-\frac{1}{v} z_2$, reprezintă (vezi relaţiile (3)) respectiv vectorii Om_1 şi On_1, ce se obţine rotind vectorul $\overline{OM}$, de unghiul $\frac{\pi}{3}$ în sens negativ şi vectoriul $\overline{ON}$, de unghiul $\frac{\pi}{3}$ în sens pozitiv.

Relaţiile (14) exprimă că vectorul $\overline{OP}\,(z_3)$ este suma geometrică a vectorilor $\overline{Om_1}$ $\left(-vz_1\right.$, de argument $\left.\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$ şi On_1 $\left(-\frac{1}{v} z_2\right.$, de argument $\left.\psi + \frac{\pi}{3}\right)$; observând că:

$$(15) \qquad \sphericalangle(\overline{Om_1}\,,\,\overline{On_1}) = \psi - \varphi + \frac{2\pi}{3}$$

putem scrie:

$$(16) \qquad r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\left(\psi - \varphi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

relaţiune în care r_1, r_2, r_3 sunt daţi, iar φ este presupus cunoscut,

deoarece ne-am dat punctul $M(z_1 = r_1 | \varphi)$; ea permite deci să aflăm unghiul ψ:

$$\cos\left(\psi - \varphi + \frac{2\pi}{2}\right) = \frac{r_3^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}$$

$$\psi - \varphi + \frac{2\pi}{3} = \arccos \frac{r_3^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2} = 2k\pi \pm \alpha$$

α fiind cel mai mic unghiu, cuprins între 0 şi π, şi al cărui cosinus este egal cu $\frac{r_3^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}$. Rezultă soluţiile:

$$\psi_1 = \left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + \alpha$$

(17)

$$\psi_2 = \left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) - \alpha .$$

Găsim astfel două soluţiuni (vezi şi fig. 8): triunghiurile echilaterale MN_1P_1 (negativ) şi MN_2P_2 (pozitiv).

2) In cazul când triunghiul MNP este echilateral şi negativ, avem:

$$z_1 + v^2 . z_2 + v . z_3 = 0$$

deci

$$z_3 = -\frac{1}{v} z_1 - v z_2 .$$

Unghiul dintre vectorii: $\overline{Om_1}\left(-\frac{1}{v} z_1$, de argument $\varphi + \pi\right)$ şi $\overline{On'_1}\left(-v . z_2$ de argument $\psi + \frac{\pi}{3}\right)$ este:

$$\sphericalangle(\overline{Om'_1}, \overline{On'_1}) = \psi - \varphi - \frac{2\pi}{3}$$

obţinem ca mai sus:

$$\psi - \varphi - \frac{2\pi}{3} = 2k\pi \pm \alpha$$

deci:

$$\psi_3 = \varphi + \frac{2\pi}{3} - \alpha .$$

(18)

$$\psi_4 = \varphi + \frac{2\pi}{3} + \alpha .$$

Obţinem astfel încă două soluţiuni : triunghiurile echilaterale MN_3P_3 (pozitiv) şi MN_4P_4 (negativ); (vezi fig. 8 şi fig. 9).

Triunghiurile echilaterale, astfel obţinute (fig. 9) MN_1P_1, MN_2P_2, MN_3P_3, MN_4P_4 sunt două câte două egale şi de semne contrare.

Intr'adevăr: (fig. 9)

$$\Delta(MON_1) = -\Delta(MON_3)$$

deoarece au:

$$OM = r_1 \text{ (comună)}, \quad ON_1 = ON_3 = r_2$$

$$\sphericalangle MON_1 = \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} + \alpha\right) - \varphi = \alpha - \frac{2\pi}{3}$$

$$\sphericalangle MON_3 = \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} - \alpha\right) - \varphi = -\alpha + \frac{2\pi}{3}$$

de aci rezultă $MN_1 = MN_3$; iar:

$$(\Delta MN_1P_1) = -(\Delta MN_3P_3).$$

Tot astfel:

$$\Delta(MON_2) = -\Delta(MON_4)$$

deoarece au:

$$OM = r_1 \text{ (comună)}, \quad ON_2 = ON_4 = r_2$$

$$\sphericalangle MON_2 = \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} - \alpha\right) - \varphi = -\frac{2\pi}{3} - \alpha.$$

$$\sphericalangle MON_4 = \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} + \alpha\right) - \varphi = \frac{2\pi}{3} + \alpha.$$

rezultă $MN_2 = MN_4$, iar:

$$\Delta MN_2P_2 = -\Delta MN_4P_4.$$

Afixele vârfurilor triunghiurilor MN_iP_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

(18) Insemnând $\alpha = \arccos \dfrac{r_3^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}$, avem:

1) *Triunghiul* MN_1P_1 (negativ)

$$M\left(z = r_1 \left| \underline{\varphi} \right.\right); \; N_1\left(z = r_2 \left| \underline{\varphi - \frac{2\pi}{3} + \alpha} \right.\right); \; P_1 \cdot \left(z = -\frac{1}{v} z_M - v\, z_{N_1}\right)$$

2) *Triunghiul* MN_2P_2 (pozitiv)

$$M(z = r_1 \mid \varphi);\ N_2\left(z = r_2 \mid \varphi - \frac{2\pi}{3} - \alpha\right);\ P_2\left(z = -vz_M - \frac{1}{v} z_{N_2}\right)$$

3) *Triunghiul* MN_3P_3 (pozitiv)

$$M(z = r_1 \mid \varphi);\ N_3\left(z = r_2 \mid \varphi + \frac{2\pi}{3} - \alpha\right);\ P\left(z = -vz_M - \frac{1}{v} z_{N_3}\right)$$

4) *Triunghiul* MN_4P_4 (negativ)

$$M(z = r_1 \mid \varphi);\ N_4\left(z = r_2 \mid \varphi + \frac{2\pi}{3} + \alpha\right);\ P\left(z = -\frac{1}{v} z_M - v z_{N_4}\right)$$

Mărimea triunghiurilor echilaterale: $(MN_1P_1) = (MN_3P_3)$ şi $(MN_2P_2) = (MN_4P_4)$, este dată de valoarea laturilor:

$$MN_1 = MN_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)}$$

(19)

$$MN_2 = MN_4 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)}$$

α având valoarea (18):

$$\alpha = \text{arc} \cdot \cos \frac{r_3^2 - r_2^2 - r_1^2}{2r_1r_2}.$$

Construcţiune grafică. Proprietăţile stabilite mai sus, permit următoarea construcţiune grafică, a unui triunghiu echilateral MNP, care să aibă vârfurile situate respectiv pe câte unul din trei cercuri concentrice date, de raze r_1, r_2, r_3 $(r_1 < r_2 < r_3)$ şi centru O.

Presupunem problema rezolvată şi fie MN_1P_1 (fig. 8) triunghiul echilateral căutat.

Potrivit proprietăţii I a. (pag. 8), dacă păstrăm vârful M fix şi rotim segmentele ON_1 şi OP_1, de unghiul $\frac{2\pi}{3}$ în jurul centrului O, şi anume: pe ON_1 în sens *negativ*, în On_1 (sens care este şi acela al triunghiului echilateral considerat MN_1P_1); iar pe OP_1 în sens *pozitiv* până în Op_1, — triunghiul $(M\,n_1\,p_1)$ are centrul de greutate în O.

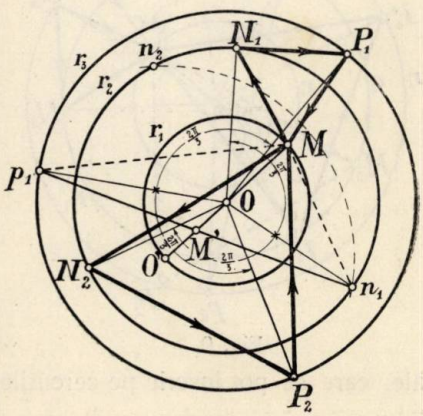


Fig. 8.

Fie M' mijlocul laturii $n_1 p_1$; să observăm că latura $n_1 p_1$ se sprijină pe două cercuri date (r_2 şi r_3) şi are mijlocul ei M' cunoscut (OM' = 1/2 OM)

Dacă unim un punct variabil p_1, depe cercul de rază r_3, cu punctul fix M', — locul geometric al punctului n_1, astfel că $p_1 M' = M' n_1$ — este un cerc cu centrul în O' (diametralul opus lui M, pe cercul de rază r_1) şi având raza egală cu r_3.

De aci rezultă imediat construcţiunea căutată: ne dăm în *mod arbitrar* vârful M, pe cercul de rază r_1.

Din punctul O' (diametralul opus lui M, pe cercul r_1) ca centru, descriem un cerc cu raza r_3; acest cerc taie, în general, cercul de rază r_2 în două puncte n_1 şi n_2.

Pentru ca această construcţiune să fie posibilă, trebue ca:

$$r_3 < r_1 + r_2 .$$

Rotind razele O n_1 şi O p_1 *în sensuri contrare*, obţinem: (fig. 8). (Vezi Reciproca pag. 9).

1) razele ON_1 şi OP_1, adică triunghiul echilateral (MN_1P_1) (negativ).

2) razele ON_2 şi OP_2, adică triunghiul echilateral (MN_2P_2) (pozitiv).

Tot asfel dreapta M' n_2, (fig. 9) determină pe cercul r_3, un punct p_2 şi prin operaţii analoage cu acelea ce preced, găsim:

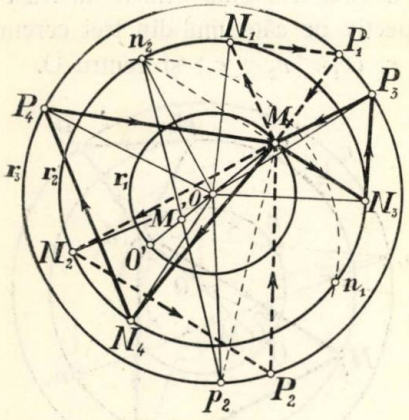


Fig. 9.

3) triunghiul echilateral (MN_3P_3) (pozitiv).

4) triunghiul echilateral (MN_4P_4) (negativ).

In valoare absolută, numai două triunghiuri sunt distincte şi anume:

$$(MN_1 P_1) = -(MN_3 P_3)$$

şi

$$(MN_2 P_2) = -(MN_4 P_4)$$

aşa cum s'a dovedit mai sus.

In fig. 9 s'au figurat toate cele patru triunghiuri echilaterale, care se pot înscrie pe cercurile date [1]).

1) O altă construcţiune a fost dată de D-l GALBURĂ. A se vedea în legătură cu aceasta şi nota mai sus citată, a D-lui G. BRATU.

Consecinţă: Reciproca teoremei D-lui D. Pompeiu.

Proprietatea II şi construcţiunea grafică de ma sus, rezolvă de fapt următoarea reciprocă a proprietăţii enunţată de D-l POMPEIU (vezi pag. 10).

Fiind dat un triunghiu oarecare de laturi r_1, r_2, r_3, *să se determine triunghiul echilateral* (MNP), *în planul căruia există un punct* O, *astfel ca* $OM = r_1$, $ON = r_2$, $OP = r_3$.

Intr'adevăr din cele stabilite mai sus, rezultă că unui triunghiu oarecare T (r_1, r_2, r_3) îi corespund *două* triunghiuri echilaterale distincte (ca valoare absolută) $\mathcal{T}_1$ şi $\mathcal{T}'_1$ şi a căror mărime este definită de relaţiile (19); construcţia dela pag. 397, 398 ne permite să le construim efectiv, odată ce cunoaştem laturile r_1, r_2, r_3 ale triunghiului T.

Din cele ce preced rezultă:

1) Unui triunghiu *oarecare* (T_1) i se poate asocia *două* triunghiuri echilaterale $\mathcal{T}_1$ şi $\mathcal{T}'_1$, pe care le vom numi, *triunghiuri echilaterale asociate* triunghiului T_1 şi vom nota: $T_1(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}'_1)$.

2) Unui triunghiu echilateral $\mathcal{T}_1$, de *mărime dată,* îi corespunde o (∞^2) de triunghiuri T_i, ale căror laturi sunt egale cu distanţele dela un punct *oarecare* din planul triunghiului $\mathcal{T}_1$, la vârfurile acestuia.

Vom nota ansamblul triunghiurilor T_i corespunzătoare triunghiului echilateral $\mathcal{T}_1$ cu: $\mathcal{T}_1(T_i)$.

3) Două ansamble $\mathcal{T}_i(T_i)$ şi $\mathcal{T}_k(T_k)$, corespunzătoare la două triunghiuri echilaterale $\mathcal{T}_i$ şi $\mathcal{T}_k$ *neasociate,* nu cuprind două triunghiuri T identice.

Intr'adevăr, dacă ansamblele de mai sus ar cuprinde două triunghiuri identice, ar urma să putem înscrie în cercurile concentrice, având ca raze, laturile celor două triunghiuri identice,— două triunghiuri echilaterale $\mathcal{T}_i$ şi $\mathcal{T}_k$ *neasociate,* ceeace nu este posibil.

Se vede că, cu modul acesta triunghiurile echilaterale, dau posibilitatea de a separa totalitatea triunghiurilor dintr'un plan, în ansamble cu un număr ∞^2 de elemente, iar două ansamble de acest fel nu au elemente comune [1]).

1) Acest rezultat a fost prevăzut de D-l PROF. D. POMPEIU: într'o convorbire, D-sa mi-a exprimat convingerea în posibilitatea separării totalităţii triunghiurilor dintr'un plan în *ansamble,* ataşate fiecare câte unui triunghiu echilateral de o anume mărime.

Teorema reciprocă (pag. 16) pe care am stabilit-o în prezentul articol şi consecinţele ei, confirmă ideile D-lui POMPEIU, pe care, după cunoştinţa noastră, D-sa le-a schiţat şi la Seminarul D-sale de Matematică dela Universitate.

Un caz particular interesant este acela când T_1 este un triunghiu echilateral: cercurile concentrice (vezi pag. 12) se reduc în acest caz la unul singur (C), iar triunghiurile echilaterale asociate se reduc la oricare din triunghiurile echilaterale înscrise în cercul (C) şi la altul de latură nulă, reprezentat de un punct *oarecare* depe cercul (C).

III.

Compunerea a două triunghiuri. Vom încheia prezentul articol, enunţând o serie de proprietăţi, care traduc geometric, un fenomen electric foarte important în technică.

O demonstraţie geometrică am dat acestor proprietăţi într'un studiu relativ la sistemele polifazate neechilibrate [1]).

Definiţie. *Fie două triunghiuri oarecari* (abc), $(a'b'c')$ *şi un punct oarecare* O *în planul lor; aceste triunghiuri se pot compune după regula paralelogramului, într'un triunghiu* ABC **rezultant,** *potrivit relaţiilor* (fig. 10).

$$\overline{Oa} + \overline{Oa'} = \overline{OA} \; ; \; \overline{Ob} + \overline{Ob'} = \overline{OB}$$

$$\overline{Oc} + \overline{Oc'} = \overline{OC}.$$

Triunghiurile (abc), $(a'b'c')$ sunt **componentele** triunghiului ABC, iar O este *centrul de compunere.*

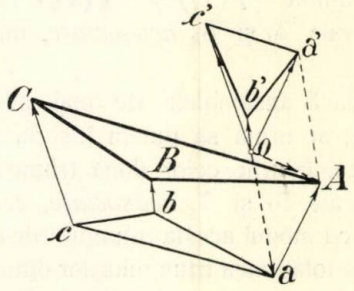


Fig. 10.

In fig. 10, se arată cum se obţin vârfurile triunghiului ABC; spre exemplu: punctul A, prin compunerea vectorilor $\overline{Oa}$ şi $\overline{Oa'}$.

---

1) Vezi: E. ABASON *«Considérations géométriques sur la théorie des systèmes polypohasés non équilibrés».* Publicaţia festivă I. R. E. An. 1937).

E. ABASON. *Propriétés des triangles au même centre de gravité.* (Bull. de Math. et de Phy. de l'École Politechnique. Bucarest. An. VIII. No. 22—23—24).

Vârfurile triunghiului *rezultant* ABC se pot obține de altfel, ducând prin vârfurile *a*, *b*, *c* spre exemplu, vectorii $\overline{a}$A, $\overline{b}$B, $\overline{c}$C equipolenți respectiv cu vectorii $\overline{Oa'}$, $\overline{Ob'}$, $\overline{Oc'}$.

Reciproc: Un triunghiu *oarecare* ABC poate fi descompus în două triunghiuri (*abc*) și (*abc'*), în anume condițiuni; spre exemplu dacă cunoaștem centrul de compunere și triunghiul (*a'b'c'*), tot astfel după cum un vector dat poate fi descompus în alți doi vectori, concurenți cu primul, când cunoaștem spre exemplu, unul din vectorii componenți.

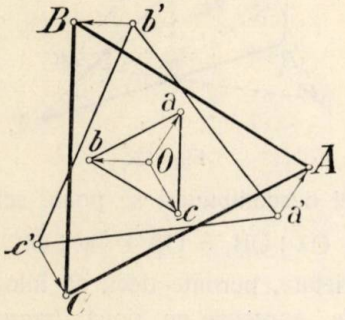


Fig. 11.

Luând ca centru de compunere, *centrul de greutate* al unui triunghiu, există următoarele proprietăți:

I. **Proprietate.** a) *Două triunghiuri echilaterale* (*abc*), (*a'b'c'*) *de acelaș centru de greutate* G *și* **la fel orientate,** *au ca rezultantă tot un triunghiu* **echilateral** ABC, *de aceeași orientare și cu centrul de greutate în* G (fig. 11).

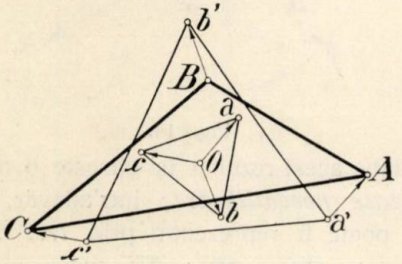


Fig. 12.

b) *Două triunghiuri echilaterale* (*abc*), (*a'b'c'*) *de acelaș centru de greutate, dar* **diferit orientate,** *au ca rezultantă un triunghiu* **oarecare** ABC *cu centrul de greutate în* O (fig. 12).

II. **Proprietate** *(reciprocă). Un triunghiu oarecare* $A_1B_1C_1$ *cu centrul de greutate în* G, *poate fi descompus, într'un singur mod, în două triunghiuri* **echilaterale** $(\alpha\beta\gamma)$ *şi* $(\lambda\mu\nu)$ *de acelaş centru de greutate* G *dar* **diferit orientate** (fig. 13) şi anume: $(\alpha\beta\gamma)$ la fel orientat cu $A_1B_1C_1$, iar $(\lambda\mu\nu)$ de orientare contrară.

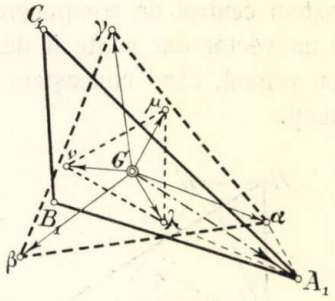


Fig. 13.

Potrivit acestei descompuneri se poate scrie relaţiile:

$$\overline{OA_1} = \overline{O\alpha} + \overline{O\lambda}\,;\ \overline{OB_1} = \overline{O\beta} + \overline{O\mu}\,;\ \overline{OC_1} = \overline{O\gamma} + \overline{O\nu}.$$

Această proprietate, permite deci, să înlocuim în anume condiţiuni, un *triunghiu oarecare* cu două *triunghiuri echilaterale*, diferit orientate.

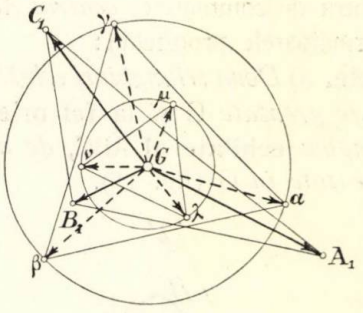


Fig. 14.

In Electricitate, acest rezultat îşi găseşte o aplicaţiune în teoria *sistemelor trifazate neechilibrate;* într'adevăr, în acea teorie un anume fenomen poate fi reprezentat prin *trei vectori concurenţi oarecari (nesimetric)* $\overline{GA_1}$, $\overline{GB_1}$, $\overline{GC_1}$ (fig. 14). Acest sistem de vectori, este în baza celor ce preced, *echivalent* cu două *sisteme simetrice de trei vectori* $(\overline{G\alpha}, \overline{G\beta}, \overline{G\gamma})$ şi $(\overline{G\lambda}, \overline{G\mu}, \overline{G\gamma})$, **de orientări diferite.**

Sub această formă proprietatea II, revine la *teorema lui* STOKVIS şi FORTESCUE, care exprimă posibilitatea de a descompune un *sistem trifazic neechilibrat (nesimetric)* în două *sisteme trifazice echilibrate (simetrice),* dar de orientări contrare.

O demonstraţie simplă a proprietăţii II, am dat-o în articolul citat [1]), iar o variantă a prezentării ei va apare în alt periodic [2]).

Construcţia grafică a triunghiurilor echilaterale ($\alpha\beta\gamma$) şi ($\lambda\mu\gamma$) în care se descompune un triunghiu oarecare $A_1B_1C_1$.

Iată aci o construcţie grafică care rezultă din demonstraţiile citate şi care permite: *determinarea triunghiurilor echilaterale* ($\gamma\beta\gamma$) şi ($\lambda\mu\gamma$) *în care se poate descompune un triunghiu oarecare dat* $A_1B_1C_1$.

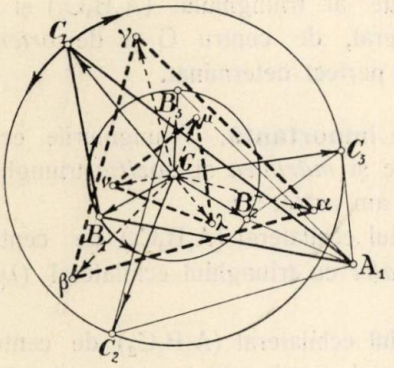


Fig. 15.

Fie G centrul de greutate al triunghiului *oarecare* ($A_1B_1C_1$) pe care voim să-l descompunem în două triunghiuri echilaterale ($\alpha\beta\gamma$), ($\lambda\mu\gamma$) de acelaş centru G.

Să rotim în jurul lui G, vectorii $\overline{GB_1}$, $\overline{GC_1}$ în *sensuri contrare;* această operaţie se poate face în două moduri:

1) Rotim vectorul $\overline{GB_1}$ în sens *contrar* sensului triunghiului ($A_1B_1C_1$) până în $\overline{GB_2}$ (în cazul din fig. 15 acest sens este *pozitiv,* iar al triunghiului ($A_1B_1C_1$), este *negativ*), iar pe $\overline{GC_1}$ în $\overline{GC_3}$. (fig. 15).

1) E. ABASON. *Considérations géometriques sur les systèmes polyphasés.* (Bulletin de l'Institut roumain de l'énergie An. 1937).

2) E. ABASON. «*Sur les triangles au même centre de gravité*» (Bull. de Math. et de Phys. de l'Ecole Polyt. Bucarest. An. VIII No. 22—23—24).

Se obţine triunghiul $(A_1B_2C_3)$, care în baza proprietăţii (reciproca) este echilateral şi are acelaş sens ca $(A_1B_1C_1)$.

Vârful α al unuia din triunghiurile echilaterale căutate, este hiar centrul de greutate al triunghiului $(A_1B_2C_3)$ şi cum $(\alpha\beta\gamma)$ este un triunghiu echilateral, de centru G şi la *fel orientat* cu $(A_1B_1C_1)$, el este perfect determinat.

2) Rotim vectorul $\overline{GB_1}$ în acelaş sens cu sensul triunghiului $(A_1B_1C_1)$ până în $\overline{GB_3}$ (în cazul figurii 15 acest sens este *negativ*, adică acelaş cu sensul lui $(A_1B_1C_1)$ iar pe $\overline{GC_1}$ în $\overline{GC_2}$.

Se obţine triunghiul $(A_1B_3C_2)$ care în baza proprietăţii (reciproca) este şi el echilateral, dar are sensul contrar ca $(A_1B_1C_1)$, (adică *pozitiv*, în acest caz).

Vârful λ al celuilalt triunghiu echilateral căutat, este chiar centrul de greutate al triunghiului $(A_1B_3C_2)$ şi cum $(\lambda\mu\gamma)$ este un triunghiu echilateral, de centru G şi de *orientare contrară* cu $(A_1B_1C_1)$ el este perfect determinat.

Observare importantă. Triunghiurile echilaterale $(A_1B_2C_3)$ $(A_1B_3C_2)$ definesc şi *mărimea* şi *poziţia* triunghiurilor $(\alpha\beta\gamma)$, $(\lambda\mu\gamma)$.

Intr'adevăr, am arătat [1]:

a) Triunghiul echilateral $(A_1B_2C_3)$ de centru de greutate α, este *egal şi paralel* cu triunghiul echilateral $(\lambda\mu\nu)$, orientările lor însă diferă.

b) Triunghiul echilateral $(A_1B_3C_2)$ de centru de greutate λ, este egal *şi paralel* cu triunghiul echilateral $(\alpha\beta\gamma)$, însă orientările lor diferă.

Rezultă de aci că odată construite triunghiurile echilaterale $(A_1B_2C_3)$, $(A_1B_3C_2)$, — *printr'o mişcare de translaţie a acestora până în* G, *obţinem: din* $\Delta(A_1B_2C_3)$ *de centru* α, *triunghiul* $(\lambda\mu\nu)$; *iar din* $\Delta(A_1B_3C_2)$ *de centru* λ, *triunghiul* $(\alpha\beta\gamma)$, *cu condiţiunea ca după translaţie să schimbăm sensurile tiunghiurilor translatate.*

In aceste translaţii, definite de vectorii $\alpha\overline{G}$ şi $\lambda\overline{G}$, punctul A_1 se corespunde respectiv cu vârfurile α şi λ.

In construcţiunea de mai sus a triunghiurilor $(\alpha\beta\gamma)$, (λ, μ, ν) vârful A_1 al triunghiului *oarecare* $A_1B_1C_1$ a jucat un rol special.

1) Vezi loc. cit.

La acelaş rezultat se ajunge dacă păstrăm fix vectorul $\overline{GB_1}$ (sau $\overline{GC_1}$) şi rotim în *sensuri contrare* în jurul lui G, vectorii $\overline{GC_1}$, $\overline{GA_1}$ sau vectorii $(\overline{GA_1}, \overline{GB_1})$.

Intr'adevăr cele şase triunghiuri *echilaterale* ce se obţin şi anume

$$(A_1 B_2 C_3)_\alpha, \ (A_1 B_2 C_3)_\lambda,$$
$$(B_1 C_2 A_3)_\beta, \ (B_1 C_3 A_2)_\mu$$
$$(C_1 A_2 B_3)_\gamma, \ (C_1 A_3 B_2)_\nu$$

cu centrele de greutate arătate prin indicii respectivi, se despart în două grupe: 1) triunghiurile depe prima coloană sunt: *a) egale, b)* au laturile două câte două *paralele, c)* centrele lor de greutate $\alpha\beta\gamma$ formează un triunghiu *echilateral*, egal cu precedentele, *d) orientarea* tuturor acestor patru triunghiuri este *aceeaşi* cu a triunghiului oarecare $A_1 B_1 C_1$ [1]) (fig. 16).

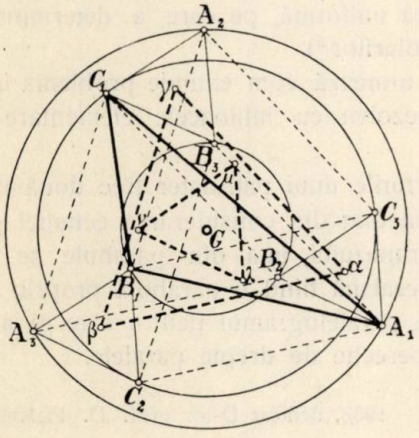


Fig. 16.

2) Triunghiurile depe coloana doua sunt: *a) egale b)* au laturile două câte două *paralele c)* centrele lor de greutate λ, μ, ν formează un triunghiu *echilateral* egal cu precedentele *d) orientarea* tuturor acestor patru triunghiuri este *contrară* cu aceia a a triunghiului oarecare $(A_1 B_1 C_1)$.

1) Aceste proprietăţi rezultă din faptul că triunghiul oarecare $(A_1 B_1 C_1)$ are centrul de greutate în G. (vezi loc. cit.).

Proprietățile stabilite mai sus, cât și acelea enunțate și demonstrate în studiul nostru mai sus amintit, relative la triunghiul echilateral, sunt succeptibile de a fi generalizate, pentru un poligon regulat oarecare.

Este interesant de reținut, că la aceste generalizări conduce însăși fenomenele electrice, a căror imagine geometrică este *triunghiul echilateral* sau *poligonul regulat cu n laturi.*

ERNEST ABASON.

PARAMETRUL PARABOLEI CIRCUMSCRISE UNUI TRAPEZ

1. In „Buletinul Matematic al Soc. Române de Științe“ [1]) D-l E. ABASON a calculat parametrul parabolei circumscrise unui trapez cu bazele în raportul 3, considerând acest parametru ca o funcțiune analitică uniformă, pe care a determinat-o cu ajutorul zerorilor și al polurilor [2]).

In cele ce urmează vom extinde problema la un trapez oarecare și o vom rezolva cu mijloacele elementare ale Geometriei Analitice.

2. Prin vârfurile unui patrulater trec două parabole, cum se poate constata imediat din considerarea ecuației generale a conicelor. In cazul trapezului, una din parabole se reduce la două drepte paralele, cealaltă fiind o parabolă propriu zisă. Unica excepție o prezintă paralelogramul pentru care și a doua parabolă se reduce la o pereche de drepte paralele.

1) Tomul 35 — 1933, dedicat D-lor prof. D. POMPEIU și G. ȚIȚEICA, pag. 5—10.

2) Problema a fost sugerată de o proprietate a parabolei — semnalată de D-l prof. POMPEIU — potrivit căreia, un lanț de trapeze convexe : ABCD, BCDE, etc., având bazele în raportul 3 = AD : BC = BE : CD = etc., se află înscris într'o parabolă.

Prin analogie, problema se pune și pentru un trapez oarecare, cu bazele în raportul k, fiindcă regretatul TR. LALESCU a dovedit (G. M. XXVII, No. 8, pag. 272—275) că un lanț analog de trapeze, având bazele succesiv în rapoartele alternate k și k'—legate prin relația $(k-1)(k'-1) = 4$, G. M. XLI, No. 6, problema 4633—este deasemenea înscris într'o parabolă. Parabola fiind definită prin oricare din trapeze, parametrul ei e o funcție de elementele acelui trapez

Excluzând această excepție să considerăm trapezul ABCD (fie BC baza mică) cu bazele în raportul: $AD/BC = k > 1$.

Fie M și N mijloacele bazelor BC și AD; ω intersecția diametrului MN cu parabola și notăm:

$$BC = 2a \quad \therefore \quad AD = 2ka \ , \ MN = b \ , \ \omega M = \lambda .$$

Luând ca axe de coordonate pe ωM (ωx) și tangenta în ω (ωy), ecuația parabolei circumscrise trapezului este de forma:

$$\alpha x^2 + \gamma y^2 + 2\delta x = 0 \quad (\alpha\gamma = 0)$$

fiindcă parabola trece prin origină și e simetrică față de ωx.

Inlăturăm ipoteza $\gamma = 0$, care duce la două drepte paralele și reținem $\alpha = 0$, în care caz ecuația ia forma:

$$(1) \qquad \gamma y + 2\delta x = 0 \quad \therefore \quad y^2 = 2mx$$

reprezentând o parabolă propriu zisă.

Cum punctele C (λ, a) și D ($\lambda + b$, ka) aparțin parabolei, trebue să avem:

$$(2) \qquad a^2 = 2m\lambda \ , \ k^2a^2 = 2m(\lambda + b)$$

de unde, prin scădere, obținem

$$(3) \quad a^2(k^2 - 1) = 2mb \quad \therefore \quad m\frac{(k^2-1)a^2}{2b} = \frac{k^2-1}{8} \cdot \frac{\overline{BC}^2}{MN} \ ^{3)}.$$

Pentru a calcula parametrul parabolei, trebue să raportăm ecuația la axa parabolei și la tangenta în vârf. In acest scop rotim pe ωy, în sens direct, de un unghiu convenabil φ, până ce ia poziția $\omega y' \perp \omega x$. Evident că φ e tocmai unghiul format de MN cu înălțimea ML a trapezului.

---

3) *Observare.* Divizând (2) cu (3) avem $\lambda = \frac{b}{k^2 - 1} = \frac{MN}{k^2 - 1}$, de unde rezultă o metodă imediată pentru construcția lui ω și a tangentei respective. Aceeași relație ne permite să înscriem, în orice parabolă, oricâte trapeze vrem cari să aibă bazele într'un raport dat k. Luăm în parabolă o coardă s. e. BC și ducem diametrul conjugat ei ωM. Cunoscând acum pe $\lambda = \omega M$, relația precedentă ne dă pe MN și deci putem construi pe N. In sfârșit, prin N ducem coarda AD $\parallel$ BC și obținem trapezul înscris ABCD, cu bazele în raportul k.

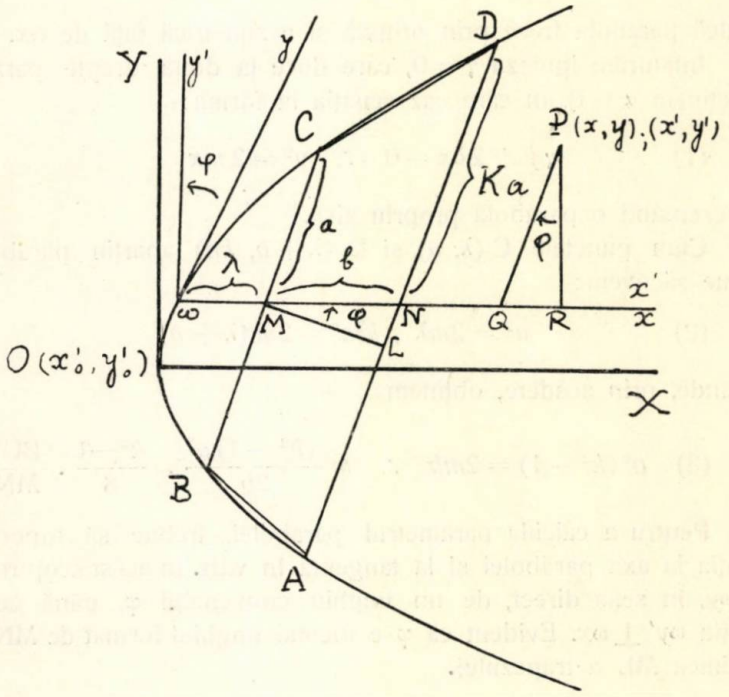
Notând (x, y) și (x', y') coordonatele curente ale unui punct oarecare P, față de sistemele de axe $x\omega y$, și $x'\omega y'$ este ușor de verificat pe figură că:

$$\overline{\omega R} = \overline{\omega Q} + \overline{QR} \quad \therefore \quad x' = x + y' \cdot \operatorname{tg}\varphi$$

$$\overline{RP} = \overline{QP} \cdot \cos\varphi \quad \therefore \quad y' = y \cdot \cos\varphi$$

de unde:

$$(4) \qquad x = x' - y' \cdot \operatorname{tg}\varphi \ , \ y = \frac{y'}{\cos\varphi} \ .$$



Introducând aceste valori în (1) obținem:

$$(5) \qquad \frac{y'^2}{\cos^2\varphi} = 2m\,(x' - y'\operatorname{tg}\varphi)$$

care este ecuația parabolei față de sistemul de axe $x'\omega y'$.

In sfârșit, facem o translație a axelor de coordonate $\omega x'$, $\omega y'$ până ce coincid cu axa OX a parabolei și cu tangenta în vârf OY.

Notând (x'_0 , y'_0) coordonatele lui O față de $x'\omega y'$ și (X, Y) coordonatele lui P față de XOY, avem:

$$(6) \qquad x' = X + x'_0 , \; y' = Y + y'_0 ;$$

iar ecuația (5) a parabolei devine:

$$(7) \quad (Y + y'_0)^2 = 2m \cos^2\varphi (X + x'_0) - 2m \sin\varphi \cos\varphi (Y + y'_0).$$

Această ecuație trebuind să fie de forma:

$$Y^2 = 2pX \; (p \text{ fiind parametrul parabolei})$$

rezultă că p este semicoeficientul lui X, adică $p = m\cos^2\varphi$, sau ținând seamă de (3):

$$p = \frac{k^2 - 1}{8} \cdot \frac{\overline{BC}^2}{MN} \cdot \cos^2\varphi \quad \therefore \quad p = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BC}^2}{8 \cdot MN} \cdot \cos^2\varphi.$$

Când trapezul e isoscel, $\varphi = 0$ și deci:

$$p = \frac{k^2 - 1}{8} \cdot \frac{\overline{BC}^2}{MN} = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BC}^2}{8 \cdot MM} .$$

Pentru trapezul parabolic, considerat de D-l ABASON, avem $k = AD : BC = 3$ și deci:

$$p = \frac{\overline{BC}^2}{MN} \cos^2\varphi ;$$

iar dacă trapezul e și isoscel, avem $\varphi = 0$, $p = \frac{\overline{BC}^2}{MN}$ [1].

3. *Observare.* Cu ajutorul ecuației (7) se pot calcula imediat coordonatele vârfului O al parabolei, față de sistemul inițial de axe $x\omega y$. In acea ecuație coeficientul lui Y și termenul liber trebuind să fie nuli, avem:

$$2y'_0 + 2m \sin\varphi . \cos\varphi = 0$$

$$y'^2_0 - 2m \cos^2\varphi . x'_0 + 2m \sin\varphi . \cos\varphi . y'_0 = 0.$$

1) D-l ABASON a notat cu AB baza mică.

Din prima ecuaţie deducem:

$$y'_0 = -m \sin\varphi . \cos\varphi$$

şi substituind în a doua, avem:

$$x'_0 = -\frac{1}{2} m \sin^2\varphi.$$

Ţinând apoi seama de formulele de transformare (4):

$$x_0 = x'_0 - y'_0 . \operatorname{tg}\varphi \ , \ y_0 = \frac{y'_0}{\cos\varphi},$$

obţinem:

$$x_0 = \frac{1}{2} m \sin^2\varphi \ , \ y_0 = -m \sin\varphi \ ;$$

sau, folosindu-ne de (3):

$$x_0 = \frac{1}{16} \cdot \frac{\overline{BC}^2}{MN} (k^2 - 1) \sin^2\varphi \ , \ y_0 = \frac{1}{8} \cdot \frac{\overline{BC}^2}{MN} (1 - k^2) \sin\varphi.$$

Ecuaţia tangentei în vârf este:

$$yy_0 = m(x + x_0)$$

$$\therefore \ x + y \sin\varphi + \frac{1}{16} \cdot \frac{\overline{BC}^2}{MN} (k^2 - 1) \sin^2\varphi = 0.$$

Când trapezul e isoscel, avem: $\varphi = 0$, $x_0 = y_0 = 0$, iar ecuaţia tangentei în vârf se reduce la $x = 0$ (axa ωy).

E. CARAMAN.

DESPRE ORIGINEA TEOREMEI LUI PITAGORA

Istoria desvoltării ştiinţelor matematice în antichitate, prezintă foarte multe lacune, deoarece documentele rămase sunt puţine şi necomplete, iar multe din ele încă nedescifrate. Dificultatea apare mai ales când se încearcă stabilirea unei stări comparative a nivelului pe care l-a atins ştiinţa matematică în diferitele civilizaţii de atunci, lucru destul de important fie pentru formarea unei vederi generale asupra unei epoci, fie pentru posibilitatea de a urmări influenţa ştiinţifică a unui centru asupra altuia.

In deosebi, în cazul descoperirilor atribuite lui PITAGORA, domneşte cea mai mare nesiguranţă, întrucât Pitagoricienii formau o societate închisă, membri ei, fiind legaţi prin jurământ, să nu destăinuiască nimănui nimic din cele ce au învăţat sau descoperit. Mai mult decât atât, date fiind principiile lor de viaţă în comun, ori şi ce descoperire era considerată ca un rezultat al tuturora, sau cel mult atribuită conducătorului, adică lui PITAGORA însuşi.

Prima lucrare asupra lui PITAGORA apare cam 100 de ani după moartea sa (—370), iar celelalte în intervale de câteva secole mai târziu, adică atunci când trecerea anilor atenuează cu încetul tradiţia, de a nu se desvălui descoperirile şcoalei. Insă aceste izvoare nefiind contimporane, este dată posibilitatea, ca atât viaţa cât şi descoperirile lui, să fie redate cu aureola unor înfăptuiri mai mult sau mai puţin legendare. Dealtfel numai aşa se explică şi contrazicerile care se ivesc prin confruntarea documentelor diferite, făcând astfel să continue starea de nesiguranţă faţă de încercarea de a atribui anumite descoperiri lui PITAGORA.

Totuşi în conformitate cu cele mai multe surse, istoria matematicelor consideră ca datorite lui PITAGORA teorema patratului ipotenuzei (care îi poartă numele) precum şi teoria numerelor iraţionale (algebrice) cu găsirea metodei geometrice de reprezentare a lor Aici, intervine însă una din marile contraziceri, căci o teorie a numerelor iraţionale de forma $\sqrt{a^2 + b^2}$ implică cunoaşterea prealabilă a teoremei despre patratul ipotenuzei. Dacă admitem, după cum de altfel susţin şi cele mai serioase documente, că PITAGORA ar fi iniţiatorul metodei geometrice de reprezentare a numerelor iraţionale, atunci rezultă că el a cunoscut dinainte teorema care îi poartă numele. Dar atunci se impune întrebarea, care e originea cea mai probabilă a acestei teoreme?

Din texte studiate ulterior (1901) s'a aflat că teorema patratului ipotenuzei, a fost cunoscută în India încă din veacul al 8-lea în. Cr. şi, din unele coincidenţe de exprimare ar rezulta o influenţă remarcabilă a şcoalei indiene asupra lui PITAGORA. Această influenţă este cu totul neexplicabilă, deoarece nu-i dată nici o posibilitate a unei iniţieri a lui, sau a vreunuia din elevii săi, tocmai la această şcoală.

Clarificarea acestei chestiuni a fost realizată în ultimii ani de către NEUGEBAUER, datorită descifrării unui text de origine

babiloneană care datează cam din secolul al XX în. Cr. In acest document se propune o metodă practică pentru calcularea diagonalei unui dreptunghiu, care se poate rezuma prin formula:

$$c = a + \frac{b^2}{2a} \qquad (1)$$

(notând diagonala cu c şi cele două laturi cu a şi b).

Existenţa unei astfel de formule implică o stare progresată a ştiinţelor matematice în Babilon, la acea epocă, fapt care este în concordanţă, pe de o parte cu istoria culturei — care confirmă starea înfloritoare de atunci — şi pe de altă parte cu faptul că s'au mai descoperit şi alte texte cu caracter matematic care datează încă din veacul al XXIV în. Cr.

Faptul, că majoritatea inscripţiilor de origine babiloneană, sunt formate din tabele care dau, fie produsul diferitelor numere, fie rădăcina patrată sau cubică a lor, sau se referă la măsurări de teren, a făcut să se creadă că ştiinţa matematică a Babilonului ar fi fost mai mult empirică.

Prin descoperirea documentului citat suntem conduşi la cu totul alte concluzii şi anume:

Se ştie că valorile rădăcinilor patrate a numerelor care se întabulau, erau calculate după următoarea formulă:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a} \qquad (2)$$

(formulă care de altfel era cunoscută de toată antichitatea fără a i se putea preciza originea), unde a este cel mai mare patrat conţinut în A, iar b diferenţa dintre A şi acesta ($b = A - a^2$).

Acum, deoarece e vorba de calculat diagonala unui dreptunghiu, dacă am presupune cunoscută relaţia $c^2 = a^2 + b^2$ rezultă după (2)

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = a + \frac{b^2}{2a}$$

adică tocmai formula (1) propusă în scrierea citată.

Prin urmare, trebue să admitem că teorema despre patratul ipotenuzei, a fost cunoscută în Babilon încă din secolul al XX-lea în. d. Ch., unde i s'a dat şi o imediată aplicare practică. Dealtfel numai o cultură matematică solidă, trebue să-i fi făcut ca pornind

dela chestiuni de natură teoretică, să stabilească formule aproximative absolut necesare uzului practic sau tabele sistematizate pentru acelaş scop.

Luând în considerare şi legătura strânsă care a existat între cultura babiloneană şi cea indiană (după cum susţin istoricii) ajungem la concluzia că teorema patratului ipotenuzei a fost transmisă din Babilon în India. Cât despre iniţiarea lui PITAGORA în ştiinţa babiloniană nu încape nici o îndoială, deoarece se ştie că PITAGORA a stat mai mulţi ani în Babilon înainte de a-şi forma şcoala sa.

Aşa dar, e probabil ca PITAGORA să fi cunoscut teorema,— care i se atribue, — în Babilon şi apoi sub inspiraţia ei, să fi descoperit metoda geometrică a reprezentării numerelor iraţionale *).

Prof. FL. CÂMPAN
Cernăuţi.

PREMIUL „INGINER AL. ROŞU“

Domnul AL. A. ROŞU a donat şi în anul acesta suma de lei 500 pentru a se acorda în memoria tatălui său, INGINER AL. ROŞU fost membru al *Gazetei Matematice* decedat la 17 Aprilie 1917 un premiu pentru activitatea cea mai rodnică în domeniul geometriei elementare, avută de către abonaţii elevi de liceu, studenţi ai Facultăţilor, elevi ai Şcoalelor Politehnice şi militare din ţară, în cursul volumului XLII.

Activitatea va consta din articole, note şi probleme originale de geometrie elementară.

In cazul când condiţiunile impuse nu vor fi îndeplinite, premiul «INGINER AL. ROŞU» se va acorda celui mai harnic corespondent al Gazetei, elev de liceu.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL „ING. AL. ROŞU“
ING. D. A. STAN, GH. D. SIMIONESCU
şi AL. A. ROŞU.

*) Literatura:

1. M. CANTOR: Geschichte der Mathematik (I).
2. W. ROUSSE-BALL: Histoire des mathématiques (I).
3. O. NEUGEBAUER: Zur Geschichte des Pythag. Lehrsatz. (Nachrichten Ges. Wiss. Gött. 1928 I. 45).

NOTE MATEMATICE

36. *Acum o sută de ani în lumea matematică.* Date culese în biblioteca Seminarului Matematic din Iaşi din publicaţiile timpului.

Anul 1837 nu se deosebeşte prea mult de anul 1836 în ceeace priveşte preocupările matematice.

Evenimentele mai importante ale anului sunt: Memoriul lui LOBATCHEWSKI. „*Geometrie Imaginaire*“ şi cartea lui CHARLES. „Aperçu Historique sur le développement de la géométrie“. Despre această vom mai vorbi.

Memoriul lui LOBATCHEWSKI nu face totuşi parte din preocupările vremii. Interesul pentru geometrie neeuclidiană se va răspândi mai târziu.

Matematicienii mai cunoscuţi cari lucrează în acea vreme sunt: ARAGO, PONCELET, POINSOT, POISSON, CAUCHY, DUPIN STURM, LIOUVILLE, CHASLES, JACOBI, KUMMER, LEJEUNE-DIRICHLET, LOBATCHEWSCKI, PLÜCKER, MÖBIUS, STEINER, HILL. GAUSS se ocupă cu fizica (Teoria Magnetismului).

Chestiunile mai importante care se lucrează sunt:

Rezolvarea ecuaţiilor algebrice (CAUCHY, PLÜCKER, STURM); Ecuaţii diferenţiale (probleme la limită, desvoltarea în serie de funcţiuni) (LIOUVILLE, STURM, POISSON); Ecuaţii cu derivate parţiale şi calculul variaţiilor (POISSON, JACOBI); Geometrie (CHASLES, LOBATCHEWSKI, PLÜCKER). Mecanică cerească (ARAGO, HILL, POISSON, LIOUVILLE).

37. *Numere interesante cu 10 cifre diferite* [1]). In condiţiunile problemei enunţate la pagina 247 din acest an, ecuaţiunea

$$N = p \times N_p \tag{1}$$

nu are soluţiuni de cât pentru

$$p = 3,\ 6 \text{ sau } 9.$$

Nu am găsit o formă generală a numerelor N şi N_p.

Numeroasele soluţiuni ale ecuaţiunei (1) le-am căutat prin încercări, fără a garanta că nu-mi va fi scăpat nici o soluţiune.

1) Urmare la Nota din pag. 247.

Iată calea acestor încercări. Fie

$$N_p = a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i$$

şi $p = 3$. Dau lui hi pe rând valorile 10, 20, ... 80, 01, 21, ... 08, 18, ... 78. Fie de exemplu

$$hi = 14.$$

Produsul 3×14 se termină cu 42, deci este acceptabil pentru ultimele 2 cifre $h'i'$ ale lui N. Caut acum cifra g aşa în cât

$$3 \times g14 = \ldots g'42$$

unde g' este diferit şi de 2 şi de 4. Pentru aceasta pot da lui g valorile 0, 2, 5, 6, 7, valoarea 8 nefiind acceptabilă căci $3 \times 8 = 24$. Pentru fie care valoare a lui g determin valorile lui f pentru care

$$3 \times \ldots fg14 = \ldots f'g'42$$

unde f' este diferit de fie care din cifrele g', 4, 2. Şi aşa mai departe. Calea este foarte lungă, dar în cursul calculelor se găsesc simplificări şi dispoziţii de calcule, care reduc numărul încercărilor.

In numerele viitoare voiu publica tablourile soluţiunilor găsite pe această cale.

G-L GH. BUICLIU.

38. *Asupra problemei 2889.* In *Gazeta Matematică* (vol. 40, 1935, p. 311), s'a rezolvat analitic problema 2889, iar soluţia geometrică a fost dată de D-l GENERAL GH. I. POPESCU (vol. 41, 1935, p. 127). In cele ce urmează voiu arăta că ecuaţia

$$b\,u^4 - 2\,[a\,k^2 - r\,(1 + k^2)]\,u^3 - 2\,[a\,k^2 + r(1 + k^2)]\,u - b = 0$$

poate să aibă şi patru rădăcini reale, nu nunai două.

Pentru aceasta să însemnăm $p = \dfrac{a\,k^2}{b}$, $q = \dfrac{r(1 + k^2)}{b}$.

Ecuaţia devine

$$u^4 - 2\,(p - q)\,u^3 - 2\,(p + q)\,u - 1 = 0.$$

Numărul rădăcinilor reale ale ei este acelaşi cu numărul, rădăcinilor reale ale ecuaţiei cu rădăcini inverse.

$$u^4 + 2\,(p + q)\,u^3 + 2\,(p - q)\,u - 1 = 0.$$

Să construim (Fig. 1) curba

$$v = u^4 + 2(p+q)u^3 - 1.$$

In punctul B de coordonate $-(p+q)$, $-(p+q)^4 - 1$ este inflexiune. Tangenta în B la curbă taie axa Ov în punctul M de coordonate 0, $(p+q)^4 - 1$. Avem mai multe cazuri de considerat.

1^0. $p - q > 0$. In acest caz se vede că dreapta

$v = -2(p-q)u$ taie curba numai în două puncte.

2^0. $p - q < 0$. Acest caz îl vom subdivide, după cum punctul M este dedesuptul sau deasupra axei Ou.

1) $p - q < 0$, $(p+q)^4 - 1 < 0$, sau

$p - q < 0$, $p + q < 1$.

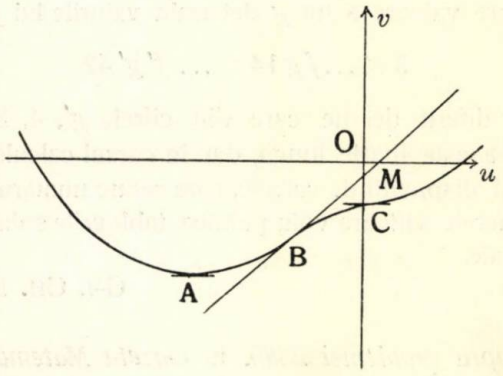


Fig. 1.

Se vede (Fig. 1) că orice dreaptă ce trece prin origine, taie în acest caz curba numai în două puncte. Deci şi dreapta $v = -2(p-q)u$, o taie numai în două puncte.

2) $p - q < 0$, $p + q > 1$. Punctul M e deasupra axei Ou (Fig. 2). In acest caz se vede că prin origine se pot duce două tangente la curbă, una cu punctul de contact P între A şi B, alta cu punctul de contact N între B şi C. Fie m_1 şi m_2 coeficienţii unghiulari ai celor două tangente. Orice dreaptă ce trece prin origine şi are coeficientul unghiular cuprins între m_1 şi m_2, taie curba în patru puncte. Prin urmare, dacă avem

$$p + q > 1 \quad \text{şi} \quad m_1 \leqslant -2(p-q) \leqslant m_2,$$

dreapta $v = -2(p-q)u$ taie curba în 4 puncte.

N'am mai pus $p - q < 0$, căci aceasta intră în ultima inegalitate, m_1 şi m_2 fiind pozitivi. In toate celelalte cazuri avem numai două puncte de intersecţie.

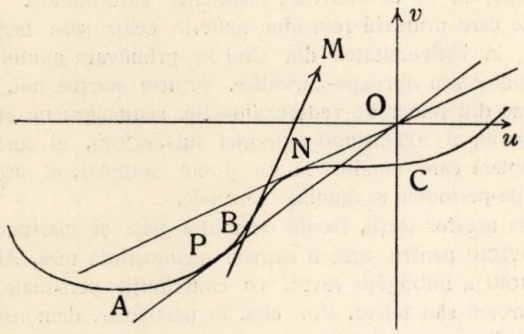


Fig. 2.

Prin urmare ecuaţia dată poate să aibă şi 4 răd. reale.

SILAŞ GEORGE
Student Cluj.

39. *Asupra problemelor 3275 şi 3394.* Atât problema 3275 propusă de D-l ATH. RADEF cât şi problema 3394 propusă de D-l ION C. VASILIU sunt două cazuri particulare ale teoremelor demonstrate de D-l N. G. BOTEA în articolele asupra unor puncte colineare publicate de D-sa în „*Foaia Matematică*“, Anul I, Nr. 7 şi anul III, Nr. 10.

TH. G. COCEA.

BIBLIOGRAFIE

PAUL MONTEL. *Lecţiuni despre funcţiunile quasi-periodice.* Redactate de TIBERIU POPOVICIU. Cluj 1937.

Prin îngrijirea D-lui P. SERGESCU, Profesor la Facultatea de Ştiinţe a Universităţii din Cluj, profesorii dela Secţiunea de matematică dela acea Facultate au început publicarea unor **„Monografii Matematice“**. Fascicola aci menţionată formează prima broşură scoasă în această colecţiune. Pentru a se vedea ce se urmăreşte prin aceste publicaţii reproducem în întregime prefaţa scrisă de D-l PAUL MONTEL:

„Fascicola prezentă este prima din o colecţie de Monografii Matematice care se va publica prin îngrijirea Secţiei de Matematică a Universităţii din Cluj. Rostul ei este de a face cunoscut publicului matematic român, teorii care nu sunt încă trecute în tratatele obişnuite de învăţământ fiind pe de o parte în formaţie, iar pe de alta încă insuficient aprofundate.

„Paginile care urmează reproduc materia celor şase lecţii ce am avut onoarea să fac la Universitatea din Cluj în primăvara anului 1935, asupra funcţiilor periodice sau aproape-periodice. Printre părţile noi, şi care nu au fost încă expuse din punct de vedere didactic, semnalez: un studiu al periodicităţii în general, al extensiunii teoremei lui JACOBI, al curbelor de nedeterminare completă care conduc la un punct singular, al legăturilor dintre funcţiile aproape-periodice şi familiile normale.

„Redacţia acestor lecţii, făcută cu multă grije şi claritate, se datoreşte D-lui T. POPOVICIU pentru care îi exprim recunoştinţa mea. Afară de aceasta D-l T. POPOVICIU a îmbogăţit textul cu contribuţii personale care dovedesc tânărul şi vigurosul său talent. Voi cita, în particular, demonstraţia sa generală a extensiunii teoremii lui JACOBI asupra imposibilităţii existenţei unei funcţii analitice având trei perioade independente, precum şi procedeul de determinare a dreptelor de nedeterminare complectă ale funcţiunilor eliptice. Cea mai bună recompensă pentru cei care iubesc ştiinţa, este de a vedea tineri cercetători aducând contribuţia lor aşa de repede.

„Aceasta este proba că prezenta colecţie va aduce servicii. Ea este o nouă şi fericită iniţiativă a apostolatului matematic căruia D-l P. SERGESCU s'a consacrat cu toată abnegaţia.

„Ii doresc o repede desvoltare şi deplin succes".

(ss) P. MONTEL.

Broşura de 72 pagini cuprinde: Lecţia I. Despre periodicitate şi despre funcţii periodice în general. Lecţia II. Despre funcţiile eliptice. Lecţia III. Teorema de adiţie. Lecţia IV. Definiţia funcţiilor aproape-periodice. Lecţia V. Proprietăţile funcţiilor aproape-periodice. Lecţia VI. Teoremele fundamentale ale teorii funcţiilor aproape-periodice. La fine este un rezumat în limba franceză, al conţinutului broşurii.

Broşura se poate procura dela Seminarul matematic al Facultăţii de ştiinţe din Cluj pe preţul de 75 lei.

I. I.

Societatea Română de Ştiinţe. Buletinul Şedinţelor. Anul I. Nr. 3. Sfârşit de an, de V. VÂLCOVICI. Matematica în anul 1936, de M. NICULESCU. Activitatea Secţiunii matematice.

VICTOR MARIAN. *Les points de Curie ferromagnétiques et la saturation absolue de quelques alliages de nickel.* Paris 1937. (Teză susţinută la Universitatea din Strasbourg pentru a obţine gradul de Doctor în Ştiinţele fizice).

VICTOR MARIAN. *Descartes einfluss in Transsylvanien (Siebenbürgen) im XVIII Jahrhundert.* Cluj.

VICTOR MARIAN. *Pravila comerţială dela 1837.* Braşov 1937. Extras din „*Ţara Bârsei*".

Sunt 100 de ani de când a apărut la Braşov în tipografia *Johann Gött* o carte cu titlul de mai sus, care e de fapt o *Aritmetică comercială.* Autorul ei, EMANOIL IOAN NICHIFOR, spune că este întâia dată tălmăcită după cea germanicească cu cheltuiala lui GEORGIE NICA, Inspectorul Şcoalei Comerţiale a Capelii româneşti din Cetatea Braşovului. Ultimele două părţi ale cărţii se ocupă cu „*socotirea Cametilor, Năemurilor (Arenzilor), Chiriilor, şi altor Lucruri de Folos, prin Regula de Tri precum şi cu regula Soţietăţii a Tovărăşiei*", traduse în parte după *Anleitung zum Rechnen,* apărută la Buda dela 1780 în mai multe ediţii. Cartea se încheie cu următorul sfat dat negustorilor:

„*Iară Datoria cea mai perfectă şi cea mai strajnică a Neguţătorului, este să nu înşele (înceluiască) adecă orice Marfă va vinde să fie curată şi neamestecată, şi să ţie* **Cumpene** *şi* **Măsuri** *drepte, şi să să mulţumească cu cât Câştig îi vor da vremile*".

Broşura este interesantă pentru istoricul desvoltării ştiinţelor matematice la noi în ţară şi felicităm pe colaboratorul nostru, D-l V. MARIAN, pentru munca pe care o depune în această direcţiune.

I. IONESCU.

G. ZAPAN. Formula Socială. *(Extras din Arhiva pentru Ştiinţa şi Reforma Socială, XIV; II).* Institutul Social Român. Bucureşti. 1936.

Mathesis. Vol. LI. No. 1. Ianuarie 1937. Bruxelles. Asupra unei teoreme de aritmetică, de V. THÉBAULT. Notă asupra unei demonstraţii antice a unei teoreme de loc geometric, de PAUL VER EECKE. Asupra afinităţii complexe şi asupra transformării prin inversiune a coordonatelor, de R. GOORMAGHTICH. Asupra legii binomiale a probabilităţii, de C. LURQUIN. Asupra geometriei triunghiului, de F. BACKES. Asupra reprezentării prin metoda lui MONGE a icosaedrului regulat, de GINO LORIA. Liniile asimptotice şi ecuaţia diferenţială omogenă, de R. GODEAU. Asupra unei proprietăţi remarcabile a cercului cubic drept, de J. KRAMES. Asupra geometriei numerelor complexe, de R. DEAUX. Asupra ansamblului colineaţiunilor ce păstrează o cuadrică, de P. LIBOIS. Asupra unei proprietăţi a integralei lu CAUCHY a ecuaţiei diferenţiale normale de ordinul întâi, de M. LEBRUN. Proprietăţile triunghiurilor deduse din considerarea formelor proiective de primul şi al doilea grad, de J. LEEMANS. Invarianţii funcţiunilor lineare vectoriale, de AD. M. Asupra sferelor lui EULER ale tetraedrelor ortocentrice, de V. THÉBAULT. Asupra şirului numerelor prime, de M. PAUL. Asupra unui invariant a trei sisteme de vectori, de R. DEAUX. Curiozităţi aritmetice, de V. THÉBAULT. Asupra unor suprafeţe a căror linii asimptotice se determină prin cuadraturi, de R. GODEAU şi D. MITRINOVITCH. Asupra punctelor inverse şi triunghiurilor podare, de R. GOORMAGHTICH. Asupra geometriei tetraedrului, de PAUL DELENS. Supliment: Asupra unei clase de planuri cuadruple, de P. LIBOIS.

Pitagora. Anul II. No. 5. Februarie 1937. Craiova. Despre unităţile de măsură a unghiurilor, de P. BOLDESCU. O problemă de bacalaureat, de P. B.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVII. No. 1. 15 Martie 1937. Propoziţii deduse prin inversiune, de N. N. MIHĂILEANU.

Sphinx. Anul VII. No. 4. Aprilie 1937. Bruxelles.

Ştiinţă şi Progres. Anul III. No. 10. Martie 1937. Tg.-Mureş.

The Mathematical Gazette. Vol. XXI. No. 240. Octombre 1936. London. — Invăţarea locurilor geometrice în geometria elementară pentru certificatul şcolar, de C. V. DURELL. Calculul fracţional, de W. FABIAN. Dodecahedronul rombic pentru tineret, de W. HOPE-JONES. Funcţiunile exponenţiale şi logaritmice, de R. COOPER. O teoremă de Wakeford şi extensiunile ei la hiperspaţiu, de H. LOB.

Idem. Vol. XXI. No. 241. Decembrie 1936. London. Problema probabilităţii lui Eddington, de H. W. CHAPMAN. Problema lui A, B, C, D, de H. S. LEFTWICH. Asupra unor curbe înrudite, de C. E. WEATHERBURN. O generalizare a teoremei lui PTOLEMEU, de L. M. MILNE-THOMSON. Invăţarea indicilor şi logaritmilor, de E. V. SMITH. Analogia sferică a forţelor centrale, de J. S. TURNER. O metodă a împărţirii lungi prin divizori mici, de A. A. FLETCHER-JONES.

Idem. Vol. XXI. No. 242. Februarie 1937. London. Proba indirectă în geometrie, de J. G. LEADBEATER. Impărţirea cuburilor, de A. RUSSELL şi C. E. GWYTHER. Puterile neasociate şi ecuaţia funcţională, de I. M. H. ETHERINGTON. Asupra unor transformări în spaţiile euclidiene, de E. A. MAXWELL.

Gazeta Matematică. Supliment cu Exerciţii. Anul III. No. 6. 1 Martie 1937. Bucureşti.

Idem. Anul III. No. 7. 1 Aprilie 1937. Bucureşti.

Sur une conoïde cubique, de LADISLAV SEIFERT. Publicaţiile Facultăţii de Ştiinţe ale Universităţii Masaryk. 1936. Brno.

Dynamická Metoda pro Měření gravitačního Pole Zemského, de JOSEF ZAHRADNÍČEK. **Měření Koeficientú Spřažení při Kyvech Torsních Kyvadel Spřažených Výchylkou,** de RŮŽENA KOŤOVÁ. Publicaţiile Facultăţii de Ştiinţe ale Universităţii Masaryk. 1935. Brno.

Akustická Měření na Píšťalách Metodou Interferenční, de TADEÁŠ GAJDOŠ. **Měření na Yazýčkových Píšťalách,** de JOSEF ŽÁK. Publicaţiile Facultăţii de Ştiinţe ale Universităţii Masaryk. 1935. Brno.

G. ZAPAN.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Vol. CXIII. Fasc. II. Februarie 1937. Buenos Aires. Fundamentele matematice ale muzicei (urmare) de A. E. SAGASTUME BERRA.

Boletin Matematico. Anul IX. No. 10. Decembrie 1936. Buenos Aires. Discuţia teoremei fundamentale a deplasării unei figuri plane în planul său, de B. I. BAIDAFF.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XLII. No. 12. Decembrie 1936. Menasha, Wisconsin. Problema lui WARING şi generalizarea ei, de L. E. DICKSON. Notă asupra urmărilor divizibilităţii, de MORGAN WARD. Un loc simplificat al postulatelor pentru un grup, de R. M. FOSTER. Asupra generării funcţiilor C_{pq} şi N_p ale lui LUKASIEWICZ şi TARSKI, de J. C. C. MCKINSEY. Observaţii asupra teoremelor principiului inducţiunii şi existenţei relative, de HENRY BLUMBERG. Notă asupra unei algebre asociative distributive în care legea comutativă a adunării nu este pătrată, de H. S. VANDIVER. Notă asupra formulelor pentru numărul reprezentărilor unui intreg ca o sumă a $2h$ suprafeţe, de R. D. JAMES. Asupra derivatelor superioare ale polinoamelor ortogonale, de H. L. KRALL. Asupra invariantelor aritmetice a formelor binare cubice şi binare triliniare, de RUFUS OLDENBURGER. O notă asupra gradului aproximaţiei polinomiale, de J. H. CURTISS. Continuitatea în grupurile topologice, de DEANE MONTGOMERY. Grupuri simple isomorfice, de GARRETT BIRKHOFF. Caracteristicile transformărilor birationale în S_r, de B. C. WONG. O teoremă mixtă pentru sistemul mecanic neconservativ, de A. H. COPELAND. Polinoamele lui JACOBI generalizate, de D. N. SEN şi V. RANGACHARIAR. Notă asupra existenţei derivatei a n-a definită printr'o singură limită, de NORMAN MILLER. O parametrizare specială a curbelor, de MARSTON MORSE. O teoremă pentru polinoame şi polinoame armonice, de J. L. WALSH. Asupra consecinţelor integralelor nedefinite, de M. K. GOWURIN. Pânza cuadricelor, de T. R. HOLLCROFT.

Idem. Vol XLIII. No. 1. Partea I. Ianuarie 1937. Menasha, Wisconsin.

Idem. Vol. XLIII. No. 1. Partea II. Ianuarie 1937. Menasha, Wisconsin. Lista anuală a lucrărilor publicate. Indexul volumului XLII.

Idem. Vol. XLIII. No. 2. Februarie 1937. Menasha, Wisconsin. Astrele model, de HENRY NORRIS RUSSELL. Divizorii seriilor de ordinul al doilea, de MARSHALL HALL. Notă asupra unui grup de postulate de HERBERT BOGGS şi G. Y. RAINICH. Asupra sumabilităţii seriei lui FOURIER, de W. C. RANDELS. Curbe aparţinând vârfurilor complexurilor lineare drepte în S_4, de C. R. WYLIE, JR. Produsele transformărilor lui NÖRLUND, de L. L. SILVERMAN. O condiţie în forma invariantă pentru o reţea fără detururi, de ROBIN ROBINSON. Indici în câmpurile cubice, de MARSHALL HALL. Asupra unor funcţiuni aritmetice a câtorva argumente, de LEONARD CARLITZ. Asupra expresiunii unei funcţiuni analitice şi a unor puncte distincte, de P. W. KETCHUM. Dualism în grupele abeliene, de REINHOLD BAER. Derivata areolară şi potenţialele

generalizate în mecanica mediilor continui, de N. THEODORESCU. Funcţiuni de distanţe şi problema metrizării, de A. H. FRINK. O transformare involutorială lineară determinată de o congruenţă a curbelor de două ori cubice, de J. M. CLARKSON.

Časopis pro Pěstováni Matematiky a Fysiky. Anul 66. Fasc. I. 1936/37. Praha. Asupra unor puncte ale elipsoidului multidimensional (urmare), de ARNOLD WALFISZ. Regularitatea lui P şi o teoremă a dualităţii lui ČECH, de SHAUN WYLIE. Formulele cuadraturii apropiate ale d-lui K. PETR, de VÁCLAV HRUŠKA. Funcţiunile simplu discontinue, de BOHUŠ JUREK. Asupra unei nomograme simple pentru determinarea rădăcinilor reale ale ecuaţiilor algebrice de trei termeni, de ALEXANDER FISCHER. Asupra problemei interpolării în cercul unic al funcţiunilor regulate, de ERNST LAMMEL.

Journal de Mathématiques Elémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 61. No. 11. 1 Martie 1937. Paris.

Idem. Anul 61. No. 12. 15 Martie 1937. Paris.

CERERI

265. *Studiul* matematicii se începe încă din clasele primare. Printre membrii Societăţii *Gazeta Matematică* şi colaboratorii Revistei acesteia este cineva care ar dori să se intereseze de *Învăţământul matematic* în Şcoala Primară ? Ce anume probleme l'ar interesa: programe, chestiuni pedagogice, chestiuni didactice, etc. ?.

CONS. SĂNDULACHE.
(Băseşti, Bacău).

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

KARL DOEHLEMANN. Geometrische Transformationen. Erster Teil: Die projektiven Transformationen nebst Ihren Anwendungen. I. Teil. Lipsca 1902.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

CRISTOFORO ALASIA. Un antico problema di Geometria piana. Palermo 1904.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2187. *Să se rezolve ecuația:*

$$x^4 + px^3 + 47x^2 - 72x + q = 0,$$

știind că trei rădăcini sunt în progresie aritmetică, iar a patra este egală cu suma primelor trei.

E. OTTULESCU.

Soluția. Fie: $\alpha - \beta$, $\alpha, \alpha + \beta$ și deci 3α cele patru rădăcini ale ecuației propuse. Ținând seamă de forma acestor rădăcini, relațiile dintre coeficienți și rădăcini devin

$$(1)\quad 6\alpha = -p,\ 12\alpha^2 - \beta^2 = 47,\ 10\alpha^3 - 4\alpha\beta^2 = 72,\ 3\alpha^2(\alpha^2 - \beta^2) = q.$$

Din relația a doua scoatem

$$\beta^2 = 12\alpha^2 - 47,$$

valoare care introdusă în a treia relație ne dă

$$19\alpha^3 - 94\alpha + 36 = 0.$$

Această ecuație ne dă valorile

$$\alpha = 2\ ,\ \alpha = 1 \pm \sqrt{\frac{37}{19}},$$

și deci pentru β:

$$\beta = \pm 1\ ,\ \beta = \pm \sqrt{-\frac{221}{19} \pm 24\sqrt{\frac{37}{19}}}\ .$$

Ecuația dată poate admite următoarele trei serii de soluții

3, 2, 1, 6.

$$1 \pm \sqrt{\frac{37}{19}} + \sqrt{-\frac{221}{19} \pm 24\sqrt{\frac{37}{19}}},\quad 1 \pm \sqrt{\frac{37}{19}},$$

$$1 \pm \sqrt{\frac{37}{19}} - \sqrt{-\frac{221}{19} \pm 24\sqrt{\frac{37}{19}}},\quad 3\left(1 \pm \sqrt{\frac{37}{19}}\right),$$

semnele corespunzând peste tot.

Observare. Odată problema rezolvată, se pot determina şi valorile lui p şi q. Pentru aceasta introducem valorile găsite ale lui α şi β în prima şi ultima relaţie din (1). Găsim corespunzător

$$p = -12 \quad , \quad q = 36$$

$$p = -6\left(1 \pm \sqrt{\frac{37}{19}}\right), \quad q = \frac{6}{19}\left(-\frac{7710}{19} \mp 339\sqrt{\frac{37}{19}}\right).$$

Observaţii. 1°. In enunţul problemei, aşa cum a fost publicat în Vol. XX pag. 160, se strecurase o greşală de tipar imprimându-se în loc de litera q, cifra 9. Probabil că aceasta a fost cauza că această problemă elementară n'a fost rezolvată până în prezent.

2°. S'a primit o soluţie de la D-l G. G. CONSTANTINESCU, analoagă celei de mai sus, dar conţinând greşeli de calcul.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 2398. *Să se afle condiţiunile ca ecuaţia:*

$$(a+b-ab)x^4+(b-a+ab)x^3+(a-b+ab)x^2+a+b+ab=0,$$

să admită o rădăcină triplă şi în acest caz să se rezolve.

V. CEAUŞOGLU.

Observăm dela început că parametrii a şi b nu pot fi simultan nuli, căci în acest caz ecuaţiunea dată dispare. In al doilea rând să presupunem că rădăcina triplă este nulă. Avem în acest caz condiţiunile necesare şi suficiente:

$$a-b+ab=0 \quad \text{şi} \quad a+b+ab=0; \tag{1}$$

dar condiţiunile (1) scăzute una din alta dau $b=0$ şi în acest caz avem şi $a=0$, în care caz, cum am văzut, ecuaţiunea dată nu există. Aşa dar, ecuaţiunea dată nu poate avea o soluţiune triplă nulă.

Ecuaţiunea dată având o rădăcină triplă, această rădăcină este o rădăcină dublă a ecuaţiunii derivate. Dar ecuaţiunea derivată a unei ecuaţiuni de forma:

$$mx^4+nx^3+px^2+r=0 \tag{2}$$

are forma:

$$x(4mx^2+3nx+2p)=0, \tag{3}$$

deci cum rădăcina triplă a ecuaţiunii (2) este diferită de zero, ea trebue să fie *rădăcină dublă* a ecuaţiunii:

$$4mx^2+3nx+2p=0. \tag{4}$$

Pentru ca ecuaţiunea (4) să aibă o rădăcină dublă, este necesar şi suficient să avem condiţiunea:

$$9n^2 - 32mp = 0 \qquad (5)$$

şi în acest caz, rădăcina triplă a ecuaţiunii (2) trebue să fie:

$$x = -\frac{3n}{8m}, \qquad (6)$$

adică trebue să mai avem condiţiunea, pe care o obţinem scriind că valoarea lui x din (6) satisface ecuaţiunea dată (2). Această condiţiune transformată ţinând seamă de (5) se poate pune sub forma:

$$32^2 . m^2 (p^2 + 12mr) = 0 \qquad (7')$$

şi cum m este diferit de zero, trebue să avem:

$$p^2 + 12mr = 0. \qquad (7)$$

Prin urmare, condiţiunile ca ecuaţiunea dată în enunţ să aibă o rădăcină triplă sunt:

$$9n^2 - 32mp = 0 \quad \text{şi} \quad p^2 + 12mr = 0 \qquad (8)$$

unde:

$m = a + b - ab$, $n = b - a + ab$, $p = a - b + ab$, $r = a + b + ab$,

iar rădăcinile ecuaţiunii sunt:

$$x_{1,2,3} = -\frac{3n}{8m}, \quad x_4 = \frac{n}{8m}.$$

Observare. Domnul MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila) a rezolvat foarte bine problema, servindu-se de relaţiunile dintre rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiunii date. Problema a fost rezolvată, în anul propunerii ei şi cei următori, de mulţi din corespondenţii G. M. din acel timp.

O soluţiune foarte bună, cu ajutorul derivatelor parţiale, a fost dată de Domnul ION C. VASILIU (elev inginer).

O. N. Ţ.

PROBLEMA 2780. *O şosea lată de 8 m, are o cotitură cu raza de 80 m fără supralărgire, pe o lungime de 83,78 m, măsuraţi pe ax şi cuprinsă între două aliniamente.*

Pe această şosea, trece un automobil, a cărui greutate este de 1,3 tone şi al cărui centru de greutate este la 0,8 m deasupra terenului; roţile din faţă, ca şi cele din spate, sunt depărtate între ele cu 1,50 m din ax în ax.

Se cere viteza maximă cu care automobilul poate trece prin această curbă, fără alunecare sau răsturnare, ştiind că pe timp uscat, coeficientul de frecare între bandajul roţilor şi teren este 0,38, iar pe noroiu 0,15.

GEORGE BORNEANU.

Ducând axa şoselei, între punctele A şi B, cele 2 porţiuni rectilinii se racordează cu un arc de cerc ACB. Unghiul normalelor la acest cerc, fiind notat cu 2α, rezultă în radiani

$$2\alpha = \frac{83{,}78}{80} = 1{,}04725$$

sau, în grade

$$2\alpha = 60^0.$$

Centrul de greutate al automobilului fiind la 0,75 m de planul roţilor, el va descrie o curbă care va fi înăuntrul şoselei de o parte şi alta cu aceşti 0,75 m sau — cu alte cuvinte — va rămâne tot timpul în interiorul unei fâşii medii de $8 - 2 \times 0{,}75 = 6{,}50$ m. Pentru aceeaşi viteză, forţa centrifugă va fi minimă, când raza de curbură a proecţiei traectoriei acestui centru va fi maximă.

Problema revine deci a determina o traectorie cu o rază de curbură constantă, tangentă în C_1 la porţiunea interioară a fâşiei de 6.50 m şi la porţiunea exterioară rectilinie.

Este o problemă de geometrie cunoscută: Să se ducă un cerc tangent la altul dat O, în punctul C_1 şi la o dreaptă dată.

Se notează cu D şi T intersecţiile tangentei în C_1 la cercul de rază $OC = 80 - 3{,}25 = 76{,}75$ m. cu prelungirile rectilinii ale fâşiei de şosea în care se poate trasa traectoria căutată. Aceste porţiuni sunt chiar tangentele respective la cercul dat şi la traectorie. De pe figură se observă:

$$C_1D = OC_1 \cdot \operatorname{tg} 15^0 = 76{,}75 \times 0{,}268 = 20{,}57 \text{ m.}$$

$$DT = 6{,}50 : \sin 30^0 = 6{,}50 : 0{,}5 = 13 \text{ m.}$$

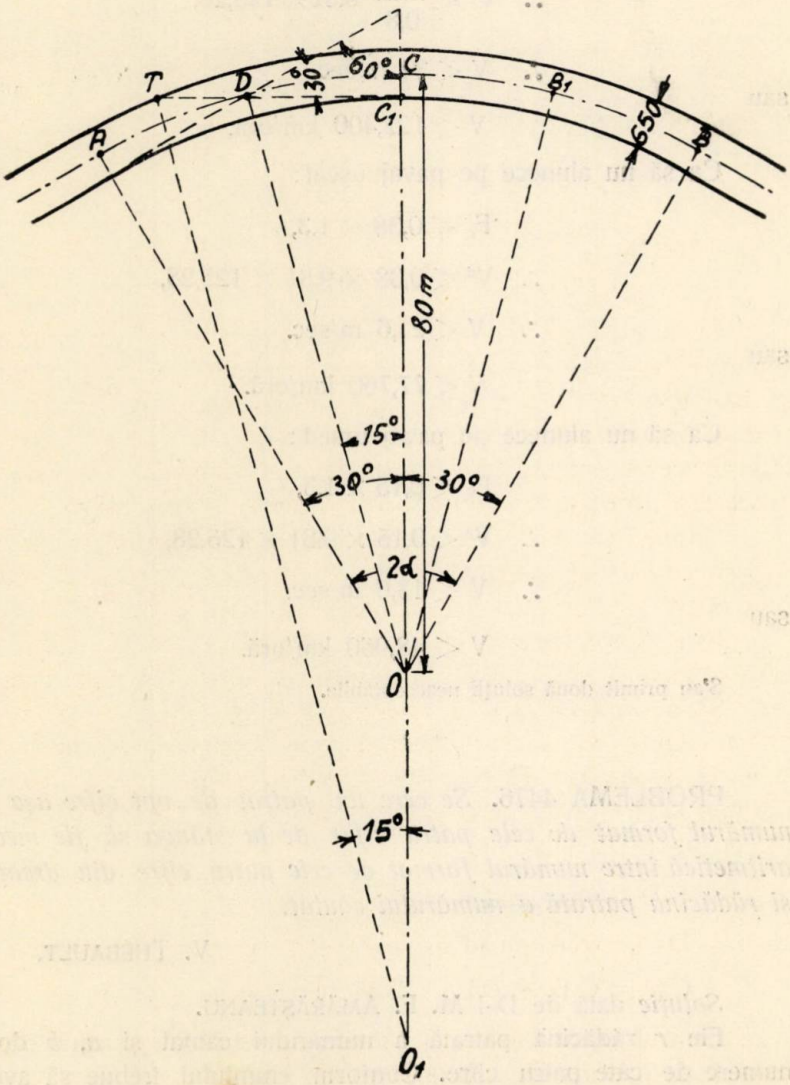
$$C_1T = C_1D + DT = 33{,}57 \text{ m.}$$

Centrul O_1 al traectoriei căutate, se va obţine ducând din T paralela la dreapta DO. Raza ei va fi:

$$C_1O_1 = C_1T \cdot \operatorname{tg} 75^0 = 33{,}57 \times 3{,}732 = 125{,}28 \text{ m} = r.$$

Forţa centrifugă născută prin trecerea automobilului în curbă are expresia:

$$F_c = m\frac{V^2}{r} = \frac{1300}{9{,}81} \cdot \frac{V^2}{125{,}28} \text{ kg.}$$



Ea este considerată în centrul de greutate, adică la 0,80 m deasupra terenului.

Pentruca aceasta să nu provoace răsturnarea automobilului, trebue ca:

$$F_c \cdot 0{,}8 < 1{,}3 \times 0{,}75,$$

$$\therefore\ V^2 < \frac{0{,}75}{0{,}8}\ 9{,}81 \times 125{,}28,$$

$$\therefore\ V < 34 \text{ m/sec.}$$

sau

$$V < 122{,}400 \text{ km/oră.}$$

Ca să nu alunece pe pavaj uscat:

$$F_c < 0{,}38 \times 1{,}3,$$

$$\therefore\ V^2 < 0{,}38 \times 9{,}81 \times 125{,}28,$$

$$\therefore\ V < 21{,}6 \text{ m/sec.}$$

sau

$$V < 77{,}760 \text{ km/oră.}$$

Ca să nu alunece pe pavaj umed:

$$F_c < 0{,}15 \times 1{,}3,$$

$$\therefore\ V^2 < 0{,}15 \times 9.81 \times 125.28,$$

$$\therefore\ V < 13{,}6 \text{ m/sec.}$$

sau

$$V < 48{,}960 \text{ km/oră.}$$

S'au primit două soluţii neacceptabile.

PROBLEMA 4476. *Se cere un patrat de opt cifre aşa ca numărul format de cele patru cifre de la stânga să fie media aritmetică între numărul format de cele patru cifre din dreapta şi rădăcina patrată a numărului căutat.*

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de D-l M. F. AMĂRĂŞTEANU.

Fie r rădăcina patrată a numărului căutat şi a, b două numere de câte patru cifre. Conform enunţului trebue să avem

$$10^4 a + b = r^2\ ;\ 2a = b + r\quad 10^3 \leqslant a \text{ şi } b < 10^4.$$

Adunând primele două relaţiuni se obţine

$$(10^4+2)a = r(r+1).$$

$$\therefore \quad r(r+1) = 2 \times 3 \times 1677 \times a. \qquad (1)$$

Factorii din membrul întâi al lui (1) fiind primi între ei putem avea

$$r = 1667 . k \quad \text{sau} \quad r+1 = 1667 . k \qquad (2)$$

$$\therefore \quad 1667\, k\,(1667\, k \pm 1) = 2 \times 3 \times 1667 \times a$$

$$k\,(1667 . k \pm 1) = 2 \times 3 \times a. \qquad (3)$$

Avem de considerat următoarele 3 cazuri posibile pentru (3):

$$k = 3\, k_1 \quad \text{şi} \quad k = 3\, k_1 \pm 1.$$

I. $k = 3\, k_1$. Din (2) se scoate

$$k_1 (5001\, k_1 \pm 1) = 2\, a. \qquad (4)$$

Cum a trebue să aibă 4 cifre nu se poate lua în (4) decât $k_1 = 1$ şi atunci

$$a = 2501 \quad \text{şi} \quad a = 2500.$$

In acest caz $k = 3\, k_1 = 3$ şi (2) dă

$$r = 5001 \quad \text{şi} \quad r = 5000,$$

iar din relaţia dintre a, b, r rezultă

$$b = 0000 \quad \text{şi} \quad b = 0001.$$

II. $k = 3\, k_1 - 1$. Găsim

$$(3\, k_1 - 1)\ (5001\, k_1 - 1667 \pm 1) = 2 \times 3 \times a$$

ceeace nu-i posibil decât dacă se ia semnul — în ultima paranteză, şi atunci

$$(3\, k_1 - 1)\ (5001\, k_1 - 1668) = 2 \times 3 \times a$$

$$\therefore \quad (3\, k_1 - 1)\ (1667\, k_1 - 556) = 2\, a$$

care pentru $k_1 = 1$ dă

$$a = 1111\ , \quad r = 3333$$

care nu poate da soluţie căci a doua relaţie de condiţie impune

$$2\, a > r.$$

III. $k = 3k_1 + 1$. Se găseşte

$$(3k_1 + 1)(1667k_1 + 556) = 2a$$

care pentru $k_1 = 1$ dă soluţia

$$a = 4446 \ , \ r = 6668 \ , \ b = 2224.$$

Problema are în definitiv următoarele 4 soluţiuni

$$5000^2 = 2500.0000 \quad \text{cu} \quad 2 \times 2500 = 5000 + 0000$$

$$5001^2 = 2501.0001 \quad \text{cu} \quad 2 \times 2501 = 5001 + 0001$$

$$6668^2 = 4446.2224 \quad \text{cu} \quad 2 \times 4446 = 6668 + 2224$$

$$8334^2 = 6945.5556 \quad \text{cu} \quad 2 \times 6945 = 8334 + 5556.$$

Primele două soluţiuni sunt numai formale în ceeace priveşte pe b.

Notă. 1°. Numerele a, b, r pot fi în 3 feluri în progresie aritmetică, din punctul de vedere al ordinei lor de mărime. Anume

(1) $2a = b + r$; (2) $2b = a + r$; (3) $2r = a + b$.

Cazul (1) face obiectul problemei precedente, 4476.

Examinând pe aceeaşi cale celelalte cazuri se găseşte că (2) nu dă soluţiuni iar (3) are următoarele 2 soluţiuni:

$$4545^2 = 2065.7025 \quad \text{cu} \quad 2 \times 4545 = 2065 + 7025$$

$$5456^2 = 2976.7936 \quad \text{cu} \quad 2 \times 5456 = 2976 + 7936.$$

2°. Iată şi un exemplu de soluţiuni pentru cazul (3) când însă nu se impune lui b condiţiunea de a fi de 4 cifre:

$$r = 9900 \ ; \ a = 9800 \ ; \ b = 10000$$

$$9900^2 = 9801.0000$$

3°. Pentru cazul când a şi b sunt de 3 cifre s'au dat soluţiunile

$$500^2 = 250.000 \ ; \quad 501^2 = 251.001$$

$$668^2 = 446.224 \ ; \quad 834^2 = 695.556$$

în *Revista Matematică din Timişoara* Vol. XVI pag. 25 cu ocazia rezolvărei problemei 1345 propusă tot de D-l V. THÉBAULT.

4°. Problema 4476 şi cele de la 1° precedent sunt cazuri cu totul particulare ale problemei 3808 pe care am propus-o în G. M. Vol. XXXIV pag. 480 şi care cu complectarea ce i-am dat la pag. 288 Vol. XL are următorul enunţ: *„Să se găsească 3 numere întregi în progresie aritmetică, de acelaşi număr de cifre, ştiind că patratul unuia este egal cu numărul ce se obţine scriind pe celelalte 2, unul după altul"*.

Până acum nu am primit nici o soluție acceptabilă pentru problema 3808.

5°. Am propus problema 3808 în August 1929. Ulterior, în *Mathèsis* din 1934, D-l V. THÉBAULT a dat la pag. 418 soluțiile următoarei probleme:

Să se găsească un patrat de 2 n *cifre, așa ca numărul format de* n *cifre de la stânga să fie medie aritmetică între acela format de cele* n *cifre de la dreapta și rădăcina sa.*

Ecuațiile problemei acesteia, care este unul din cazurile problemei 3808, sunt

$$N = 10^n a + b = r^2$$

$$2a = b + r.$$

S'au găsit soluțiile

$$N = 250\ldots0100\ldots01 = (50\ldots01)^2$$

$$N = 250\ldots\ldots\ldots00 = (50\ldots00)^2$$

$$N = 44\ldots4622\ldots24 = (66\ldots68)^2$$

$$N = 694\ldots4555\ldots56 = (83\ldots34)^2$$

a căror formă este de genul soluțiilor găsite la problema 4476 ce se rezolvă mai sus.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4643. *Fie în triunghiul* ABC, *M' și M" două puncte reciproce, A' și A" picioarele cevienelor* AM' *și* AM" — A_b, A_c *izotomicele punctelor în care cercul* AA'A" *tae respectiv laturile* AB, AC — B_c, B_a, C_a, C_b *puncte analoage.*

Să se arate existența relației

$$\frac{\overline{AA_b}}{\overline{AA_c}} \cdot \frac{\overline{BB_c}}{\overline{BB_a}} \cdot \frac{\overline{CC_a}}{\overline{CC_b}} = -1 .$$

C. IONESCU-BUJOR.

Soluție dată de D-nii: R. V. APOSTOL (Liceul militar N Filipescu), I. BUZINCU (Lic. mil. Iași), VIRGIL ECKSTEIN, MIRCEA A. NEGREA (Brăila), M. C. POSTELNICESCU și I. ȚIȚEICA (Lic. Mănăstirea Dealu).

A' și A" fiind izotomice, punctele B, C au puteri egale în raport cu cercul AA'.A". Insă

$$\overline{BA'} \cdot \overline{BA''} = \overline{AA_b} \cdot \overline{AB} \ , \ \overline{CA''} \cdot \overline{CA'} = \overline{AA_c} \cdot \overline{AC} \ ,$$

deci

$$\overline{AA_b} \cdot \overline{AB} = \overline{AA_c} \cdot \overline{AC}$$

sau

$$\frac{\overline{AA_b}}{\overline{AA_c}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}},$$

$$\frac{\overline{AA_b}}{\overline{AA_c}} \cdot \frac{\overline{BB_c}}{\overline{BB_a}} \cdot \frac{\overline{CC_a}}{\overline{CC_b}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = -1.$$

C. I. B.

PROBLEMA 4665. *Fie* p *un număr prim dat, diferit de 2. Să se demonstreze că produsul a două numere întregi care diferă prin* p, *nu poate fi un patrat perfect decât pentru o singură valoare a factorilor.*

P. SERGESCU.

Soluție dată de D-nii: MIRCEA LEONTE A. NEGREA (Brăila) și O. SACTER.

Să considerăm produsul $n(n+p)$. Cei doi factori n și $n+p$ nu pot avea un divizor comun diferit de p.

Avem deci de considerat două cazuri, după cum n este sau nu multiplu de p.

Cazul I: $n = pq$. Atunci $n+p = p(q+1)$ și produsul devine $p^2q(q+1)$. Pentru ca el să fie un patrat, trebue ca $q(q+1)$ să fie un patrat perfect. Or, q și $q+1$ sunt primi între ei, deci fiecare factor ar trebui să fie un patrat perfect. Aceasta e însă imposibil, fiindcă chiar cele mai mici patrate consecutive diferă prin 3 (afară de cazul banal $q = 0$). Rezultă că în acest caz $(n+p)n$ nu poate fi patrat perfect.

Cazul II: n nu e multiplu de p. In acest caz, factorii n și $n+p$ sunt primi între ei și, pentru ca produsul lor să fie un patrat perfect, trebue ca fiecare factor în parte să fie un patrat perfect, adică:

$$n = \alpha^2 \quad , \quad n+p = \beta^2$$

Dar atunci:

$$p = \beta^2 - \alpha^2 = (\beta - \alpha)(\beta + \alpha)$$

și p nu poate fi prim decât cu condiția $\beta - \alpha = 1$.

Rezultă că

$$p = 2\alpha + 1$$

şi singurele numere care fac produsul un patrat perfect sunt:

$$n = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 , \quad n+p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 .$$

Aceste numere sunt întregi, căci p, fiind un număr prim diferit de 2, este impar.

In cazul $p = 2$, nu există nici o pereche de numere n şi $n+2$, al căror produs să fie un patrat perfect (căci diferenţa între două patrate perfecte e sau multiplu de 4 dacă α şi β sunt de aceeaş paritate, sau este impară dacă α şi β sunt de parităţi deosebite).

PROBLEMA 4703. *Suma a patru fracţii de forma* $(a-1)/a$ *este un întreg; care sunt acele fracţii?*

I. B. FLORESCU.

Chestiunea revine la a rezolva în numere întregi egalitatea

$$[(a-1)/a] + [(b-1)/b] + [(c-1)/c] + [(d-1)/d] = s. \quad (A)$$

Vom presupune $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$, de unde rezultă:

$$(a-1)/a \leqslant (b-1)/b \leqslant (c-1)/c \leqslant (d-1)/d,$$

deoarece trecem dela o fracţie la următoarea sporindu-i ambii termeni cu acelaşi număr şi se ştie că în acest caz fracţia se apropie de 1; cum ele sunt subunitare ele cresc prin acea operaţiune. Egalitatea are loc pentru fracţii identice. De aci conchidem că:

$$4(a-1)/a \leqslant s \quad , \quad 4(d-1)/d \geqslant s.$$

$$\therefore \quad a \leqslant 4/(4-s) \quad (B)$$

Odată a ales, va trebui să luăm pe b aşa ca:

$$3(b-1)/b \leqslant s - (a-1)/a,$$

$$\therefore \quad b \leqslant 3a/[(4-s)-1]. \quad (C)$$

După ce alegem pe b în aceste condiţiuni, trebue să alegem pe c aşa încât:

$$2(c-1)/c \leqslant s-(a-1)/a-(b-1)/b.$$

$$\therefore \quad c \leqslant 2ab/[(4-s)ab-a-b]. \qquad (D)$$

Dacă a, b, c au fost fixaţi, pe d îl scoatem din egalitatea (A). Să punem în această egalitate:

$$s-(a-1)/a-(b-1)/b = m/n,$$

$$\therefore \quad d = nc/[(2n-m)c-n]. \qquad (E)$$

Vor trebui luate numai valorile întregi ale lui d.

Calea de urmat este următoarea: dăm lui s pe rând valorile lui 0, 1, 2, 3. Cu relaţia (B), stabilim limita superioară a lui a. Pentru fiecare a admisibil determinăm cu (C) limita superioară a lui b şi apoi pentru diferiţii b admisibili limita superioară a lui c, cu relaţia (D). Pentru diferiţii c admisibili, studiem ecuaţia (E) şi dacă găsim pentru d ca soluţie un întreg avem o soluţie a problemei.

I. $s = 0$. In acest caz găsim $a \leqslant 1$, deci $a = 1$. Apoi $b \leqslant 1$, deci $b = 1$. Aceasta ne conduce la $c \leqslant 1$, deci $c = 1$. Se găseşte apoi $d = 1$. Cele patru fracţii sunt nule, ceeace de altfel era evident dacă suma s trebue să fie 0. De aci soluţia:

$$(0/1)+(0/1)+(0/1)+(0/1) = 0. \qquad (1)$$

II. $s = 1$. In acest caz $a \leqslant 1{,}333\ldots$, deci $a = 1$. De aci se deduce $b \leqslant 1{,}5$, deci $b = 1$. Cu aceasta obţinem $c \leqslant 2$. Nu putem lua $c = 1$ căci ar rămâne atunci ca ultima fracţie să fie 1 ceeace cere $d = \infty$. Deci $c = 2$. In acest caz $m/n = 1/2$ şi se vede că putem lua $d = 2$. De aci soluţia:

$$(0/1)+(0/1)+(1/2)+(1/2) = 1. \qquad (2)$$

III. $s = 2$. In acest caz $a \leqslant 2$.

1. Fie $a = 1$. In acest caz găsim $b \leqslant 3$. Nu putem lua $b = 1$, căci dacă primele două fracţii sunt nule celelalte două fiind subunitare nu pot da suma 2. Pentru $b = 2$ trebue să avem $c \leqslant 4$. Cum $c \geqslant b$ nu putem lua decât $c = 2$, 3, 4. In toate aceste cazuri $m/n = 3/2$ şi deci (E) devine:

$$d = 2c/(c-2) = c+4/(c-2).$$

Pentru $c = 2, 3, 4$ găsim $d = \infty, 6, 4$, de unde soluţiile:

$(0/1)+(1/2)+(2/3)+(5/6)=2$; $(0/1)+(1/2)+(3/4)+(3/4)=2$; $(3, 4)$.

Dacă $b = 3$ găsim $c \geqslant 3$. Deci $c = 3$ şi atunci $m/n = 2/3$, ceeace arată că putem lua $d = 3$. De aci soluţia:

$$(0/1) + (2/3) + (2/3) + (2/3) = 2. \qquad (5)$$

2. Fie $a = 2$. In acest caz $b \leqslant 2$. Nu putem lua decât $b = 2$ şi atunci $c \leqslant 2$. Nu putem lua decât $c = 2$. Se găseşte $m/n = 1/2$ şi de aci rezultă $d = 2$. Avem soluţia:

$$(1/2) + (1/2) + (1/2) + (1/2) = 2. \qquad (6)$$

III. $s = 3$. In acest caz $a \leqslant 4$.

1. Fie $a = 1$. Aceasta nu convine căci suma celorlalte fracţii afară de prima ar trebui să dea 3, ceeace nu se poate, ele fiind subunitare.

2. Fie $a = 2$. Aceasta cere $b \leqslant 6$. Nu putem admite $b = 2$ căci ultimele două fracţii subunitare ar trebui să dea suma 2. Pentru $b = 3$ avem $c \leqslant 12$. Aci $m/n = 11/6$ şi relaţia (E) ne dă

$$d = 6 + 36/(c - 6).$$

Deci $(c - 6)$ trebue să fie un divizor al lui 36. Pentru aceasta putem lua $c = 7, 8, 9, 10, 12$ care dau respectiv $d = 42, 24, 18, 15, 12$. De aci soluţiile:

$(1/2)+(2/3)+(6/7)+(41/42)=3$; $(1/2)+(2/3)+(7/8)+(23/24)=3$; $(7, 8)$

$(1/2)+(2/3)+(8/9)+(17/18)=3$; $(1/2)+(2/3)+(9/10)+(14/15)=3$; $(9, 10)$

$$(1/2) + (1/3) + (11/12) + (11/12) = 3, \ldots \qquad (11)$$

Pentru $b = 4$ avem $c \leqslant 8$, $m/n = 7/3$ şi apoi (E) ne dă:

$$d = 4 + 16/(c - 4).$$

Numărul $(c - 4)$ trebue să fie un divizor al lui 16. Putem lua $c = 5$, $c = 6$, $c = 8$ care dau $d = 20, 12, 8$. De aci soluţiile:

$(1/2)+(3/4)+(4/5)+(19/20)=3$; $(1/2)+(3/4)+(5/6)+(11/12)=36$; $(12, 13)$

$$(1/2) + (3/4) + (7/8) + (7/8) = 3. \qquad (14)$$

Pentru $b = 5$ avem $c \leqslant 6$. Aci $m/n = 17/10$ şi deci:

$$d = 10c/(3c - 10).$$

Pentru $c = 5$ găsim $d = 10$, iar pentru $c = 6$ găsim $d = 15/2$. Deci avem o singură soluţie:

$$(1/2) + (4/5) + (4/5) + (9/10) = 3. \qquad (15)$$

Pentru $c = 6$ avem $c \leqslant 6$. Deci $c = 6$, care dă $d = 6$. De aci soluţia:

$$(1/2) + (5/6) + (5/6) + (5/6) = 3. \qquad (16)$$

3. Fie $a = 3$. In acest caz $b \leqslant 4$. Pentru $b = 3$ avem $c \leqslant 6$. Aci $m/n = 5/3$, şi găsim:

$$d = 3 + 9/(c - 3).$$

Deci $(c - 3)$ e divizor al lui 9. Putem lua $c = 4, 6$ care dau $d = 12, 6$. Avem dar următoarele două soluţii:

$$(2/3)+(2/3)+(3/4)+(11/12)=3\,;\,(2/3)+(2/3)+(5/6)+(5/6)=3. \qquad (17, 18)$$

Pentru $b = 4$ avem $c \leqslant 4$, deci $c = 4$, de unde soluţia:

$$(2/3) + (3/4) + (3/4) + (5/6) = 3. \qquad (19)$$

4. Fie $a = 4$. Atunci $b \leqslant 4$, deci $b = 4$. Aceasta dă $c \leqslant 4$, deci $c = 4$. Se găseşte şi $d = 4$. De aci soluţia:

$$(3/4) + (3/4) + (3/4) + (3/4) = 3. \qquad (20)$$

Soluţiile numerotate $1 - 20$ sunt toate soluţiile problemei. Eliminând pe cele nule, rămân 15 soluţiuni cu fracţii efective.

I. I.

Problema a fost încercată de mulţi corespondenţi dar nu au avut răbdarea de a studia serios, căci cum se vede ea nu prezintă dificultăţi. D-l G. Roşca a dat soluţiile 1, 2, 6, 18, 19, 20. D-l M. Margulius a dat soluţia 7.

PROBLEMA 4727. *Pe latura* BC *a triunghiului* ABC, *înscris în cercul* O, *se notează un punct* M. *Cercul de diametrul* AM *tae cercul* O *într'un punct* A'.

Să se demonstreze că A'M *trece printr'un punct fix când* M *variază pe latura* BC.

Gh. Vasiliu.

Soluția : Intr'adevăr, direcția A'M este perpendiculară în A pe AA' și deci dacă A'' este punctul în care ea întâlnește cercul O, dreapta AA'' este un diametru fix al acestui cerc; ceeace atrage după sine fixitatea punctului A'' prin care trece dreapta A'M.

c. c. t. d.

Au rezolvat astfel problema D-nii: CONSTANTINESCU GH. GH., BAL LASCU, JAREGHIE V. IOAN, JIPA C. ALEX. și POPA D. MIRCEA.

La această proplemă am mai primit soluțiuni bune și dela D-nii: APOSTOL RADU, DENCIULESCU D. GH., FLORESCU VICTOR, IOAN A. ILIE, LĂZĂRESCU P. ȘT., NEGULESCU D. ȘT., PASCU V. HORIA, RĂDULESCU GH. O., ȘTEFĂNESCU D. N., THEODORESCU N. D. și ȚIȚEICA I. (elevi ai lic. milit. din Târgoviște); IONESCU D. ȘT. și TANASICIUC I. CL. (elevi ai lic. milit. din Cernăuți); ANCA I. I., BRAN C. și BUCURESCU I. V. (elevi ai lic. milit. din Tg.-Mureș); BUCUR V., JIPA C. AL., PANTELIMON V. C., PETRESCU A., STOIAN ȘT. DAN și TURCU R. S. (elevi ai lic. milit. din Iași); VASILESCU-STABU A. M. (lic. mil din Alba-Iulia); BAZAC I. A. DAN (elev lic. milit. din Chișinău); CIOC I. D. (lic. milit. din Craiova); HERMAN V. (stud. Cluj); CĂLINESCU A., CORNĂȚEANU I. A., COTESCU C., DEUTSCH M. A., DOBRESCU P., DUMITRESCU C. I., GAVRILESCU N. C., NEGREA M. A. L., RIPIANU D-TRU și Sub.-Lt. PAREPEANU I.

GH. V.

PROBLEMA 4737. *Intr'un plan se consideră două puncte* A *și* B, *două drepte* D *și* D_1 *și un punct* M *mobil pe dreapta* D. *Fie* A_1 *și* B_1 *intersecțiile dreptei* D_1 *cu dreptele* AM *și* BM *și* M_1 *intersecția dreptelor* AB_1 *și* A_1B. *Să se arate:*

1°. *Că punctul* M_1 *descrie o dreaptă ce trece prin intersecția dreptelor* D *și* D_1;

2°. *Dreptele* MM_1 *trec printr'un punct fix de pe dreapta* AB.

LT. C. IONESCU-ȚIU.

I. *Soluție* dată de D-l I. ȚIȚEICA (elev, M-rea Dealu).

1°. Când punctul M descrie dreapta D, dreptele AM și BM descriu două fascicole omografice. Aceste fascicole determină pe dreapta fixă D_1 corespondența omografică (A_1, B_1). Unind punctele fixe A și B respectiv cu punctele variabile B_1 și A_1, obținem două fascicole omografice. In adevăr, unei drepte AB_1 îi corespunde astfel o singură dreaptă BA_1 și reciproc. Punctele A_1 și B_1 obținându-se prin construcții ce nu necesită decât rigla, rezultă că relația între parametrii lor este algebrică.

Dreapta AB corespunzându-se în această omografie, deducem că intersecția M_1 a două drepte omoloage descrie o dreaptă Δ. Această dreaptă trece prin intersecția (D, D_1), căci dacă $M \equiv (D, D_1)$, atunci $A_1 \equiv B_1 \equiv M$.

2°. Dacă M variază pe D, M_1 variază pe Δ, astfel că unui punct M îi corespunde un singur punct M_1 și reciproc.

Corespondența (M, M_1) este deci de asemenea omografică și cum punctul (D, D_1) sau (D, Δ) se corespunde lui însuși, rezultă că MM_1 trece printr'un punct fix. Acest punct este situat pe AB, deoarece AB este o poziție particulară a dreptei variabile MM_1.

II. *Soluție* dată de D-l VIRGIL ECKSTEIN (elev-inginer, București).

Folosim o teoremă și reciproca sa enunțată în *Statica și Rezistența* de D-l profesor GH. EM. FILIPESCU, pag. 41:

— *Dacă un poligon se deformează astfel încât,* n *vârfuri ale lui descriu niște drepte date și* n — 1 *laturi se rotesc în jurul a* n — 1 *puncte fixe situate pe o dreaptă, atunci și latura* n — *a se va roti în jurul unui punct fix situat pe această dreaptă* și reciproc,

— *Dacă un poligon se deformează astfel încât, toate laturile lui rotindu-se trec prin niște puncte fixe situate pe o dreaptă și dacă* n — 1 *vârfuri descriu niște drepte, atunci și vârful al* n-*lea va descrie o dreaptă.*

1°. In patrulaterul $A_1MB_1M_1$ vârfurile A_1, B_1, M descriu dreptele D_1 și D; toate laturile sale trec prin punctele fixe A și B, rezultă după reciproca enunțată că locul punctului M_1 este o dreaptă Δ. Când M se află pe D_1, punctele A_1, B_1, M_1 coincid cu M deci Δ va trece prin (D, D_1).

2°. Vârfurile triunghiurilor AMM_1 și BMM_1 se mișcă pe drepte fixe, iar laturile AM și AM_1, BM și BM_1 se rotesc în jurul punctelor fixe A și B, deci și latura MM_1 va trece printr'un punct fix, situat pe dreapta AB care este conjugatul armonic al punctului de intersecție al dreptelor D_1 și AB, în raport cu segmentul AB.

III. *Soluție* dată de D-nii: MIRCEA A. VASILESCU-STABU (elev, Alba Iulia), VICTOR FLORESCU (lic. militar, Târgoviște), Subloc. ION C. PAREPEANU și PAUL DOBRESCU (elev, S. P. O.).

Fie C intersecția dreptelor D și D_1, N intersecția dreptelor D_1 și AB, P intersecția dreptelor AB și MM_1; iar N_1 intersecția dreptelor D_1 și MM_1.

Se folosește teorema lui PAPPUS. Din patrulaterele AA_1B_1B și $MA_1M_1B_1$ avem rapoartele armonice (MN_1M_1P) și (APBN).

Punctele A, B și N fiind fixe și punctul P, care este conjugatul armonic al lui N față de AB, este fix.

De asemenea în fascicolul (C, MN_1M_1P) punctul P este fix; iar punctele M și N_1 descriu razele fixe D și D_1, rezultă că și punctul M_1 va descrie dreapta CM_1 conjugata armonică a dreptei D față de laturile unghiului PCN.

C. I. Ț.

PROBLEMA 4756. *Să se arate că dacă*

$$2\,\mathrm{tg}^2\theta = \mathrm{tg}^2 a + \mathrm{tg}^2 b,$$

atunci avem și

$$(1 - \cos 2\theta)\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos 2\theta - \cos 2a \cos 2b.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluția. Pornind dela relația dată avem succesiv

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\theta}{1 + \mathrm{tg}^2\theta} = \frac{(1 - \mathrm{tg}^2 a) + (1 - \mathrm{tg}^2 b)}{(1 + \mathrm{tg}^2 a) + (1 + \mathrm{tg}^2 b)}$$

$$= \frac{\cos 2a \cos^2 b + \cos 2b \cos^2 a}{\cos^2 a + \cos^2 b}$$

$$= \frac{\cos 2a(\cos 2b + 1) + \cos 2b(\cos 2a + 1)}{(\cos 2a + 1) + (\cos 2b + 1)}$$

$$= \frac{2\cos 2a \cos 2b + (\cos 2a + \cos 2b)}{(\cos 2a + \cos 2b) + 2}$$

$$= \frac{\cos 2a \cos 2b + \cos(a+b)\cos(a-b)}{\cos(a+b)\cos(a-b) + 1}.$$

Acest rezultat se mai poate scrie şi sub forma

$$[\cos(a+b)\cos(a-b)+1]\cos 2\theta = \cos 2a\cos 2b+\cos(a+b)\cos(a-b)$$

$$\therefore (\cos 2\theta-1)\cos(a+b)\cos(a-b) = -\cos 2\theta+\cos 2\theta+\cos 2a\cos 2b$$

care este tocmai relaţia ce se cerea să se demonstreze.

Alte soluţii dela D-nii: MIRCEA-LEONTE A. NEGREA, M. F. AMĂRĂŞTEANU, P. G. MIHĂILESCU, A. T. NADOLU, S-LT. TICA P. MARIN-GALL, S-LT. I. PAREPEANU, D. MAVRODIN, D. RIPIANU, V. FLORESCU, H. LĂZĂRESCU, R. I. CIURESCU, B. P. PETRESCU, N. D. ŞTEFĂNESCU şi I. STREDER.

Numele corespondenţilor cari au dat soluţii identice n'au fost citate.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4759. *Printr'o sferă metalică goală în interior trece o axă cilindrică. Care este volumul golului rămas?*

I. IONESCU.

Această problemă este un caz particular al teoremei No. 577 şi No. 578 pag. 272 — 273 „*Elements de Géométrie*" par F. J., ediţie din 1909.

Având în vedere această teoremă, volumul golului rămas este egal cu al unei sfere al cărui diametru este înălţimea zonei rămasă în interior, după găurirea sferei.

TRAIAN I. CHIŢULESCU.
(Clasa VII-a ştiinţifică, Liceul Cantemir-Vodă Bucureşti).

Au rezolvat bine această problemă şi D-ra SONIA M. TUDORAN, şi D-nii: M. T. AMĂRĂŞTEANU, A. CORNĂŢEANU, I. I. CRĂCIUN, P. FIRU, P. P. GHEORGHIU, I. N. JAREGHIE, P. I. MAMUT, MIRCEA LEONTE A. NEGREA, C. V. PANTELIMON, A. V. PETRESCU, M. D. POPA, AL. I. ROHR, M. N. ROŞCULEŢ, V. STĂNCULESCU, ST. C. TILICĂ, I. STREDER, S. R. TUNU, M. AL. VASILESCU-STABU şi Subloc. M. C. I. VLAD.

D-ra SONIA M. TUDORAN a încercat şi cazul când axa cilindrului nu ar trece prin centrul sferei.

Notă. Problema aceasta am mai propus-o în *Gazeta Matematică* sub altă formă. Unde şi cum?

I. I.

PROBLEMA 4763. *Cu numerele* n, n^2, n^3 *se poate construi un triunghiu?*

ULPIU M. FLORESCU.

Soluție dată de D-ra: TUDORAN M. SONIA (Cl. VI Școala Centrală „M. Brâncoveanu", București) și de D-nii: FLORESCU VICTOR (Cl. VI Lic. Mil. „N. Filipescu", Târgoviște), MARTAC RADU (Șc. Politecnică, București), NEGREA A. MIRCEA-LEONTE (Brăila), PETRESCU ACHILLE (Cl. V Lic. Mil. Iași), POPOVICI G. (elev inginer, București), ȘTEFĂNESCU D. NIC. (Lic. Mil. „N. Filipescu", Târgoviște), TRUFIN D. TRAIAN (Cl. V Lic. Mil. Iași) și VASILESCU-STABU AL. MIRCEA (Cl. V Lic. „Mihai Viteazu", Alba-Iulia).

Enunțul problemei nu precizează ce anume elemente ale triunghiului trebue să fie date de numerele n, n^2 și n^3. Vom presupune deci, că cele trei numere măsoară laturile triunghiului.

Problema admite evident soluțiuni, căci pentru $n = 1$ avem:

$$n = 1\ ,\ n^2 = 1\ ,\ n^3 = 1,$$

și cu aceste trei laturi putem construi un triunghiu echilateral.

Să cercetăm însă limitele între care trebue să se găsească n pentru ca construcția să fie posibilă.

Ne vom servi bineînțeles de inegalitățile cunoscute din geometrie relativ la laturile unui triunghiu. Pentru a nu scrie însă prea multe inegalități, vom face o observație: se vede ușor pe o figură că *condiția necesară și suficientă* pentru a se putea construi un triunghiu cu trei lungimi date, este ca *cea mai mică* să fie mai mare decât diferența celorlalte două.

Vom face acum două ipoteze.

1). *Fie* $n > 1$.

In acest caz avem

$$n < n^2 < n^3.$$

Va trebui deci să avem, după observația de mai sus

$$n > n^3 - n^2$$

$$\therefore\ n^3 - n^2 - n < 0$$

sau, împărțind cu n care nu poate fi nul,

$$n^2 - n - 1 < 0.$$

Această inegalitate este satisfăcută pentru

$$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})<n<\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Observăm însă că am plecat dela ipoteza $n>1$ şi deci limitele soluţiilor în acest caz se vor restrânge la

$$1<n<\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\cdot$$

2). *Fie* $n<1$.

In acest caz avem

$$n>n^2>n^3.$$

Va trebui deci ca n să îndeplinească condiţiunea

$$n^3>n-n^2$$

$$\therefore\quad n^2+n-1>0.$$

Inegalitatea este satisfăcută pentru

$$n>\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$$

sau

$$n<-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Cum însă trebue să avem $0<n<1$, limitele soluţiilor în acest caz se restrâng la

$$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})<n<1.$$

Reunînd acum cele două cazuri considerate, se vede că soluţia generală a problemei este dată de inegalitatea dublă

$$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\leqslant n\leqslant\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Pentru valorile lui n cuprinse în acest interval triunghiul având laturile n, n^2 şi n^3 poate fi construit. In cazurile limită ale egalităţilor, triunghiurile de construit se reduc la drepte.

Notă. D-ra COMLOŞAN CORNELIA (Cluj) şi D-l Sub-Lt. MIHAI C. I. VLAD (student, Cluj) au rezolvat problema numai pentru cazul lui n întreg.

U. M. F.

PROBLEMA 4771. *O fracție are termenii mai mici ca* 1000 *și este echivalentă cu* 1/2. *Răsturnându-i termenii ea devine egală cu* 8/5. *Se cer fracțiile care îndeplinesc aceste condițiuni.*

I. IONESCU.

Soluție dată de D-nii: C. SĂNDULACHE (Licențiat în matematici (Băsești, Bacău); CONST. N. GAVRILESCU (Școala pregătitoare de Ofițeri, București); ȘTEFAN C. TILICĂ (Clasa VII, Liceul Turnul Severin); MIRCEA D. POPA (Clasa V, Liceul militar Iași), Subloc. AL. PANĂ.

Avem de examinat următoarele cazuri.

1. — *Numărătorul și numitorul sunt de o singură cifră.*

Prin răsturnarea termenilor se obține aceeași fracție care nu poate avea două valori: 1/2 și 8/5. Nu avem deci soluție.

2. — *Numărătorul are o cifră și numitorul două cifre.*

Ar trebui să avem:

$$a/(10b + c) = 1/2 \quad \text{și} \quad a/(10c + b) = 8/5.$$

A doua egalitate ne arată că trebue luat $a > (10c + b)$. Aceasta nu e cu putință, căci a e reprezentat prin o cifră pe când partea a doua e cel puțin 11, dacă c nu este nul. In acest caz însă egalitățile de mai sus se reduc la $a = 5b$ și $5a = 8b$, care sunt incompatibile, căci împărțindu-le deducem o imposibilitate: $1/5 = 5/8$.

3. — *Numărătorul și numitorul au fiecare două cifre.*

In acest caz avem:

$$(10a + b)/(10c + d) = 1/2 \quad \text{și} \quad (10b + a)/(10d + c) = 8/5.$$

Fracțiile date fiind ireductibile, a doua egalitate ne arată că c nu poate fi decât 0 sau 5. In primul caz numitorul $(10c + d)$ nu ar mai avea două cifre, cum am presupus. Deci $c = 5$. Inlocuim și transformând, găsim:

$$10a + b = 25 + \tfrac{1}{2}d, \quad \text{și} \quad 10b + a = 16d + 8.$$

Din prima se vede că $a = 2$ deoarece d este sub 10. Inlocuind găsim două ecuații de gradul I în b și d pe care rezolvându-le găsim $b = 7$ și $d = 4$. De aci deducem că fracția *27/54* este o soluțiune a problemei.

4. *Numărătorul are două cifre și numitorul trei.*

Ar trebui să avem:

$$(10a + b)(100c + 10d + e) = 1/2 \quad \text{și} \quad (10b + a)(100e + 10d + c) = 8/5.$$

In acest caz nu putem avea soluţie, căci dacă e nu este 0, atunci fracţia făcută cu răsturnatele este subunitară, numărătorul ei având două cifre şi numitorul trei cifre, pe când $8/5 > 1$; iar dacă $e = 0$ am avea egalităţile:

$(10a+b)/(100c+10d+0)=1/2$ şi $(10b+a)/(100\times 0+10d+c)=8/5$.

A doua egalitate ne arată că c nu poate fi decât 0 sau 5. Nu poate fi însă 0 căci numitorul nu ar mai fi de trei cifre. Deci $c = 5$ şi egalităţile devin:

$$10a + b = 250 + 5d, \quad \text{şi} \quad 10b + a = 8(2d + 1).$$

Prima nu e posibilă căci $(10a + b) < 100$.

5. — *Numărătorul şi numitorul au câte trei cifre.*

In acest caz trebuie să avem:

$$(100a + 10b + c)/(100d + 10e + f) = 1/2,$$
$$(100c + 10b + a)/(100f + 10e + d) = 8/5.$$

Ca şi în cazurile precedente se vede că nu putem lua de cât $d = 5$. Numitorul fracţii căutate este dar cuprins între 500 şi 599 şi prin urmare partea întâia a primei egalităţi nu poate fi cuprinsă decât între 250 şi 299 inclusiv. De aci conchidem că $a = 2$. Inlocuind şi făcând reducerile, egalităţile devin:

$$10b + c = 5e + \tfrac{1}{2}f + 50 \quad \text{şi} \quad 10c + b = 16f + e[3(e + 1)/5].$$

A doua ne arată că nu putem avea prima parte întreagă decât dacă $e = 4$ sau $e = 9$.

a) Pentru $e = 4$ egalităţile de mai sus devin:

$$10b + c = 70 + \tfrac{1}{2}f \quad \text{şi} \quad 10c + b = 7 + 16f.$$

Cum $f < 10$, prima egalitate arată că $b = 7$ şi deci $c = \frac{1}{2}f$. Introducând aceste valori în a doua egalitate scoatem $f = 0$, şi cum $c = \frac{1}{2}f$ reese că avem şi $c = 0$. De aci soluţiunea *270/540*, care este *formală* căci fracţia dedusă prin răsturnarea termenilor s'ar scrie complet *072/045*.

b) Pentru $e = 9$ egalităţile ante-precedente devin:

$$10b + c = 95 + \tfrac{1}{2}f \quad \text{şi} \quad 10c + b = 16f + 15.$$

Cum $f < 10$, reese din prima egalitate că $b = 9$ şi deci $c = 5 + \frac{1}{2}f$. Introducând aceste valori în egalitatea a doua ea ne dă $f = 4$, care ne conduce la $c = 5 + \frac{1}{2}f = 7$. De aci soluţia *297/594*. Fracţia cu termenii răsturnaţi este $792/495 = 8/5$.

Fracţia *297/594* este deci singura soluţie a problemei, cu termenii de trei cifre.

Observaţiuni. 1. — Fracţiile:

$$\frac{27}{54}, \frac{297}{594}, \frac{2997}{5994}, \frac{2999\ldots97}{5999\ldots94}$$

satisfac condiţiilor din enunţul problemei.

MIRCEA D. POPA.

2. — Fracţiile cu termenii răsturnaţi se pot găsi astfel:

$$\text{I)}\ \frac{8}{5}\times\frac{9000\ldots00}{9000\ldots00},\quad \text{II)}\ \frac{8}{5}\times\frac{9000\ldots09}{9000\ldots09},\quad \text{III)}\ \frac{8}{5}\times\frac{999\ldots99}{999\ldots99}.$$

ŞTEFAN C. TILICĂ.

EXERCIŢII

20. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^4 + 10x^3 + 28x^2 + 15x - 7 = 0.$$

SUB-LT. IACOB ST. EUGENIU.

R. Ecuaţia propusă se poate scrie:

$$x^4 + 10x^3 + 25x^2 + 3x^2 + 15x - 7 = 0$$

$$(x^2 + 5x)^2 + 3(x^2 + 5x) - 7 = 0$$

deci:

$$x^2 + 5x = \frac{-3 \pm \sqrt{37}}{2} \text{ etc.}$$

21. Să se stabilească identitatea:

$$\Sigma(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\alpha+2\beta+\gamma) + 3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) = 2(\alpha+\beta+\gamma)\Sigma(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)$$

MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU.

R. Se cunoaşte egalitatea dublă:

$$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)$$

$$+ 6abc = 3(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc.$$

Din aceasta deducem:

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 3abc = (a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Dacă în această egalitate facem:

$$a = \alpha+\beta\ ;\ b = \beta+\gamma\ ;\ c = \gamma+\alpha,$$

obţuiem tocmai egalitatea dată.

PROBLEME PROPUSE

4795. Să se rezolve ecuația:

$$\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x = \sec x + \operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x.$$

I. IONESCU.

4796. Fie φ, φ_a, φ_b, φ_c punctele de contact ale cercului celor nouă puncte ale unui triunghiu ABC, înscris în cercul O, cu cercurile tritangente I, I_a, I_b, I_c.

Să se demonstreze că dacă α este latura mijlocie a triunghiului, atunci:

$$\overline{OI}_a \cdot \overline{\varphi\varphi}_a = \overline{OI}_t \cdot \overline{\varphi\varphi}_b + \overline{OI}_c \cdot \overline{\varphi\varphi}_c.$$

V. THÉBAULT.

4797. Prin un punct K pe diagonala BD a unui paralelogram ABCD se duc paralele la laturi, care taie pe AD și BC în E și F, iar pe AB și CD în G și H. Prin punctul K_1 de intersecție al dreptelor AF și GC se duc paralele la laturile paralelogramului pe care le taie analog în punctele E_1, F_1, G_1. H_1.

Să se arate că grupele de drepte (E_1B, AK, GE); (GE, E_1F_1, AH) sunt concurente.

LT. C. IONESCU-ȚIU.

4798. Se consideră triunghiul ABC și un punct P pe cercul său circumscris.

Dreapta PA întâlnește înălțimile vârfurilor B și C în B_a și C_a. Analog se obțin punctele A_b și C_b; A_c și B_c. Fie A', B', C' și A", B", C" respectiv mijloacele laturilor triunghiului ABC și ale segmentelor $C_b B_c$, $A_c C_a$, $A_b B_a$.

1°. Triunghiurile A'B'C' și A"B"C" sunt omologice, având centrul de omologie I pe cercul lui EULER al triunghiului dat.

2°. Cercul $PA_b B_a$ și analoagele sale au centrele pe aceeași dreaptă.

3°. Dreptele $A_b B_a$, $A_c C_a$, $B_c C_b$ sunt paralele.

4°. Triunghiul ABC este un triunghiu polar al triunghiului A"B"C".

LT. I. GH. ZAMFIRESCU.

4799. Să se stabilească relaţia:

$$\sum_{0}^{n} k!\,(n-k)!\,[C_n^k]^3 = n!\,C_{2n}^n.$$

N. N. MIHĂILEANU.

4800. Să se arate că:

$$\sum_{i=3}^{m} C_i^2\,C_i^3 = 10\,C_{m+1}^6 + 12\,C_{m+1}^5 + 3\,C_{m+1}^4$$

$$\sum_{i=4}^{m} C_i^3\,C_i^4 = 35\,C_{m+1}^8 + 60\,C_{m+1}^7 + 30\,C_{m+1}^6 + 4\,C_{m+1}^5.$$

GH. D. SIMIONESCU.

4801. Dacă a_1, a_2, a_3 sunt trei cantităţi complexe, se cere condiţiunea ca expresia:

$$E = a_1^{a_2^{a_3}}$$

să fie un număr real.

HAR. P. IONESCU.

4802. Să se verifice că expresiunea:

$$\frac{(x+\sqrt[3]{xyz})(y+\sqrt[3]{xyz})}{(x+\sqrt[3]{xyz})(y-\sqrt[3]{xyz})} + \frac{(y+\sqrt[3]{xyz})(z+\sqrt[3]{xyz})}{(y-\sqrt[3]{xyz})(z-\sqrt[3]{xyz})} + \frac{(z+\sqrt[3]{xyz})(x+\sqrt[3]{xyz})}{(z-\sqrt[3]{xyz})(x-\sqrt[3]{xyz})}$$

este independentă de x, y, z.

GH. VASILIU.

4803. Fie ABC un triunghiu, G centrul de greutate şi G_a, G_b, G_c simetricele sale în raport cu bisectoarele. Dacă $a > b > c$, să se stabilească relaţiunile:

$$\frac{\overline{GG_a}}{\sin\frac{A}{2}} - \frac{\overline{GG_b}}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{\overline{GG_c}}{\sin\frac{C}{2}} = 0;$$

$$\overline{GG_a}\cdot\cos\frac{A}{2} - \overline{GG_b}\cdot\cos\frac{B}{2} + \overline{GG_c}\cdot\cos\frac{C}{2} = 0.$$

C. IONESCU-BUJOR.

4804. Să se găsească un punct P în planul unui triunghiu ABC, astfel ca suma:

$$\operatorname{cotg}\widehat{PAB} + \operatorname{cotg}\widehat{PBC} + \operatorname{cotg}\widehat{PCA}$$

să fie minimă.

ION C. SCHILERU-DILI.

4805. Dându-se determinaţii:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_j & \cos^2\omega_j \end{vmatrix} ; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \sin\omega_j & \sin^2\omega_j \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_j & \sin^2\omega_j \end{vmatrix} ; \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & \sin\omega_j & \cos^2\omega_j \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2, 3),$$

să se demonstreze relaţia:

$$D_1 - D_2 + i(D_3 + D_4) =$$

$$8 \sin\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \sin\frac{\omega_2 - \omega_3}{2} \sin\frac{\omega_1 - \omega_3}{2} \cdot \Pi\left[\cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - i \sin\frac{\omega_1 + \omega_3}{2}\right],$$

unde $i = \sqrt{-2}$.

LT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

4806. Fie

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m , a_0 > 0$$

şi A_n, G_n *media aritmetică* şi *geometrică* a cantităţilor $f(1)$, $f(2), \ldots, f(n)$.

Să se arate că:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_n}{G_n} = \frac{e^m}{m+1} .$$

T. POPOVICIU.

ERATĂ. 1°. La pag. 369 în formula rândului 3 de jos se citeşte $\Sigma C_i e^{ri\theta}$ în loc de $\Sigma e_i c^{ri\theta}$.

2°. La pag. 370 la finele soluţiei problemei 2556 se înlocueşte G-L A. B. prin G-L GH. B.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Apostol V. Radu (4585, 682, 751, 87); *Basacov G.* (P); *Bucurenciu I. V.* (4785, 87); *Ciurescu I. Radu* (4725, 85); *Cojocaru P. Petre* (4752); *Comloșan Cornelia* (4789); *Constantinescu N. I.* (E); *Deciulescu D. G.* (4787); *Deutsch Adolf* (4778); *Dimitriu Călin Ion* (4753); *Florescu L. Victor* (4173, 595, 665, 737, 51, 73, 78, 84, 87, 89); *Gavrilescu N. Const.* (4573, 665, 725, 52, 60, 84, 87); *Hermann Victor* (4733, 81, C, P); *Ilie A. Ioan* (4695, P); *Jareghie V. Ioan* (4739); *Mavrodin D-trie* (4674, 752, 54, 81, P); *Milu I. Nicolae* (4682, 737, 87, 89); *Nadola T. Andrei* (4764); *Negoiță M. V. Panait Locot.* (4773, 85, 88, 89, P); *Negrea A. Mircea Leonte* (4733, 78, 81, 89, 93); *Pană A.* (4735); *Parepeanu C. Ion Subloc.* (4409, 78, 526, 27, 54, 56, 68, 702, 25, 38, 51, 73, 78, 82, 84, 87, 88, 89, N, P); *Petrescu Benone* (4787, 89); *Popa D. Mircea* (4753, P); *Popescu N. C.* (R); *Popescu-Zorica Alex.* (4585, 625, 737); *Rădulescu G. Oct.* (4735); *Roșculeț N. Marcel* (4743, 48, 60); *Stănculescu I.* (4787, 89); *Stănculescu M.* (4787); *Ștefănescu D. Nic.* (4787, 89); *Stoian S. E.* (4787); *Thébault V.* (A, P); *Tilică C. Șt.* (4676, 712, 53, 66, P); *Vasilescn-Stabu M.* (4760, 82); *Vlad C. I. Mihai Subloc.* (4773, 87); *Zamfirescu Gh. I. Locot.* (P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe **o singură parte a foii și nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Folle vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE"

Colecţiunea *„Gazetei Matematice"* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN**

C. 43848

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLII

NUMĂRUL 9. — MAI 1937

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII"

SUMARUL

1. Două aritmetici vechi anonime . . *Victor Marian.*
2. Cercuri asociate unui triunghiu . . *V. Thébault.*
3. Asupra cercurilor ortogonale . . . *C. Ionescu-Bujor.*
4. Observațiuni asupra problemei 4563. *Alexandra Al. Vasilescu.*
5. Note Matematice: 40 — 41.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 171, 4423, 4562, 4735, 4747.
11. Exerciții: 22 — 24.
12. Probleme propuse: 4807 — 4818.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1937

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer-Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **D. Stan**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1936 şi nerezolvate sunt enumărate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4724, 26, 31, 34, 42, 49, 61, 68, 70, 72, 75, 79, 80, 83, 86, 90, 91, 92, 94, 96, 97, 98, 801, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	220	260	80
5— 8 „	375	425	100
9—16 „	620	700	160
Coperta	120	160	80

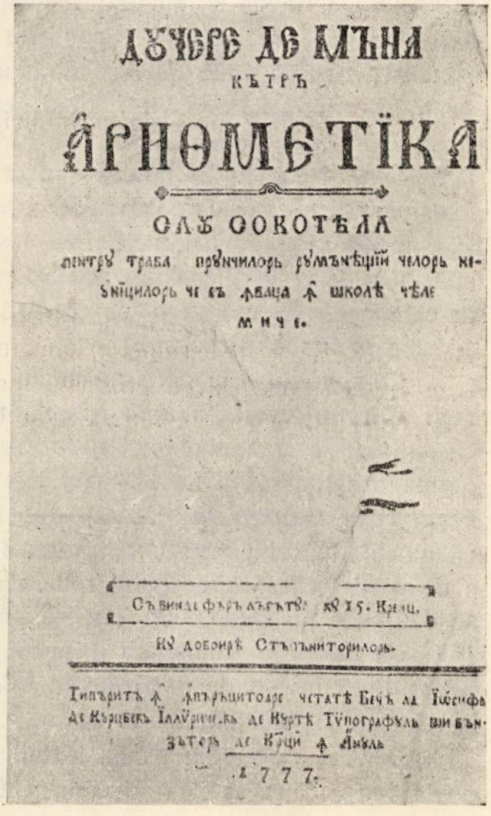
DOUĂ ARITMETICI VECHI ANONIME

Printre vechile aritmetici româneşti, îndeosebi dintre cele apărute la Viena sau la Buda, se află câteva anonime. Astfel e *Aritmetica germano-română* din Viena — dela apariţia căreia se împlinesc anul acesta 160 de ani — şi Aritmetica dela 1806 din Buda (vezi articolul D-lui profesor I. IONESCU din *Gazeta Matematică*, anul XLI, pag. 20). Cu toate că cea dintâi a avut trei ediţii, iar a doua nu mai puţin de cinci, niciuna nu poartă vre-o indicaţie, niciuna n'are prefaţă,—din care să putem afla, sau măcar ghici, pe autorul ori traducătorul lor. Pentru cunoaşterea trecutului nostru matematic e însă important să ştim cui datorim aceste aritmetici sau, cel puţin, cui s'ar putea atribui ele.

* * *

Despre cea dintâi, Aritmetica dela 1777, am spus, într'un articol din *Gazeta Matematică*, Anul XLI, pag. 515, că textul românesc s'ar datori lui T. IANCOVICI de Mirievo. Două argumente par a confirma această părere.

Intâiul ar fi însăşi împrejurările în care a apărut această cărticică. Se ştie anume că după desfiinţarea,—în 1763,—a ordinului jezuiţilor, MARIA THERESIA a reformat întreg învăţământul din Imperiul Austriac, punând bazele învăţământului laic conform cu a ei deviză „*schola est politicum*". In ce priveşte învăţământul primar şi normal, împărăteasa şi-a ales ca sfătuitor pe cunoscutul pedagog


ДѢЧЕРЕ ДЕ МѢНА
КѢТРѢ
ÂРНѲМЕТЇКА
СѦ ФОКОТѢЛА
пентрѫ трѧба прѫнчилорь рѫмънѣщій челорь кі-
нѣпилорь чі съ ѧфлѧ ѧ школѣ чѣле
мічі.
Съ винде фрѣ акѣтѫ кѫ х 5. Крайц.
Кѫ доѣнрѣ Стѣпѫнїторилорь.
Типъритѣ ѧ Ѧнпѫрѫцїторїе чѣтатѣ Бечѣ ѧл Їѡсифѫ
де Кѫрцбекъ Їллѫрїчїлъ де Кѫртѣ Тѫпографѫлъ шї бъ-
зѣторь де Кѫрцї ѧ Ѧнѣла
1777.

Foaia de titlu a Aritmeticii din 1777.

I. von FELBIGER, care a deschis la Viena şcoala normală dela Sf. Ana. Scopul MARIEI THERESIA era ca toate naţiunile locuitoare în vastul său imperiu să se cultive în limba lor, în care scop trebuiau să trimită la şcoala dela Sf. Ana pe cei mai buni învăţători spre a-şi însuşi metodele pedagogice ale lui FELBIGER şi a traduce în limba lor maternă manualele de şcoală oficiale, singurele cari era permis să fie utilizate în învăţământ. E interesant că toate aceste manuale au fost făcute de FELBIGER şi au apărut anonime.

Din Banat, care pe atunci era o provincie cu totul independentă de Ardeal, din partea şcoalelor gr. ort. române şi sârbeşti, a fost trimis la Viena, în 1776, chiar directorul acestor şcoale naţionale, sârbul T. IANCOVICI, un admirabil om al şcoalei. A. v. HELFERT în cartea sa *„Die österreichische Volksschule.* Prag 1860" — din care am luat şi eu informaţiile de mai sus — arată că IANCOVICI a tradus şi adaptat manualele lui FELBIGER în limba sârbească. Ele au apărut, — conform obiceiului, — tot anonime. HELBERT citează, între altele, titlul unei aritmetici germano-sârbeşti, datorită lui IANCOVICI. Titlul german al cărţii este: *„Anleitung zur Rechenkunst"* etc., iar cel sârbesc: *„Rukovodstvieko Arithmetiki"* etc. In Biblioteca Universităţii din Cluj am dat de un exemplar al acestei cărţi. Ea n'are prefaţă, e de formatul 8° mic şi cuprinde 155 de pagini. Cartea e scrisă cu litere cirilice şi a apărut în 1777 la Viena în aceeaşi tipografie a lui KURZBECK, în care a eşit şi cea germano-română. Aceasta e prima aritmetică apărută în limba sârbească.

Comparând cele două aritmetici am constatat că textul german al lor e identic, anume cu cel oficial al lui FELBIGER. Faptul că Aritmetica germano-română a apărut în acelaşi an cu cea germano-sârbească a lui IANCOVICI şi în folosul *„pruncilor rumâneştii celor neuniţiloru"* de sub direcţia lui, mă îndeamnă să cred că numai dânsul poate fi traducătorul ei. D-l profesor O. GHIBU, e de părere că şi Abecedarul român dela 1777, apărut la Viena, se datoreşte lui IANCOVICI. Ţin să mai adaug că IANCOVICI la 1777 s'a întors la Timişoara de unde nu peste mult a plecat în Rusia, fiind învitat de împărăteasa ECATERINA II, spre a o ajuta la reforma învăţământului de acolo.

De altă parte, din însuşi textul românesc al Aritmeticii se poate vedea imediat că traducerea e făcută de un străin. Stilul e

greoiu şi fraza încâlcită. E suficient, cred, să dau ca unicul exemplu din această Aritmetică, definiţia înmulţirii în comparaţie cu cea din Aritmetica lui ŞINCAI, elev şi el pela 1780 al aceluiaşi FELBIGER şi traducător al aceleiaşi Aritmetici oficiale.

Aritmetica din 1777.

Ounu dentru doo înaintea puse numerile ounulu cu altul atete ori ale adaoge, şi atete ori ale lua, câte ori întru sine cele altu numerulu ounişoarele cuprinde să chiamă aface multiplicaţie.

Aritmetica lui Şincai, 1785.

A adăoga deatâtea ori oun Numer dintre doi Numeri, carii sau dat, sau ai lua deatâtea ori, câte unimi cuprinde însine celalalt însemnează ai înmulţi.

In sfârşit sunt mai multe indicaţii în text cari arată că traducătorul Aritmeticii a fost un sârb. Intr'adevăr găsim în loc de *punct* cuvântul sârbesc *tocica,* în loc de *virgulă* sârbescul *certa,* iar în loc de *şi aşa mai departe* cunoscutul *iproci.* Mai interesant e că traducătorul nu cunoaşte cuvântul românesc *greutate* corespunzător nemţescului *Gewicht* astfel că locul acestui termen a rămas gol (pag. 97) chiar şi în ediţia a treia a cărţii.

In consecinţă se poate afirma că Aritmetica dela 1777 e tradusă dupa textul german al lui FELBIGER, foarte probabil de către T. IANCOVICI.

ДУЧЕРЕ ДЕ МЪНА
КЪТРЪ
АРИѲМЕТЇКА
СЛУ СОКОТѢЛА
1785.

Foaia de titlu a ediţiei din 1785.

(Va urma).

VICTOR MARIAN.

CERCURI ASOCIATE UNUI TRIUNGHIU

1. Se cunoaşte următoarea teoremă de geometrie plană:

Dacă trei circonferinţe, (ω_a), (ω_b), (ω_c), *care trec prin vârfurile unui triunghiu* A, B, C *ale triunghiului* ABC, *se întâlnesc două câte două în punctele* A_1, B_1, C_1 *pe laturile triunghiului, atunci acele circonferinţe trec printr'un acelaşi punct* Ω.

Reciproc, *dacă trei circonferinţe* (ω_a), (ω_b), (ω_c), *trecând prin acelaşi punct* Ω, *se taie două câte două în punctele* A_1, B_1, C_1, *există o infinitate de triunghiuri ale căror laturi trec prin* A_1, B_1, C_1 *şi ale căror vârfuri sunt pe cele trei circonferinţe.*

Toate aceste triunghiuri sunt asemeni între ele; cel mai mare dintre ele are laturile perpendiculare pe corzile ΩA_1, ΩB_1, ΩC_1; cel mai mic se reduce la Ω şi laturile sale sunt dirijate după ΩA_1, ΩB_1, ΩC_1.

2. Pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC înscris în cercul (O) de rază R, urmând sensul BCAB să notăm respectiv punctele A_1 şi A_2, B_1 şi B_2, C_1 şi C_2 aşa în cât mediatricele segmentelor A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 să concure în un punct P.

Cercurile (ω_a), (ω_b), (ω_c) şi (ω'_a), (ω'_b), (ω'_c) circumscrise triunghiurilor AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 şi AB_2C_2, BC_2A_2, CA_2B_2, se întâlnesc în punctele Ω_1 şi Ω_2. Fie A'_1, B'_1, C'_1 şi A'_2, B'_2, C'_2 punctele diametral opuse vârfurilor A, B, C ale triunghiului ABC în cercurile (ω_a), (ω_b), (ω_c) şi (ω'_a), (ω'_b), (ω'_c).

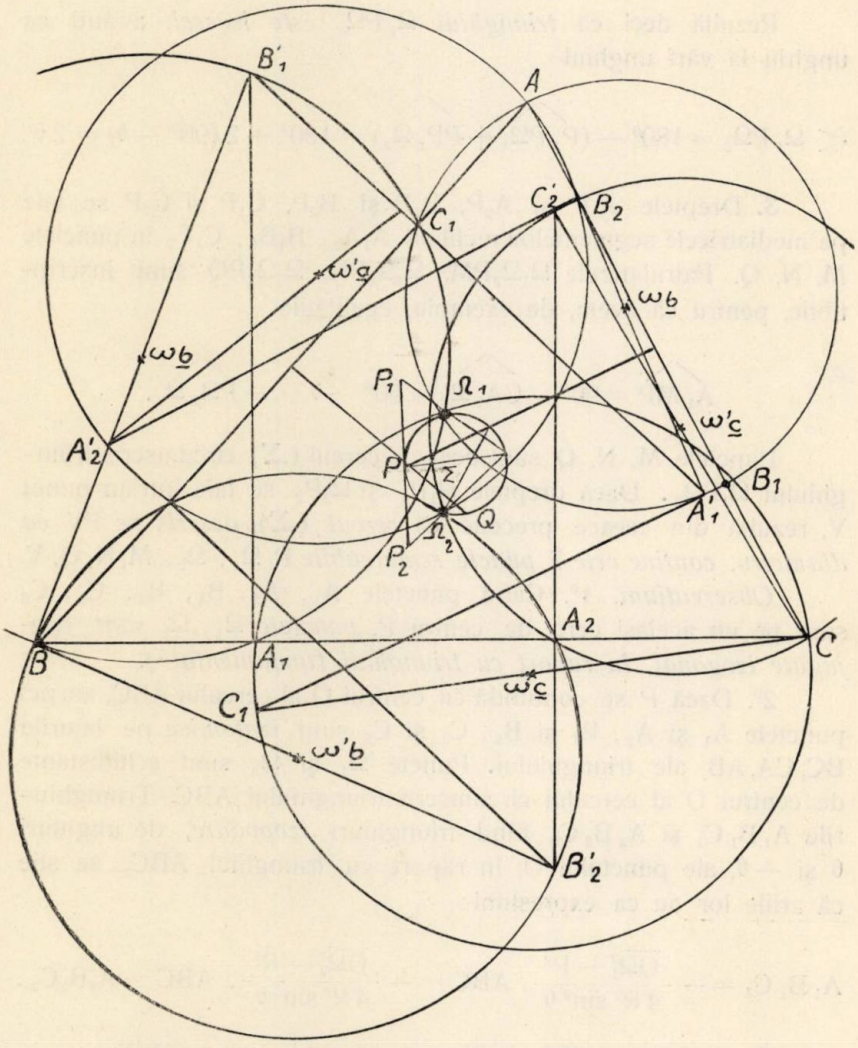
Triunghiurile $A'_1B'_1C'_1$ şi $A'_2B'_2C'_2$ sunt direct asemeni triunghiului ABC şi laturile lor sunt perpendiculare pe BC, CA, AB în punctele A_1, B_1, C_1 şi A_2, B_2, C_2. Aceste triunghiuri, $A'_1B'_1C'_1$ şi $A'_2B'_2C'_2$, derivă de altfel din triunghiul ABC prin omotetii de centre Ω_1 şi Ω_2 şi rotaţii de 90^0 în jurul lui Ω_1 şi Ω_2. Pentru că mediatricele segmentelor rectilinii A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt concurente, triunghiurile $A'_1B'_1C'_1$ şi $A'_2B'_2C'_2$ sunt simetrice în raport cu P. Raporturile de omotetie ale triunghiurilor $A'_1B'_1C'_1$ şi ABC, $A'_2B'_2C'_2$ şi ABC sunt

$$k_1 = \frac{\Omega_1 A_1}{\Omega_1 A} = \operatorname{cotg} \theta \quad \text{şi} \quad k_2 = \frac{\Omega_2 A_2}{\Omega_2 A} = -\operatorname{cotg} \theta$$

θ şi $-\theta$ fiind unghiurile sub care dreptele Ω_1A_1, Ω_1B_1, Ω_1C_1 şi Ω_2A_2, Ω_2B_2, Ω_2C_2 taie respectiv pe BC, CA, AB [1]).

1) V. THÉBAULT. Annales de la Société scientifique de Bruxelles. 1921–242.

Fie P_1 şi P_2 omoloagele punctului P pentru triunghiurile $A'_1B'_1C'_1$ şi $A'_2B'_2C'_2$. Triunghiurile Ω_1PP_1 şi Ω_2PP_2 sunt drep-



tunghice în Ω_1 şi Ω_2; cum P_1 şi P_2 sunt simetrice în raport cu P:

$$\Omega_1 P = P\Omega_2 .$$

Mai mult, avem şi egalităţile

$$\measuredangle PP_1\Omega_1 = \measuredangle PP_2\Omega_2 = \theta.$$

Rezultă deci că *triunghiul* $\Omega_1 P\Omega_2$ *este isoscel,* având ca unghiu la vârf unghiul

$$\measuredangle \Omega_1 P\Omega_2 = 180^0 - (\overset{\frown}{P_1 P\Omega_1} + \overset{\frown}{PP_2\Omega_2}) = 180^0 - 2(90^0 - \theta) = 2\theta.$$

3. Dreptele A_1P şi A_2P, B_1P şi B_2P, C_1P şi C_2P se taie pe mediatricele segmentelor rectilinii A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 în punctele M, N, Q. Patrulaterele $\Omega_1\Omega_2PM$, $\Omega_1\Omega_2PN$, $\Omega_1\Omega_2PQ$ sunt inscriptibile, pentru că avem, de exemplu, egalităţile

$$\overset{\frown}{A_1MP} = 90^0 - \overset{\frown}{CA_1\Omega_1} = 90^0 - \theta = -\overset{\frown}{P\Omega_2\Omega_1}.$$

Punctele M, N, Q sunt deci pe cercul (Σ) circumscris triunghiului $\Omega_1P\Omega_2$. Dacă dreptele Ω_1P_1 şi Ω_2P_2 se taie într'un punct V, rezultă din ceeace precede că *cercul* (Σ), *descris pe* PV *ca diametru, conţine cele 7 puncte remarcabile* P, Ω_1, Ω_2, M, N, Q, V.

Observaţiuni. 1°. Când punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sunt pe un acelaşi cerc, de centru P, *punctele* Ω_1, Ω_2 *sunt conjugate izogonal, în raport cu triunghiul fundamental* [1]).

2°. Dacă P se confundă cu centrul O al cercului ABC, atunci punctele A_1 şi A_2, B_1 şi B_2, C_1 şi C_2 sunt *izotomice* pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului. Puncte Ω_1 şi Ω_2 sunt echidistante de centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC. Triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ fiind triunghiuri *izopodare,* de unghiuri θ şi $-\theta$, ale punctului O, în raport cu triunghiul ABC, se ştie că ariile lor au ca expresiuni:

$$A_1B_1C_1 = -\frac{\overline{O\Omega_1^2} - R^2}{4R^2\sin^2\theta}\cdot ABC = -\frac{\overline{O\Omega_2^2} - R^2}{4R^2\sin^2\theta}\cdot ABC = A_2B_2C_2.$$

Se regăseşte astfel următoarea teoremă cunoscută [2]):

1) J. NEUBERG. *Journal de Vuibert,* 44-e anneé, p. 124.
2) E. CESARO. *Nouvelle correspondance,* 1880 — 429.

In un triunghiu ABC, *se înscriu două triunghiuri* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, *aşa în cât vârfurile situate pe o aceiaşi latură să fie egal depărtate de mijlocul acestei laturi. Cele două triunghiuri astfel construite sunt echivalente.*

3°. In fine dacă $A_1 \equiv C$ şi $A_2 \equiv B$, $B_1 \equiv A$ şi $B_2 \equiv C$, $C_1 \equiv B$, $C_2 \equiv A$, cercul (ω_a) atinge pe AC în A şi trece prin B, cercul (ω'_a) atinge pe AB în A şi trece prin B; ... In acest caz punctele Ω_1 şi Ω_2, $(O\Omega_1 = O\Omega_2)$ *coincid cu punctele lui* BROCARD *al triunghiului* ABC. Cercul (Σ) al *celor şapte puncte,* definite anterior, devine cercul lui BROCARD.

Plecând de la figura cazului general pe care l-am considerat, se pot regăsi majoritatea proprietăţilor punctelor şi cercurilor lui BROCARD al triunghiului fondamental.

V. THÉBAULT.
(Le Mans, France).

ASUPRA CERCURILOR ORTOGONALE

Vom considera trei cercuri C_a, C_b, C_c de raze r_a, r_b, r_c, având centrele în vârfurile A, B, C ale unui triunghiu.

1°. *Cu centrele în vârfurile unui triunghiu se pot construi trei cercuri ortogonale două câte două.*

Dacă:

$$r_a^2 = \frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)\ ,\ r_b^2 = \frac{1}{2}(c^2+a^2-b^2)\ ,\ r_c^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) \quad (1)$$

se vede că:

$$r_b^2 + r_c^2 = a^2,$$

relaţie ce exprimă ortogonalitatea cercurilor C_b, C_c, etc.

Să presupunem că ar mai exista un grup de trei cercuri ortogonale două câte două C'_a, C'_b, C'_c, de raze r'_a, r'_b, r'_c având centrele în A, B, C. Va trebui să avem:

$$r'^2_a + r'^2_b = c^2\ ,\ r'^2_b + r'^2_c = a^2\ ,\ r'^2_c + r'^2_a = b^2$$

de unde:

$$r'^2_a = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = r_a^2.$$

Concluzii:

a) *Pentru un triunghiu dat, există un singur grup de trei cercuri ortogonale două câte două, având centrele în vârfurile triunghiului.*

b) *Dacă două cercuri, având centrele în vârfurile* B, C *ale triunghiului* ABC, *sunt ortogonale unui cerc cu centrul în* A *şi raza:*

$$r_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2),$$

cercurile sunt ortogonale între ele.

Pentrucă:

$$r_a^2 + \beta^2 = c^2 \qquad \beta^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)$$

$$r_a^2 + \gamma^2 = b^2 \qquad \gamma^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$$

deci

$$\beta^2 + \gamma^2 = a^2.$$

2°. *Centrul radical al celor trei cercuri este ortocentrul triunghiului,* pentrucă tangentele duse din A cercurilor C_b, C_c fiind egale ca raze ale cercului C_a, ortogonal celor două cercuri, A se află pe coarda comună a cercurilor C_b, C_c.

3°. *Pentru ca un triunghiu* ABC *să admită un grup de trei cercuri ortogonale două câte două, cu centrele în vârfurile triunghiului, e necesar ca triunghiul să aibă unghiurile ascuţite.*

Pentru ca r_a^2 să existe, trebue ca:

$$b^2 + c^2 - a^2 > 0.$$

Sau:

$$2bc \cos A > 0,$$

deci:

$$A < 90^0.$$

4°. Vom stabili o serie de relaţii între elementele triunghiului ABC şi razele celor trei cercuri ortogonale două câte două, având centrele în vârfurile triunghiului:

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (2)$$

Din (1) se deduce:

$$r_a^2 = bc \cos A$$

şi cum:

$$bc = \frac{2S}{\sin A},$$

$$r_a^2 = 2S \operatorname{cotg} A \tag{3}$$

de unde:

$$\boxed{r_a^2 r_b^2 + r_b^2 r_c^2 + r_c^2 r_a^2 = 4S^2} \tag{4}$$

Reluăm relaţia:

$$r_a^2 = bc \cos A.$$

Deducem:

$$r_a^2 r_b^2 r_c^2 = a^2 b^2 c^2 \cos A \cos B \cos C;$$

dar:

$$a' = a \cos A$$

(a', b', c' fiind laturile triunghiului ortic), deci:

$$\boxed{r_a^2 r_b^2 r_c^2 = abc\, a'b'c'} \tag{5}$$

Produsul razelor celor trei cercuri ortogonale două câte două, cu centrele în vârfurile triunghiului, e medie geometrică între produsul laturilor triunghiului de referinţă şi produsul laturilor triunghiului ortic.

Deasemenea din:

$$r_a^2 = bc \cos A,$$

obţinem:

$$\frac{a^2 r_a^2}{a'} = \frac{b^2 r_b^2}{b'} = \frac{c^2 r_c^2}{c'} = abc \tag{6}$$

şi

$$a^2 r_a^2 + b^2 r_b^2 + c^2 r_c^2 = 2p'abc \quad (2p' = a' + b' + c'). \tag{6'}$$

Divizând (6') cu (5),

$$\sum \frac{a^2}{r_b^2 r_c^2} = \frac{2p'}{a'b'c'}$$

şi cum $a'b'c' = 2Rp'r'$ (r' fiind raza cercului înscris triunghiului ortic),

$$\boxed{\frac{a^2}{r_b^2\, r_c^2} + \frac{b^2}{r_c^2\, r_a^2} + \frac{c^2}{r_a^2\, r_b^2} = \frac{1}{Rr'}} \tag{7}$$

Dacă în relaţia:

$$r_b^2 + r_c^2 = a^2$$

împărţim cu $r_b^2\, r_c^2$, avem:

$$\frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} = \frac{a^2}{r_b^2\, r_c^2}.$$

Insumând relaţiile analoage,

$$\frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} = \frac{1}{2} \sum \frac{a^2}{r_b^2\, r_c^2},$$

deci:

$$\boxed{\frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} = \frac{1}{2Rr'}} \tag{8}$$

* * *

5°. Vom spune că n cercuri $C_1, C_2, \ldots C_n$ formează un lanţ de cercuri ortogonale atunci când C_i este ortogonal cu C_{i+1} ($i = 1,2\ldots,n-1$).

Cele n cercuri formează un lanţ închis de cercuri ortogonale atunci când condiţiilor precedente se adaugă: C_n este ortogonal cu C_1.

Poligonul $A_1 A_2 \ldots A_n$, format de centrele cercurilor, vom spune că admite un lanţ închis de cercuri ortogonale.

6. *Fie poligonul cu* $2n+1$ *laturi* $A_1 A_2 \ldots A_{2n+1}$, *în care:*

$$\overline{A_1 A_2}^2 + \overline{A_3 A_4}^2 + \ldots + \overline{A_{2n+1} A_1}^2 > \overline{A_2 A_3}^2 + \overline{A_4 A_5}^2 + \ldots + \overline{A_{2n} A_{2n+1}}^2.$$

Dacă se construeşte, cu centrul în A_1, *un cerc de rază* r_1:

$$2r_1^2 = \overline{A_1 A_2}^2 - \overline{A_2 A_3}^2 + \overline{A_3 A_4}^2 - \ldots - \overline{A_{2n} A_{2n+1}}^2 + \overline{A_{2n+1} A_1}^2,$$

apoi cu centrul în A_2, *un cerc* C_2 *ortogonal cu* C_1, *cu centrul în* A_3 *un cerc* C_3 *ortogonal cu* $C_2 \ldots$ *până la* C_{2n+1} *construit cu centrul în* A_{2n+1}, *ortogonal cu* $C_{2n} - C_1 C_2 \ldots C_{2n+1}$ *este un lanţ închis de cercuri ortogonale şi este singurul admis de poligon.*

Va trebui dovedită ortogonalitatea cercurilor C_{2n+1}, C_1. Pentru aceasta se calculează:

$$r_2^2 = \overline{A_1 A_2}^2 - r_1^2 = \frac{1}{2}(\overline{A_2 A_3}^2 - \overline{A_3 A_4}^2 + \overline{A_4 A_5}^2 - \ldots - \overline{A_{2n+1}A_1}^2 + \overline{A_1 A_2}^2).$$

La fel se calculează r_3^2 etc.

$$r_{2n+1}^2 = \frac{1}{2}(\overline{A_{2n+1}A_1}^2 - \overline{A_1 A_2}^2 + \overline{A_2 A_3}^2 - \ldots + \overline{A_{2n}A_{2n+1}}^2)$$

şi se vede că:

$$r_1^2 + r_{2n+1}^2 = \overline{A_1 A_{2n+1}}^2.$$

Deci un poligon cu număr impar de laturi admite un lanţ închis de cercuri ortogonale. Vom dovedi că este unicul, admiţând existenţa unui alt lanţ închis de cercuri ortogonale $C'_1 C'_2 \ldots C'_{2n+1}$, de raze $r'_1, r'_2 \ldots r'_{2n+1}$. Vom avea:

$$r'^2_1 + r'^2_2 + \ldots + r'^2_{2n+1} = \frac{1}{2}(\overline{A_1 A_2}^2 + \overline{A_2 A_3}^2 + \ldots + \overline{A_{2n+1}A_1}^2),$$

cum:

$$r'^2_2 + r'^2_3 = \overline{A_2 A_3}^2, \quad r'^2_4 + r'^2_5 = \overline{A_4 A_5}^2, \ldots r'^2_{2n} + r'^2_{2n+1} = \overline{A_{2n} A_{2n+1}}^2$$

urmează:

$$r'^2_1 = \frac{1}{2}(\overline{A_1 A_2}^2 - \overline{A_2 A_3}^2 + \overline{A_3 A_4}^2 - \ldots + \overline{A_{2n+1}A_1}^2) = r_1^2.$$

7°. Poligonul cu număr par de laturi admite condiţionat un lanţ închis de cercuri ortogonale; însă dacă admite unul, admite o infinitate. Anume:

Fie poligonul cu 2n laturi $A_1 A_2 \ldots A_{2n}$. *Dacă se construeşte, cu centrul în* A_1, *un cerc* C_1 *de rază oarecare, apoi cu centrul în* A_2, *un cerc* C_2, *ortogonal cu* C_1, *cu centrul în* A_3 *un cerc* C_3 *ortogonal cu* C_2 *şi astfel până la* C_{2n} *construit cu centrul în* A_{2n}, *ortogonal cu* C_{2n-1}, *condiţia necesară şi suficientă pentru ca* $C_1 C_2 \ldots C_{2n}$ *să fie un lanţ închis de cercuri ortogonale, este:*

$$\overline{A_1 A_2}^2 + \overline{A_3 A_4}^2 + \ldots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}}^2 = \overline{A_2 A_3}^2 + \overline{A_4 A_5}^2 + \ldots + \overline{A_{2n} A_1}^2.$$

Presupunem condiţia împlinită. Vom arăta despre cercurile $C_1 C_{2n}$ că sunt ortogonale. Fie r_i raza Cercului C_i.

$$r_1^2 + r_2^2 = \overline{A_1 A_2}^2, \quad r_3^2 + r_4^2 = \overline{A_3 A_4}^2, \ldots r_{2n-1}^2 + r_{2n}^2 = \overline{A_{2n-1}A_{2n}}^2$$

deci:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_{2n}^2 = \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \ldots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}}^2 \qquad (\alpha)$$

apoi din:

$$r_2^2 + r_3^2 = \overline{A_2A_3}^2 \,,\; r_4^2 + r_5^2 = \overline{A_4A_5}^2 \ldots\; r_{2n-2}^2 + r_{2n-1}^2 = \overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}^2$$

$$r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_{2n-1}^2 = \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2 + \ldots + \overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}^2 \qquad (\beta)$$

Scăzând (β) din (α),

$$r_1^2 + r_{2n}^2 = \overline{A_{2n}A_1}^2 . \qquad (\gamma)$$

Deci condiția e suficientă. E și necesară, pentrucă, admițând despre $C_1C_2\ldots C_{2n}$ că formează un lanț închis de cercuri ortogonale, egalitățile α, β, γ, sunt adevărate.

8°. *Consecințe:* a) *Dacă în poligonul* $A_1A_2\ldots A_{2n}$,

$$\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \ldots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}}^2 = \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2 + \ldots + \overline{A_{2n}A_1}^2 ,$$

$\Delta A_1A_2A_{2n}$ *având unghiuri ascuțite, există un lanț închis de cercuri ortogonale* $C_1C_2\ldots C_{2n}$ *astfel încât* $C_2C_3\ldots C_{2n}$ *este deasemenea lanț închis de cercuri ortogonale.*

Se va lua:

$$r_1^2 = \frac{1}{2}\left(\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_1A_{2n}}^2 - \overline{A_2A_{2n}}^2\right);$$

ceeace aduce ortogonalitatea cercurilor C_2C_{2n} (1, *b*).

b) *Dacă în poligonul* $A_1A_2\ldots A_{2n}$,

$$\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \ldots = \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2 + \ldots ,$$

poate exista un lanț închis de cercuri ortogonale $C_1C_2\ldots C_{2n}$ *care se desface în două lanțuri închise de cercuri ortogonale.*

Să luăm r_1 astfel ca lanțul de cercuri ortogonale $C_1C_2\ldots C_{2i+1}$ să fie închis. Lanțul $C_2C_{2i+1}C_{2i+2}\ldots C_{2n}$ este deasemenea închis.

9°. *Există două lanțuri închise de cercuri ortogonale cu două cercuri comune.*

Fie poligoanele $A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$, $A_1A'_2\ldots A'_mA_n$ admițând lanțurile închise de cercuri ortogonale $C_1C_2\ldots C_{n-1}C_n$, $C_1C'_2\ldots C'_mC'_n$.

C_1 fiind ortogonal atât cu C_n cât și cu C'_n,

$$r_1^2 + r_n^2 = \overline{A_1A_n}^2 \,,\; r_1^2 + r'^2_n = \overline{A_1A_n}^2 .$$

Deci: $r_n = r'_n$ şi $C_n \equiv C'_n$.

Putem enunţa propoziţia astfel:

Dacă se dau două lanţuri închise de cercuri ortogonale $C_1 C_2 \ldots C_n$, $C_1 C'_2 \ldots C'_m C'_n$ *şi* C_n, C'_n *au acelaş centru,* $C_n \equiv C'_n$.

Vom numi asemenea perechi de lanţuri închise — *lanţuri închise de cercuri ortogonale, având o bază comună.*

10°. *Dacă* $C_1 C_2 \ldots C_{n-1} C_n$ *şi* $C_1 C'_2 \ldots C'_m C_n$ *sunt două lanţuri închise de cercuri ortogonale, având o bază comună, lanţul de cercuri ortogonale* $C_1 C_2 \ldots C_n C'_m \ldots C'_2$ *e închis.*

11°. *Dacă* $A_1 A_2 \ldots A_{2n-1} A_{2n}$ *şi* $A_1 A'_2 \ldots A'_{2n-1} A_{2n}$ *sunt două poligoane care admit lanţuri închise de cercuri ortogonale, există lanţurile închise* $C_1 C_2 \ldots C_{2n}$ *şi* $C_1 C'_2 \ldots C'_{2n-1} C_{2n}$ *astfel încât* $C_2 \ldots C_{2n-1} C_{2n} C'_{2n-1} \ldots C'_2$ *să fie lanţ închis de cercuri ortogonale.*

C. IONESCU-BUJOR.

OBSERVAŢIUNI ASUPRA PROBLEMEI 4563

Problema 4563, rezolvată la pagina 156, Vol. XLII, se ocupă de o figură[1]) geometrică foarte bogată în proprietăţi. Voiu da în cele ce urmează unele observaţiuni ale acestei figuri pe care o completez cu notaţiunile următoare:

— ABB_1A_2, $ABB'A''$, $ACC'A'$, ACC_1A_1, BCC_1B_2, $BCC''B''$ patratele cu centrele în O_c, $O_{c'}$; O_b, $O_{b'}$; O_a, $O_{a'}$ construite pe AB, AC şi CB ca laturi.

— P_a, P_b, P_c mijloacele laturilor triunghiului ABC.

— P'_a, P'_b, P'_c mijloacele segmentelor CM_c, AN_a, AM_a.

— M_a, N_a, M_b, N_b, M_c, N_c a doua intersecţie a cercului O_b cu $O_{c'}$, O_c cu $O_{b'}$, O_a cu $O_{c'}$, O_c cu $O_{a'}$, O_a cu $O_{b'}$, O_b cu $O_{a'}$.

— O centrul cercului ABC.

---

1) Figura care face obiectul problemei 4563 este cunoscută sub numele de figura lui VECTEN. Proprietăţile ei sunt extrem de interesante. A se vedea Nota D-lui G-L GH. BUICLIU dela pag. 401 şi 424 din *Gazeta Matematică*, Vol. XL şi Articolul D-lui V. THÉBAULT din *Mathesis* — 1934 cu titlul *Triangle bordé de carrés.*

N. R.

— H ortocentrul triunghiului ABC.

— Q_a, Q_b, Q_c simetricele punctelor A, B, C faţă de O.

— H_a, H_b, H_c picioarele înălţimilor triunghiului ABC.

— S_a, S_b, S_c simetricele punctelor A, B, C respectiv faţă de H_a, H_b, H_c.

1°. Figura $AP'_b H_a P'_c$ fiind un patrat avem

$$\overline{AM_a} = 2\,\overline{AP'_c} = \overline{AN_a} = 2\,\overline{AP'_b} = h_a\sqrt{2}$$

şi la fel pentru celelalte lungimi

$$\overline{BM_b} = \overline{BN_b} = h_b\sqrt{2} \;\; ; \;\; \overline{CM_c} = \overline{CN_c} = h_c\sqrt{2}.$$

2°. Din triunghiul dreptunghic isoscel $M_a AN_a$ şi similarele lui rezultă :

$$\overline{M_a N_a} = 2h_a \;\; ; \;\; \overline{M_b N_b} = 2h_b \;\; ; \;\; \overline{M_c N_c} = 2h_c .$$

3°. Se vede pe figură că

$$\overline{OO_b} = \overline{OP_b} + \overline{P_b O_b} .$$

Dar $\overline{OP_b}$ este tocmai mediatricea laturei AC, iar $\overline{O_b P_b}$ este jumătatea acelei laturi. Deci

$$\overline{OO_b} = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\,\text{cotgB} = \frac{b}{2}(1 + \text{cotgB}).$$

La fel

$$\overline{OO_a} = \frac{a}{2}(1 + \text{cotgA}) \;\; , \;\; \overline{OO_c} = \frac{c}{2}(1 + \text{cotgC}).$$

4°. De asemeni

$$\overline{OO_{b'}} = \overline{OO_b} - \overline{O_b O_{b'}} = \frac{1}{2}\,b\,(1 + \text{cotgB}) - b.$$

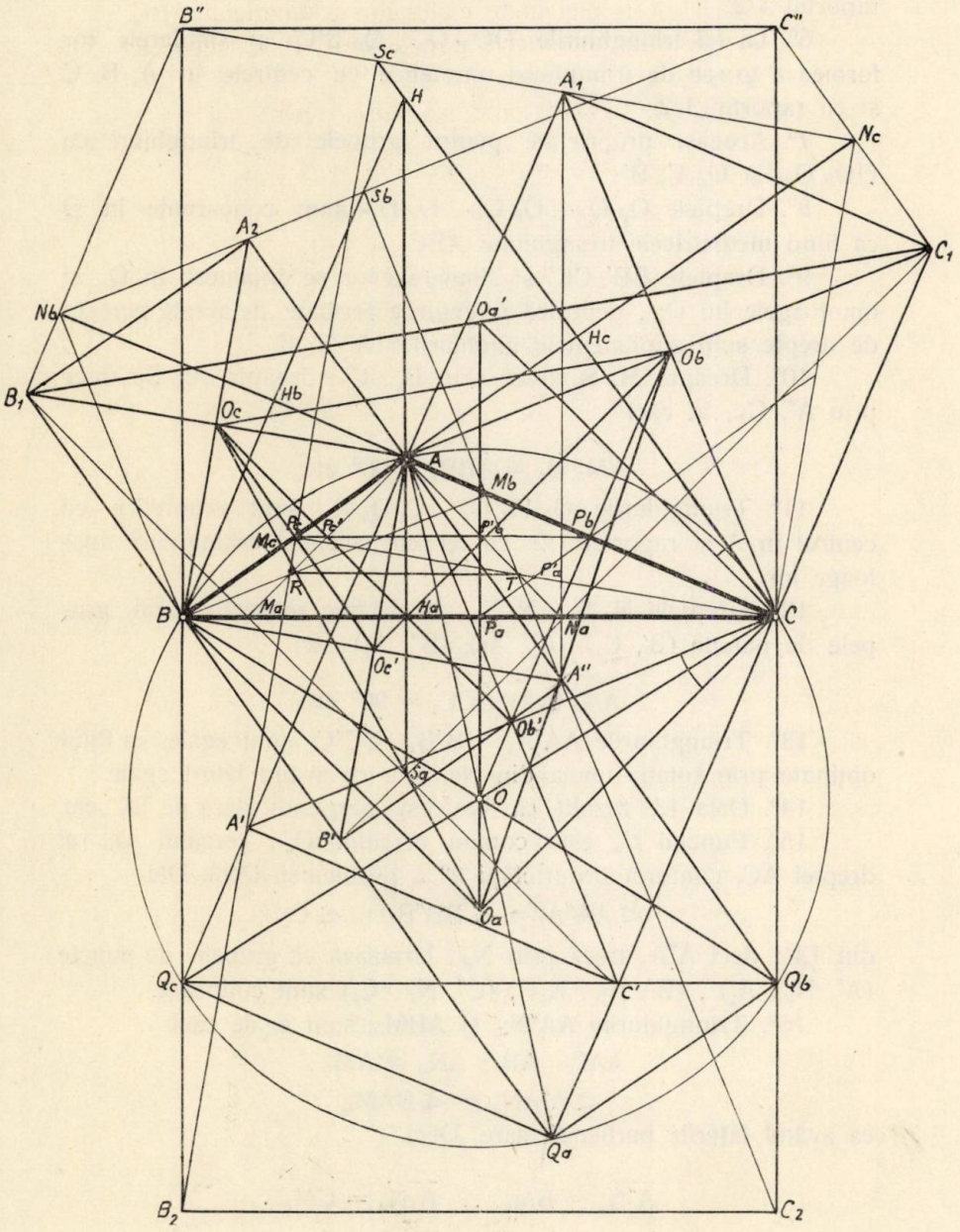
Deci :

$$\overline{OO_{a'}} = \frac{a}{2}(\text{cotgA} - 1)$$

$$\overline{OO_{b'}} = \frac{b}{2}(\text{cotgB} - 1)$$

$$\overline{OO_{c'}} = \frac{c}{2}(\text{cotgC} - 1).$$

Relaţiunile dela 3^0 şi 4^0 sunt generale pentru orice caz de figură.



5°. Triunghiurile $OO_b\,O_c$, $Q_a\,B_1C_1$ şi similarele sunt grupe de triunghiuri direct omotetice cu centrele de omotetie A, B, C şi cu raportul 1/2.

6°. La fel triunghiurile $OO_{b'}\,O_{c'}$, $Q_a\,B'C'$ şi similarele lor formează grupe de triunghiuri omotetice cu centrele în A, B, C şi cu raportul 1/2.

7°. Aceeaşi proprietate pentru grupele de triunghiuri ca $OO_b\,O_{c'}$ şi $Q_a\,C_1\,B'$.

8°. Dreptele $O_a\,O_{a'}$, $O_b\,O_{b'}$, $O_c\,O_{c'}$ sunt concurente în O ca fiind mediatricele triunghiului ABC.

9°. Dreptele BB', CC' şi similarele lor se întâlnesc în Q_a şi omoloagele lui Q_a, pentrucă unghiurile formate de aceste perechi de drepte sunt suplimentele unghiurilor A, B, C.

10°. Dreapta $M_a\,S_a$ trece prin B_1, C'; dreapta $M_b\,S_b$ trece prin A'', C_2, ... căci

$$\widehat{AM_a\,B_1} = \widehat{ABB_1} = 90^0 \text{ etc.}$$

11°. Triunghiurile $O_b\,H_a\,O_c$, $C_1\,Q_a\,B_1$ sunt omotetice cu centrul în A şi raportul 1/2. La fel cu celelalte triunghiuri analoage lor.

12°. Dreptele $N_a\,S_a$, $N_b\,S_b$, $N_c\,S_c$ trec respectiv prin grupele de puncte (B', C_1), (C'', A_2), (B'', A_1) căci

$$\widehat{AN_a\,C_1} = \widehat{ACC_1} = 90^0 \text{ etc.}$$

13°. Triunghiurile $AA''A_1$, $BB''B_1$, $CC''C_1$ sunt egale, ca fiind obţinute prin rotaţia unuia din ele. Sau ca având laturi egale.

14°. Dela 13° rezultă că A_1A'' este perpendiculară pe BC, etc.

15°. Punctul N_a este comun cercului O_c, cercului $O_{a'}$ şi dreptei AC, conform proprietăţii 2° a problemei 4563. Dar

$$\sphericalangle\, AA''A_1 = \sphericalangle\, BB''B_1 = \sphericalangle\, C$$

din 13°, deci $A''A_1$ trece prin N_a. Urmează că grupele de puncte (A'', N_a, A_1), (B'', N_b, B_1), (C'', N_c, C_1) sunt colineare.

16°. Triunghiurile $AA''N_a$ şi ABM_a sunt egale căci

$$AA'' = AB\ ;\ AN_a = AM_a\,.$$

$$\sphericalangle\, A''AN_a = \sphericalangle\, BAM_a$$

ca având laturile perpendiculare. Deci

$$\overline{A''N_a} = \overline{BM_a} \ \therefore\ \overline{A_1N_a} = \widehat{CM_a}\,.$$

17°. Dacă R şi T sunt intersecţiile (AM_a, BM_b) şi (AN_a, CM_c) triunghiurile $TN_a A''$ şi $RM_a B$ sunt egale. Deci

$$\overline{RM_a} = \overline{TN_a}$$

şi deci RT este paralelă cu BC căci

$$\sphericalangle RM_a N_a = \sphericalangle TN_a M_a = 45^0.$$

S'a văzut însă la 10° că $M_b S_b$ este perpendicular pe BM_b şi cum RAT este drept, rezultă că $M_b S_b$ trece prin T.

Aşa dar grupele de drepte AM_a, BM_b, $M_c S_c$ şi AN_a, BM_c, $M_b S_b$ sunt concurente respectiv în punctele R şi T.

18°. Din proprietatea precedentă rezultă că punctele R, M_c, A, M_b, T se găsesc pe cercul de diametru RT.

19°. Dreptele B_1C', C_1B' sunt egale şi se întâlnesc în S_a sub unghiu drept.

20°. Observ pe figură că

$$\overline{B_1C'} = \overline{B_1M_a} + \overline{C'M_a}$$

$$\overline{B_1M_a^2} = \overline{AB_1^2} - \overline{AM_a^2} = 2c^2 - 2h_a^2$$

$$\overline{C'M_a^2} = \overline{C'A^2} - \overline{AM_a^2} = 2b^2 - 2h_a^2$$

deci

$$\overline{B_1C'} = \overline{C_1B'} = \sqrt{2}\left[\sqrt{c^2 - h_a^2} + \sqrt{b^2 - h_a^2}\right].$$

Dar paranteza este tocmai

$$\overline{BH_a} + \overline{H_aC} = a$$

aşa că

$$\overline{B_1C'} = \overline{C_1B'} = a\sqrt{2}.$$

21°. Se găseşte ca la 19° că

$$B_2S_c = \left[h_c + \sqrt{a^2 - h_c^2}\right]\sqrt{2}.$$

Pe această cale şi pe calea arătată la soluţia problemei 4563 se pot găsi valorile tuturor lungimilor care interesează pe figura lui VECTEN.

ALEXANDRA AL. VASILESCU
(Clasa VII-a Lic. de fete Alba Iulia).

NOTE MATEMATICE

40. *Acum o sută de ani în lumea matematică.* Date culese în biblioteca Seminarului Matematic din Iaşi din publicaţiile timpului.

1. Citäm din memoriul lui LOBATCHEWSKI „*Géométrie Imaginaire*“, *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* Bd. 17 Berlin 1837, p. 295:

Acum aproape cinci ani, am publicat într'o revistă ştiinţifică din Cazan câteva articole despre elementele geometriei. După ce am desvoltat acolo o nouă teorie a paralelelor, am încercat să dovedesc că nimic decât observaţiile directe nu justifică afirmaţia că într'un triunghiu rectiliniu suma unghiurilor este egală cu două unghiuri drepte şi că se poate tot atât de bine face geometrie dacă nu în practică, cel puţin în analiză, admiţând ipoteza că suma unghiurilor este mai mică de cât semicerconferinţa cercului. In articolele citate ajunsesem chiar, tot prin consideraţii geometrice şi fără să mă bazez de cât pe această ipoteză, să găsesc ecuaţiile fundamentale pentru raportul între laturile şi unghiurile unui triunghiu rectiliniu; însfârşit am dat şi expresiile, generale pentru elementele diferenţiale ale liniilor curbe, ale suprafeţelor şi a volumului corpurilor în această geometrie nouă pe care vreau să o numesc *imaginară.* Totuşi, strâns atunci în limitele unui jurnal, nu cred că am tratat acest subiect în toate amănuntele necesare. Observ astă-zi că multe din teoremele pe care le-am enunţat acolo fără să le demonstrez şi din calculele lungi şi încurcate, au contribuit foarte mult să facă lucrarea mea de neînţeles şi chiar să arunce îndoială asupra adevărului pe care îl susţineam. Dar nu voiam să revin asupra acestei materii decât scriind după un plan mai larg. M'am decis totuşi să supun încă odată judecăţii savanţilor rezultatele pe care le-am obţinut, verificându-le printr'o metodă nouă. Calea pe care o voiu urma este inversă. Voiu pleca dela ecuaţiile fundamentale şi voiu încerca să le introduc în geometrie şi să arăt că ele nu pot să ducă la o absurditate sub nici un raport.

41. *Asupra unui articol al lui* E. CATALAN.

In articolul „*Sur la circonférence des neuf points*“ (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1883 — pag. 82), E. CATALAN conchide „*Voilà donc trois points, ajoutés aux neuf que l'on connaissait*“.

Vom arăta care sunt cele trei puncte ale lui E. CATALAN, apoi vom observa că ele nu stun decât trei din cele nouă cunoscute.

Triunghiul A'BC este, după CATALAN, anexa triunghiului fundamental ABC, dacă A'B şi A'C sunt simetricele dreptei BC în raport cu AB şi AC.

Există trei triunghiuri anexă ale unui triunghiu dat. Dacă numim α punctul în care AA' taie cercul ABC, se vede uşor că α este centrul cercului înscris în A'BC, de unde,

Teorema I. Cercul circumscris triunghiului ABC *conţine centrele cercurilor înscrise celor trei anexe ale lui* ABC. *Mai mult, aceste puncte sunt diametral opuse vârfurilor* A, B, C.

Se deduce apoi această ultimă teoremă a articolului:

„*Cercul celor nouă puncte, relativ la triunghiul* MNP, *conţine centrele cercurilor înscrise anexelor triunghiului ale cărui vârfuri sunt mijloacele laturilor lui* MNP“.

După aceasta, articolul e încheiat cu concluzia citată la începutul prezentei note.

Ne propunem să arătăm eroarea concluziei, prin propoziţiunea:

Centrele cercurilor înscrise anexelor triunghiului median sunt punctele euleriene ale triunghiului de referinţă.

In adevăr, centrele cercurilor înscrise anexelor triunghiului median se află, după prima parte a teoremei I, pe cercul circumscris triunghiului median, iar după a doua parte, sunt diametral opuse vârfurilor acestui triunghiu adică sunt chiar punctele euleriene.

C. IONESCU-BUJOR.

CHESTIUNI DE EXAMEN

CONCURSUL « GAZETEI MATEMATICE » DIN ANUL 1937

6–8 Mai 1937

CLASA IV-a

Geometria în spaţiu. I. Să se afle locul geometric al centrelor sferelor de mărime dată, tangente unei sfere date şi unui plan dat.

II. Se roteşte de 360°, triunghiul ABC, în jurul unei paralele xy duse prin A la BC, B şi C rămânând în plane perpendiculare pe axa xy. Fie V_a, volumul; S_a, suprafaţa totală a solidului obţinut şi h_a distanţa dela A la BC; V_b, S_b, h_b şi V_c, S_c, h_c notaţii analoage corespunzând rotaţiilor în jurul celorlalte vârfuri.

1°. Să se arate şi direct, geometric, că volumele V_a, V_b, V_c sunt duble volumelor obţinute prin rotaţiile triunghiului, respectiv, în jurul laturelor BC, CA, AB.

2°. Ce relaţie trebue să existe între laturi, pentruca să avem :

a) $6\,V_a = S_a \cdot h_a$ — ?

b) poate exista tot odată şi relaţiile

$6\,V_b = S_b \cdot h_b$, $6\,V_c = S_c \cdot h_c$. — ?

3°. Sub condiţia *a)* dela 2°, avem şi relaţia :

$$\frac{1}{V_b} + \frac{1}{V_c} = \frac{2}{V_a} .$$

Algebra. I. Trei rude primind o moştenire în valoare de 2.460.000 lei sunt obligate să plătească Statului drept impozit succesoral — în raport cu gradul lor de rudenie—prima 3% din cât primeşte, a doua 4%, iar a treia 5%.

Ştiind că prima a moştenit x lei, a doua y lei şi a treia z lei şi mai ştiind că dacă prima ar fi moştenit y lei, a doua z lei, iar a treia x lei, Statul ar fi încasat cu 7500 lei mai puţin impozit decât dacă prima ar fi moştenit y lei, a doua x lei, iar a treia z lei. Iar dacă prima ar fi moştenit z lei, a doua x lei şi a treia y lei, Statul ar fi încasat cu 3600 lei mai mult decât dacă prima ar fi moştenit z lei, a doua y lei, iar a treia x lei.

Se cere :

1. Să se arate că dacă prima ar fi moştenit x lei, a doua z lei, iar a treia y lei, Statul ar fi încasat cu 3900 lei mai puţin impozit.

2. Să se găsească partea din moştenire primită de fiecare.

II. Dacă $a + b + c = 0$,

să se arate că :

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = 3.$$

[Se va folosi identitatea :

$(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3\,(a + b)\,(b + c)\,(c + a)$].

(Ambele chestiuni obligatorii).

CLASA V-a.

Geometria plană. Se dau două cercuri O şi O' tangente exterior în punctul A. Fie Δ una din tangentele comune exterioare a acestor două cercuri, iar B şi C punctele ei de contact respectiv cu cercurile O şi O'.

O secantă variabilă ce trece prin A întâlneşte din nou cercul O în M şi cercul O' în N, iar punctul comun dreptelor MB şi NC îl notăm cu P.

1°. Să se găsească locul geometric al punctului P.

2°. Să se demonstreze că dreapta PA este perpendiculară pe secanta MN.

3°. Să se demonstreze că distanţa d dela punctul P la tangenta comună Δ este dată de relaţia:

$$d = \frac{\overline{MB} \times \overline{NC}}{\overline{BC}} .$$

Algebra I. Fie x_1 şi x_2 rădăcinile ecuaţiei:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

1°. Să se găsească relaţia ce trebue să existe între coeficienţii a, b, c astfel încât între rădăcini să existe relaţia:

$$\frac{x_1}{x_2} = m, \qquad (m \text{ fiind un număr cunoscut}).$$

2°. Să se regăsească condiţia ca o ecuaţie de gradul II să admită o rădăcină dublă.

3°. Dându-se ecuaţia:

$$x^2 - (1 + \lambda)\, x + \lambda = 0$$

să se determine λ astfel încât între rădăcini să existe relaţia dela punctul 1°.

4°. Să se arate că ecuaţiile:

1. $\qquad x^2 - (1 + m)\, x + m = 0$

2. $\qquad mx^2 - (1 + m)\, x + 1 = 0$

admit o rădăcină comună. Să se găsească această rădăcină fără a se rezolva ecuaţiile.

5°. S_n şi S'_n fiind daţi de relaţiile:

$$S_n = x_1^n + x_2^n$$

$$S'_n = x_1'^n + x_2'^n$$

unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei 1, iar x'_1, x'_2 sunt rădăcinile ecuaţiei 2, să se arate că există relaţia:

$$\boxed{S_n = m^n\, S'_n}$$

II. Să se studieze variaţia trinomului:

$$\lambda x^2 + 2(1+\lambda)x + \lambda - 1,$$

când λ variază între $-\infty$ şi $+\infty$.

(Ambele chestiuni obligatorii).

CLASA VI-a.

Trigonometria. I. 1°. Să se rezolve ecuaţia în x:

$$\frac{2}{\operatorname{cotg} x - 3\operatorname{cotg} 3x} = \operatorname{cotg} 2x + a.$$

2°. Să se arate că:

$$\frac{2}{\operatorname{cotg} x - 3\operatorname{cotg} 3x} = \operatorname{cotg} 2x + \frac{1}{2\sin 2x}.$$

II. a, b, c şi A, B, C fiind laturile şi unghiurile unui triunghiu, să se arate că:

1°. $b^3 \sin 3C - c^3 \sin 3B = 3abc \sin(B - C)$

2°. $a^3 = b^3 \cos 3C + c^3 \cos 3B + 3abc \cos(B - C)$.

Geometria în spaţiu. 1°. Se dă o piramidă triunghiulară OABC, având triunghiul ABC dreptunghic în A, iar muchia OA perpendiculară pe planul acestui triunghiu.

Dacă notăm $\sphericalangle BOC = \alpha$, să se arate că:

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB} \times \overline{OC} \cos\alpha.$$

2°. Dacă D este un punct pe muchia OA, iar E şi F proecţiile lui respectiv pe OB şi OC, să se demonstreze că avem relaţia:

$$\overline{DE}^2 + \overline{EF}^2 + \overline{FD}^2 = 2 \cdot \overline{OD}^2 \sin^2\alpha.$$

3°. Să se demonstreze că volumul V' al piramidei ODEF este dat de relaţia:

$$V' = \lambda^3 V \cos^2\alpha,$$

în care $\lambda = \frac{OD}{OA}$, iar V este volumul piramidei OABC.

4°. Cum trebue să fie piramida OABC pentru ca triunghiul DEF să fie echilateral?

CLASA VII-a

Algebra. I. Să se arate că dacă notăm prin:

$$\sigma_p = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\ldots(k+p-1),$$

atunci avem:

$$5(\sigma_4 - 6\sigma_3 + 6\sigma_2) = 6(1 - \sigma_1)(\sigma_1 - \sigma_2).$$

II. Să se calculeze derivatele funcţiunilor:

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arccos\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arccos\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

$$z = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{x},$$

şi să se explice rezultatul.

Geometria descriptivă. Epura se execută pe pagina a treia a foii de hârtie. Linia pământului la 150 mm de jos în sus.

Un plan P, este determinat de o dreaptă de profil D (ale cărei proiecţiuni se găsesc la 60 mm spre dreapta dela marginea din stânga a paginei, considerată ca origină) şi de punctul A (180, 0, 0).

Un al doilea plan Q, îşi are urmele sale perpendiculare pe urmele de acelaşi nume ale planului P, trece prin punctul B (80, 43, 43), iar urma sa orizontală face un unghiu de 57° spre dreapta cu linia pământului.

Se cere:

1. Să se determine:
   a) Urmele planelor P şi Q.
   b) Intersecţia acestor plane.
2. Să se găsească:
   a) Adevărata lungime a porţiunei din dreapta D cuprinsă în primul diedru.
   b) Adevărata lungime a dreptei AB.
   c) Adevărata lungime a distanţei dela punctul B la dreapta D.
   d) Punctul C în care dreapta D întâlneşte planul Q.
3. Printr'o rotaţie, să se găsească adevărata mărime a dreptei BC.

Pe prima pagină a foii de hârtie, se va scrie o legendă în care să se arate calea urmată şi procedeele adoptate pentru executarea epurei.

CLASA VIII-a

Algebra. 1. Un polinom $P(x)$ se poate totdeauna pune sub forma

$$A(x^3) + x\,B(x^3) + x^2\,C(x^3),$$

unde $A(u)$, $B(u)$ şi $C(u)$ sunt polinoame în u. Să se deducă de aci restul împărţirei polinomului $P(x)$ prin $x^3 - 1$.

2. Să se arate că putem avea restul R al împărţirei unui polinom $\pi(x)$ prin $x^2 + x + 1$ în felul următor: Fie R_1 restul împărţirei polinomului $(x-1)\pi(x)$ prin $x^3 - 1$; R_1 se divide prin $x - 1$ şi

$$R = \frac{R_1}{x-1}.$$

3. Să se determine R pentru

$$\pi(x) = x^{3n-1} + ax + b,$$

şi să se arate că dacă R = 0, ecuaţia $\pi(x) = 0$ nu poate avea decât cel mult o rădăcină reală.

Geometria analitică. I. Ox, Oy, fiind două axe de coordonate perpendiculare într'un plan, se consideră punctele: A $(a, 0)$; B $(0, b)$; C $(bk, ak + b)$; D $(bk + a, ak)$. Se cere:

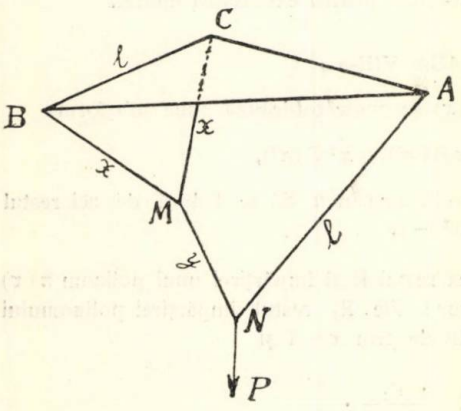
1. Să se arate că figura ABCD este un dreptunghiu.
2. Să se scrie ecuaţia cercului Γ circumscris dreptunghiului ABCD.
3. Tangentele în A şi B la cercul Γ întâlnindu-se într'un punct P, să se găsească locul geometric al acestui punct când k variază, a şi b rămânând fixe.

II. Fiind dată parabola

$$y^2 - 2px = 0,$$

se consideră trei puncte oarecare A $\left(\frac{a^2}{2p}, a\right)$; B $\left(\frac{b^2}{2p}, b\right)$; C $\left(\frac{c^2}{2p}, c\right)$ pe această parabolă. Prin punctul de întâlnire a tangentelor în A şi B la parabolă se duce perpendiculară pe tangenta în C la parabolă. Această perpendiculară taie directoarea parabolei într'un punct H. Să se găsească coordonatele punctului H. Din expresia găsită să se deducă o proprietate geometrică a triunghiurilor circumscrise unei parabole.

Mecanica. Fie ABC un triunghiu echilateral, de latură l, aşezat într'un plan orizontal.



De vârfurile B şi C sunt legate capetele unui fir de lungime $2x$, iar de vârful A este legat un fir de lungime AN = l.

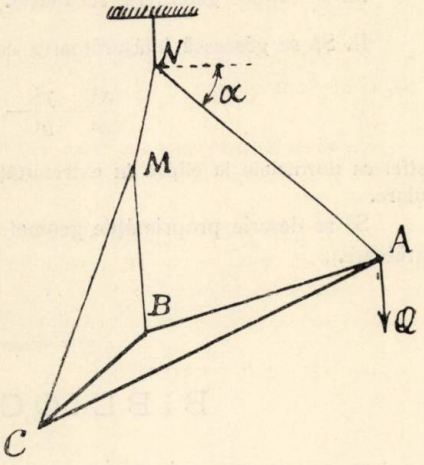
Extremitatea N a acestui fir este legată de mijlocul M al firului BMC cu un fir de lungime MN = y.

1. — Ştiind că în N este legată o greutate P şi că greutăţile firelor se neglijează, se cere să se determine lungimile necunoscute x şi y astfel ca tensiunile în toate firele să fie egale.

2. — Figura cu dimensiunile astfel determinate se răstoarnă şi se suspendă de punctul N, lăsându-se să-şi ia poziţia de echilibru.

a) Ştiind că triunghiul ABC este omogen şi de greutate G, să se determine, pentru poziţia de echilibru, unghiul α pe care-l face firul NA cu planul orizontal dus prin N.

b) Care este greutatea Q ce trebue legată în A pentru ca în poziţia de echilibru triunghiul ABC să fie orizontal?



ANUL PREPARATOR AL ŞCOLII POLITECHNICE

Algebra. 1. Să se arate că ecuaţia

$$x^{2p+1} + x + 2 = 0$$

are o singură rădăcină reală, a cărei valoare se cere.

2. Să se determine polinomul $P(x)$ aşa fel încât

$$P(x) - P'(x) = x^{2p+1} + x + 2.$$

3. Să se studieze variaţia funcţiei

$$y = P(x)\, e^{-x}$$

şi să se deducă numărul rădăcinilor reale pe care le are ecuaţia $P(x) = 0$.

4. Să se determine natura seriei al cărei termen general este

$$u_n = P(n)\, e^{-n}.$$

Geometria analitică. I. $Oxyz$ fiind un sistem de coordonate perpendiculare în spaţiu.

1°. Să se scrie ecuaţia generală a unui paraboloid iperbolic H, care conţine axele de coordonate Oy şi Oz şi admite axa Ox drept axă de simetrie.

2°. Să se scrie ecuaţia cuadricei Q, care se racordează cu paraboloidul H dealungul axei Oy şi conţine dreapta

$$y = 0 \qquad z = b.$$

3°. Să se arate că şi cuadrica Q este un paraboloid iperbolic şi are totdeauna vârful său pe axa Oz oricare ar fi H şi b.

Să se explice geometric rezultatul.

II. Să se găsească înfăşurătoarea coardelor elipsei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

astfel ca normalele la elipsă în extremităţile fiecărei coarde să fie perpendiculare.

Să se descrie proprietăţile geometrice mai interesante ale acestei înfăşurătoare.

(Timpul acordat: 3 ore).

BIBLIOGRAFIE

V. ALACI. *Une classe nouvelle de fonctions discontinues à deux variables et les équations correspondantes qui peuvent représenter différentes configurations géométriques.* (Extrait du *Bulletin scientifique de l'Ecole polytechnique de Timişoara*). Timişoara 1937.

T. ANGHELUŢĂ. *Exerciţii şi Probleme de Analiză, Teoria funcţiilor şi Mecanica raţională.* Cu o prefaţă de PAUL MONTEL, în colaborare cu TIB. POPOVICIU şi GH. CĂLUGĂREANU. Editura Universităţii din Cluj. Cluj 1937.

Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine. XVII-ème Année. No. 9 — 10. Bucureşti. Sur une propriété d'une suite de Laplace autopolaire par rapport à une hyperquadrique d'un espace à cinq dimensions, par L. GODEAUX (Liège). Sur une propriété caracteristique des réseaux R, par AL. PANTAZI.

Idem. Tome XVIII. No. 1 — 2. Sur les itérations d'ordre transfini, par W. SIERPINSSKI. Sur les réseaux R, par AL. PANTAZI. L'équation de DIRAC pour un corp à masse variable, par I. I. PLĂCINŢEANU.

Idem. No. 3 — 5. Sur la normalisation des équations différentielles linéaires, par ENRICO BONPIANI.

Idem. No. 6 — 7. Sur une nouvelle propriété des congruences des droites, par G. TITZÉICA. Remarques sur le faisceau de M. GAMBIER, par ILIE POPA.

N. ABRAMESCO. *Sur une étude de la forme d'une courbe ou d'une surface dans le voisinage de l'un de ces points.* (Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences*). Paris 1936.

N. ABRAMESCU. *Sullo studio di una superficie nell'intorno di un suo punto ed una nuova interpretazione della cubica che da le tangenti di* DARBOUX *e* SEGRE. (Extratto dei *Rendiconti della R. Academia nazionale dei Lincei*). Roma 1936.

N. ABRAMESCO. *Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynome et application à la détermination des courbes de convergences de certaines séries de polynomes.* Cluj 1935. (Extras din *Mathematica*).

N. ABRAMESCO. *Sur l'étude de la forme d'une courbe ou d'une surface dans le voisinage de l'un de ses points et un nouvelle interprétation de la cubique donnant les tangentes de* DARBOUX *et* SEGRE. Cluj 1936. (Extras din *Mathematica*).

ILIE I. POPA. *Matematica în ultimul pătrar de veac la Universitatea din Iaşi.*

A. MYLLER. *Tricentenarul Geometriei analitice.* (Extras din *Natura*). Bucureşti 1937.

Deutsche Mathematik. Anul I. Caietul 3. Iulie 1936. Leipzig. O simplă deducere a unei cunoscute teoreme proiective pe cale geometric afină de EDM. SCHOLZ. Conţinutul simplexului în geometria neeuclidiană de HELLMERTH KNESER. Operaţiile diferenţiale ale calculului vectorial de A. KLOSE. Asupra continuităţii funcţionalelor analitice lineare de OSWALD TEICHMÜLLER. Despre teoria interpolaţiei II de UDO WEGNER. Despre formarea funcţiilor hiperanalitice de variabile quaternione dintr'o funcţie analitică obicinuită de ALOYS HERRMANN. Algebrele $= p$ de O. TEICHMÜLLER.

Idem. Caietul 4, Septembrie 1936. Asupra aplicării calculului probabilităţilor şi problema inducţiei de KARL DÖRGE. Asupra tratării statistice a boalelor a căror manifestare este dependentă de vârstă, de ED. SCHOLZ. Curbe în care se poate mişca un tri — ori poligon, ale cărui vârfuri parcurg curba, de H. I. FISCHER. Transformarea neeuclidiană dreaptă-sferă ca secţiune a unei reprezentări ale lui F. ASCHIERI, de O. FREYTAG. Observare la o temă asupra tetraedrului pitagoreician, de E. SCHOLZ. Observare la raportul lui W. FENCHEL asupra lucrării mele: „o inegalitate caracteristică pentru sferă", de E. SCHOLZ. Teoremele MENELAUS şi CEVA pentru poligonul plan, de MAX-ZACHARIAS. Raritatea polinoamelor reductibile, de F. W. NEUHANS. Raritatea ecuaţiilor cu afect, de F. W. NEUHANS. O contribuţie la teoria rapoartelor abstracte, de F. KLEIN — BARMEN. Discuţiile BOOLE-SCHRÖDER, de F. KLEIN — BARMEN.

Idem. Caietul 6, Decembrie 1936. Asupra unei grupe de factori, de OTTO GRÜN. Asupra construcţiei cu cercul şi linia în cazurile favorabile, de W. WEBER. Asupra libertăţii de contradicţie a folosului măsurii şi integralei LEBESGUE din punctul de vedere al teoriei mulţimilor, de E. TORNIER.

Asupra descrierii suprafeţelor RIEMANN prin complexe lineare, de ELISABETH DRAPE. Utilizarea teoriei funcţiilor la teoria fluxurilor de profil şi problemele corespunzătoare ale transformării conforme, de E. GRAESER. Natura metodei continuităţii, de P. KORBEIN. Asupra mişcării euclidiene, de W. KRAN. Despre geometria diferenţială LIE în R_n, de H. KNOTHE. Teoremă elementară de probabilitate a amestecului, de G. AUSMANN.

Sphinx. Revue mensuelle des questions récréatives. Anul VII, Nr. 1, Maiu 1937, Bruxelles. † R. de MONTESUS de BALLORE. Al doilea congres internaţional al Recreaţiilor Matematice, Paris 15 — 18 Iulie 1937.

Journal de Mathèmatiques élémentaires. Publié par H. VUIBERT Anul 61, Nr. 13. 1 Aprilie 1937. Paris.

Idem. Nr. 14. 15 Aprilie 1937. Paris.

Spisy vydávané prívodovědenckon faculton Masarykovy University. (Publicaţia facultăţii de ştiinţe a universităţii MASARYK). Rok. 1936 čís 226. Măsura vitezei prin discul RAYLEIGH de MARTA CHYTILOVA. Măsura radioactivităţii prin balanţa de torsiune, prin electrometru şi prin fotocelulă de IOSEF ZAHRADNIČEK. Asupra caracteristicei descendente a langhetei unui tub de IOSEF ZAHRADNIČEK.

Idem. Rok. 1936 čís 229. Brno.

Buletinul Societăţii Politehnice. Anul L. Nr. 11. Noembrie 1936. Omagiu D-lui Profesor ION IONESCU de C. D. BUŞILĂ. Cuvântarea D-lui Profesor ION IONESCU. Influenţa torsiunei grinzilor în calculul planşeelor de M. D. HANGANU. Calculul fundaţiilor de beton armat al stâlpilor izolaţi de D. STAN şi A. TAUBER.

Idem. Anul L. Nr. 12. Decembrie 1936. LOUIS NAVIER de C. D. BUŞILĂ. Viaţa şi activitatea tehnică a lui LOUIS NAVIER de ION IONESCU. NAVIER ca profesor de analiză dela Şcoala Politehnică din Paris de G. ŢIŢEICA. Contribuţia lui NAVIER la teoria elasticităţii de GH. EM. FILIPESCU. Contribuţia lui NAVIER la hidraulică, de D. GHERMANI.

Idem. Anul LI. Nr. 1. Ianuarie 1937. Lista membrilor Soc. Politehnice. Cuvântare ţinută la Adunarea generală a Soc. Politehnice în chestiunea concentrării învăţământului tehnic superior, de C. D. BUŞILĂ. Studii asupra reglementării reviziilor şi reparaţiilor la depourile de locomotive C. F. R. de SEBASTIAN PETRESCU.

Buletinul Institutului Român despre Betoane, Construcţii şi Drumuri. Anul I. Ianuarie-Decembrie 1936.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVII. Nr. 2. Asupra unei probleme de cinematică navală de LOCOT. C. V. COSTĂCHESCU.

Ştiinţă şi Progres. Revista ştiinţifică a liceelor militare. Anul IV. Nr. 1. Asupra determinanţilor nuli de V. VASU.

Pitagora. Anul II. Nr. 6 — 7. Martie-Aprilie 1937. Impărţirea unui polinom printr'un produs de n factori binomiali de primul grad (urmare), de G. G. CONSTANTINESCU. Două probleme de bacalaureat de O. M.

Gazeta Matematică. Supliment cu Exerciţii. Anul III. Nr. 8. 1 Mai 1937. Bucureşti.

PAUL LIBOIS. Sur une classe de plans quadruples. (Supliment la Mathèsis 1937).

TEOFILO VESCAN. Consideraciones sobre la mecánica vectorial y relativista de los medios deformables. (Extras din Boletin Matematico, Anul IX. Septembrie 1936. Nr. 7).

THÉOPHILE VESCAN. Une formule de la réfraction astronomique déduite de la forme parabolique du trajet lumineux. (Extras din „Bulletin Scientifique de l'école Polytechnique de Timişoara" Tome 6. Fasc. 1—2).

TEOFIL VESCAN. Teoria cinetică elementară a gazelor. (Extras din „Ştiinţă şi Progres" Anul II. Nr. 6. 1935).

TEOFIL VESCAN. Elementele teoriei gazelor electronice. (Extras din „Ştiinţă şi Progres", Anul III. Nr. 5. 1936).

CESAR D. ORĂŞANU. *Proecţiunea stereografică în România întregită.* (Extras din *Buletinul Cadastral).* Bucureşti 1937.

Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliquées de l'Ecole Politechnique Roi Charles II Bucarest. VII-ème Année (1935—1936). No. 1, 2, 3. Fasc. 19, 20, 21. Bucureşti 1937. Un théorème de M. POMPEÏU, par GEORGES BRATU. Sur un théorème de M. POMPEÏU, par N. OBRECHKOFF. Sur un théorème de M. POMPEÏU, par HAROLD HILTON. Sur une propriété du triangle équilateral, par E. ABASON. Un théorème de géométrie, par E. ABASON. Une relation entre nombres complexes et la généralisation d'un théorème de géométrie, par N. G. BOTEA. Sur certaines configurations d'homographie plane, par AL. PANTAZI. Sur une propriété du rotationel, par GEORGES BOULIGAND. Sur quelques applications de la propriété du module d'une fonction holomorphe, par D. POMPEÏU. Contribution à l'étude des intégrales à l'infini des équations différentielles linéaires, par T. PETROVITCH. Sur le nombre des valeurs exceptionelles des fonctions algébroïdes, par M. GHERMANESCO. Quelques remarques relatives à la dérivée superficielle d'une fonction de deux variables, par N. CIORANESCO. L'influence de l'addition du potasium sur le gradient de la colonne positive de l'arc du Mercure, par I. C. PURCARU. Sur la détermination de l'indice de réfraction des lentilles positives, construites en verre lourd, par D. TEODORESCO. Sur une relation qui exprime la loi des mélanges, par D. TEODORESCO. Le rôle des capillaires et du chlorure de sodium dans les phénomènes biologiques, par E. TOPORESCU. Nouvelle méthode de fabrication de l'Ypérite, par C. D. NENITZESCO et N. SCARLATESCO. Sur l'état d'oxidation du fer dans certaines scories de l'élaboration de l'acier, par W. J. CROOK. L'avion avec 1000 km/h. par M. I. LINTEŞ. Sur une application de l'affinité en cinématique, par P. POPOVĂŢ. Calcul des plaques élastiques

rectangulaires simplement appuyées sur le pourtour et soumises à la flexion par un moment le long d'un coté, par C. MATEESCO. Sur la flexion des pièces droites, par G. G. CONSTANTINESCO. Le gradient de la colonne positive de l'arc dans la vapeur de potassium, par I. C. PURCARU. Lignes de champ magnétique d'un circuit filiforme, symétrique et plan, deux fois coudé, par S. S. STEFANESCO. Sur les réseaux à résistance constante, par J. CONSTANTINESCO. Sur la réaction en basse fréquence dans les amplificateurs à lampes, par M. MARINESCO. Ladung von Sammlerbatterien mittelss Trockengleichrichtern, von A. AVRAMESCO. L'aspect scientifique de la technique graphique, par AL. BUNESCO. Méthode pour l'analyse granulométrique d'un béton durci, par S. C. SOLACOLU. Sur le diamètre économique d'une conduite de refoulement et sur l'exploitation de cette conduite, par H. THEODORU.

R. ESTÈVE & H. MITAULT. *Cours de Géometrie, tome III, Compléments.* In 16°. Ed. *Gauthier Villars,* Paris 1936, cu o prefață de G. BOULIGAND.

Conține: Secțiuni conice, transformările și geometria vectorială: ceeace este de esență geometrică în statică și cinematică.

Diferă de manualele clasice în ceeace privește metoda și coordonările pentru a da geometriei o viață proprie, un fel de a o trata în materie vie, nu ca dogmă intangibilă. Din prefața autorilor: — geometria elementară nu este o teorie fizică, dar nici un simplu capitol al logicei, viața i-a fost însuflețită de natură, care se exercită în trei feluri: 1°, prin inspirarea conceptelor originale și a postulatelor; 2°, prin verificarea fizică, deși imperfectă, a rezultatelor deduse prin logică și 3°, în mod creeator, prin intuiția proprietăților de descoperit; deci rolurile jucate de natură și logică, în geometrie, trebue să fie consecutive, nu simultane. Autorii cred că în nerespectarea acestei ultime observații, stă eroarea fundamentală a expunerii clasice.

Partea cea mai de preț a cursului, o formează transformările, tratate dintr'un punct de vedere superior și unitar — în deosebi ideea de grup și de compunerea transformărilor este continuu urmărită — pentru a face legătura cu geometria modernă.

Lucrarea terminã cu 355 exerciții așezate pe capitole.

N. M.

CERERI

Răspuns cererii No. 261.

Cartea respectivă poartă titlul:

Geometrie, manual și colecțiune de probleme pentru clasele gimnaziale superioare, DR. LUDOVIC SÁRKÁNY *traducere din limba maghiară* de IOSIF HOSSU, EMILIU VICIU și DR. IOAN RADU.

Blaj. Tipografia Seminarului gr. catolic 1899.

Este prefațată de autor cu data „Cluj în Iulie 1897".

HERMAN VICTOR
(Student Cluj).

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

FEDERICO AMODEO. Elementi di algebra. Parte prima del volume secondo degli Elementi di matematica. Neapoli 1903.

Donată de D-l ION IONESCU, Inginer.

G. ST. L. CARSON & DAVID EUGENE SMITH. Elements of Algebra. Part I. Londra.

Donată de D-l ION IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 171. *Fiind date trei sfere prin coordonatele centrelor şi prin razele lor.* a_i , b_i , c_i , r_i $(i = 1, 2, 3)$, *să se afle şi să se construiască un plan care să atingă deodată cele trei sfere. Discuţie.*

A. BUGA.

Fie (S_1), (S_2), (S_3) cele trei sfere date, O_1, O_2, O_3 centrele lor. Să luăm planul $O_1O_2O_3$ ca plan XOY, dreapta O_2O_3 ca axă OX, perpendiculara dusă din O_1 pe O_2O_3 ca axă OY; iar perpendiculara ridicată în O, pe planul XOY ca axă OZ. Faţă cu acest sistem de axe, coordonatele centrelor sunt: $O_1(0, \alpha, 0)$; $O_2(\beta, 0, 0)$; $O_3(\gamma, 0, 0)$.

La două sfere, tangentele comune formează două conuri tangente comune cu vârfurile în cele două centre de similitudine ale celor două sfere; iar un plan tangent ambelor sfere este tangent unuia din conurile tangente comune sferelor, ca urmare el trece prin unul din vârfurile celor două conuri tangente adică prin unul din centrele de similitudine ale celor două sfere considerate.

Este de ajuns deci, să luăm planul tangent la una din sfere, de exemplu la (S_1), şi să-l facem să treacă prin unul din centrele de similitudine ale ei cu sfera (S_2) şi deasemenea prin unul din centrele de similitudine ale ei cu sfera (S_3). Observând încă că planul $O_1O_2O_3$ taie sferele (S_1), (S_2), (S_3) după cercurile mari ale lor (C_1), (C_2), (C_3) respectiv, cu centrele deci în O_1, O_2, O_3 şi cu razele r_1, r_2, r_3 respectiv, centrele de similitudine Σ_2, Σ'_2 ale sferelor (S_1) şi (S_2) sunt şi ale cercurilor (C_1) şi (C_2); iar centrele

de similitudine (Σ_3) şi (Σ'_3) ale sferelor (S_1) şi (S_3) sunt şi ale cercurilor (C_1) şi (C_3).

Insemnând cu $I(x_2, 0)$ şi $I'(x'_2, 0)$ proiecţiunile centrelor $\Sigma_2(x_2, y_2)$ şi $\Sigma'_2(x'_2, y'_2)$ pe axa OX şi cu $J(0, y_2)$ şi $J'(0, y'_2)$ proecţiunile aceloraşi centre Σ_2, Σ'_2 pe axa OY, avem relaţiunile:

$$\frac{\overline{IO_2}}{\overline{IO}} = \frac{\overline{\Sigma_2 O_2}}{\overline{\Sigma_2 O_1}} = \frac{r_2}{r_1} \quad (1) \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{JO}}{\overline{JO_1}} = \frac{\overline{\Sigma_2 O_2}}{\overline{\Sigma_2 O_1}} = \frac{r_2}{r_1} \quad (1')$$

$$\frac{\overline{I'O_2}}{\overline{I'O}} = \frac{\overline{\Sigma'_2 O_2}}{\overline{\Sigma'_2 O_1}} = -\frac{r_2}{r_1} \quad (2) \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{J'O}}{\overline{J'O_1}} = \frac{\overline{\Sigma'_2 O_2}}{\overline{\Sigma''_2 O_1}} = -\frac{r_2}{r_1} \quad (2')$$

sau încă:

$$\frac{\beta - x_2}{-x_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (3) \; ; \quad \frac{\beta - x'_2}{-x'_2} = -\frac{r_2}{r_1} \quad (4)$$

şi

$$\frac{-y_2}{\alpha - y_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (3') \; ; \quad \frac{-y'_2}{\alpha - y'_2} = -\frac{r_2}{r_1} \quad (4'),$$

care dau respectiv:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{\beta r_1}{r_1 - r_2} \\ y_2 = \dfrac{-\alpha r_2}{r_1 - r_2} \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x'_2 = \dfrac{\beta r_1}{r_1 + r_2} \\ y_2' = \dfrac{\alpha r_2}{r_1 + r_2} \end{cases}.$$

Aşadar avem pentru centrele de similitudine ale sferelor (S_1) şi (S_2) coordonatele:

$$\Sigma_2\left(\frac{\beta r_1}{r_1 - r_2}, \frac{-\alpha r_2}{r_1 - r_2}, 0\right) \quad \text{şi} \quad \Sigma'_2\left(\frac{\beta r_1}{r_1 + r_2}, \frac{\alpha r_2}{r_1 + r_2}, 0\right). \quad (5)$$

Când trecem dela sferele (S_1) şi (S_2) la sferele (S_1) şi (S_3) calculele sunt identice, cu observarea că pe β îl schimbăm în γ şi pe r_2 în r_3; deci vom avea pentru centrele de similitudine ale sferelor (S_1) şi (S_3) coordonatele:

$$\Sigma_3\left(\frac{\gamma r_1}{r_1 - r_3}, \frac{-\alpha r_3}{r_1 - r_3}, 0\right) \quad \text{şi} \quad \Sigma'_3\left(\frac{\gamma r_1}{r_1 + r_3}, \frac{\alpha r_3}{r_1 + r_3}, 0\right) \quad (5')$$

Inainte de a trece mai departe, observăm că atât coordonatele centrelor Σ_2, Σ'_2, cât şi ale centrelor Σ_3, Σ'_3 sunt omogene în

raport cu razele celor trei sfere, deci putem simplifica expresiunile lor punând $\frac{r_2}{r_1} = \rho$ şi $\frac{r_3}{r_1} = \rho'$. Avem în acest caz:

$$\Sigma_2\left(\frac{\beta}{1-\rho}, \frac{-\alpha\rho}{1-\rho}, 0\right); \quad \Sigma'_2\left(\frac{\beta}{1+\rho}, \frac{\alpha\rho}{1+\rho}, 0\right) \tag{6}$$

$$\Sigma_3\left(\frac{\gamma}{1-\rho'}, \frac{-\alpha\rho'}{1-\rho'}, 0\right); \quad \Sigma'_3\left(\frac{\gamma}{1+\rho'}, \frac{\alpha\rho'}{1+\rho'}, 0\right) \tag{6'}$$

In aceste expresiuni ρ şi ρ' sunt pozitivi. Dacă convenim ca ρ şi ρ' să reprezinte respectiv pe $\frac{r_2}{r_1}, -\frac{r_2}{r_1}$ şi $\frac{r_3}{r_1}, -\frac{r_3}{r_1}$, putem scrie coordonatele ambelor centre de similitudine direct şi invers în aceeaşi expresiune:

$$\Sigma_2, \Sigma'_2\left(\frac{\beta}{1-\rho}, \frac{-\alpha\rho}{1-\rho}, 0\right) \tag{7}$$

şi

$$\Sigma_3, \Sigma'_3\left(\frac{\gamma}{1-\rho'}, \frac{-\alpha\rho'}{1-\rho'}, 0\right) \tag{8}$$

luând pentru centrele inverse Σ'_2 şi Σ'_3 respectiv valorile negative ale parametrilor ρ şi ρ'.

(Evident că în tot calculul precedent cele trei sfere (S_1), (S_2), (S_3) nu sunt toate egale, şi anume este presupus r_1 diferit de r_2 şi r_3; în cazul contrar centrele de similitudine directe sunt aruncate la infinit).

Să determinăm acum un punct M_1 pe sfera (S_1) astfel ca planul tangent în acest punct la sfera (S_1) să treacă prin câte unul din centrele de similitudine din cele două perechi de centre Σ_2, Σ'_2 şi Σ_3, Σ'_3. Ecuaţiunea sferei (S_1) fiind:

$$x^2 + (y-\alpha)^2 + z^2 - r_1^2 = 0 \tag{9}$$

iar coordonatele lui M_1 însemnându-le cu (x_1, y_1, z_1), avem ecuaţiunea planului tangent căutat:

$$\begin{cases} xx_1 + (y-\alpha)(y_1-\alpha) + zz_1 - r_1^2 = 0 \\ x_1^2 + (y_1-\alpha)^2 + z_1^2 - r_1^2 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

cu condiţiunile în plus:

$$\frac{\beta x_1}{1-\rho}+\left(\frac{-\alpha\rho}{1-\rho}-\alpha\right)(y_1-\alpha)-r_1^2=0\,;$$
$$\frac{yx_1}{1-\rho'}+\left(\frac{-\alpha\rho'}{1-\rho'}-\alpha\right)(y_1-\alpha)-r_1^2=0\,. \tag{11}$$

Rezolvând sistemul celor trei condiţiuni asupra lui x_1, y_1, z_1 din relaţiunile (10) şi (11), obţinem:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\rho'-\rho}{\gamma-\beta}r_1^2\,;\; y_1=\alpha-\dfrac{r_1^2}{\alpha}+\dfrac{(\gamma\rho-\beta\rho')r_1^2}{\alpha(\gamma-\beta)} \\ z_1^2=\dfrac{r_1^2}{\alpha^2(\gamma-\beta)^2}\left[\alpha^2(\gamma-\beta)^2-[\alpha^2(\rho'-\rho)^2+[\gamma(1-\rho)-\beta(1-\rho')]^2]r_1^2\right]. \end{cases} \tag{12}$$

Pentru ca problema să fie posibilă, trebue să avem între datele problemei relaţiunea:

$$\alpha^2(\gamma-\beta)^2-\alpha^2(\rho'-\rho)^2r_1^2-[\gamma(1-\rho)-\beta(1-\rho')]^2r_1^2\geqq 0 \tag{13}$$

Dar ρ şi ρ' corespund când asociem centrele de similitudine în toate modurile posibile, deci condiţiunea (13) echivalează cu una din următoarele patru condiţiuni, după cazul considerat:

$$\alpha^2(\gamma-\beta)^2-\alpha^2(r_3-r_2)^2-[\gamma(r_1-r_2)-\beta(r_1-r_3)]^2\geqq 0 \tag{14}$$
$$\alpha^2(\gamma-\beta)^2-\alpha^2(r_3+r_2)^2-[\gamma(r_1+r_2)-\beta(r_1-r_3)]^2\geqq 0 \tag{15}$$
$$\alpha^2(\gamma-\beta)^2-\alpha^2(r_3+r_2)^2-[\gamma(r_1-r_2)-\beta(r_1+r_3)]^2\geqq 0 \tag{16}$$
$$\alpha^2(\gamma-\beta)^2-\alpha^2(r_3-r_2)^2-[\gamma(r_1+r_2)-\beta(r_1+r_3)]^2\geqq 0 \tag{17}$$

Dacă una din condiţiunile (14), (15), (16), (17) este îndeplinită, z are două valori contrarii (cu aceeaşi valoare absolută şi semne contrarii), deci pentru fiecare condiţiune îndeplinită cele trei sfere corespunzătoare au două plane tangente comune, punctele de contact fiind simetric aşezate faţă de planul XOY.

Discuţiune. 1. Dacă două din cele trei sfere distincte, de exemplu (S_2) şi (S_3), sunt concentrice (presupunând cum e posibil totdeauna $\alpha\neq 0$), se vede că nici una din condiţiunile (14), (15), (16), (17) nu este îndeplinită; prin urmare problema este în acest caz imposibilă.

2. Dacă cele trei sfere au centrele distincte însă aşezate în linie dreaptă, avem $\alpha = 0$ şi în acest caz avem pentru ecuaţiunile (10) şi (11) următoarele:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r_1^2 = 0 \\ xx_1 + yy_1 + zz_1 - r_1^2 = 0 \end{cases} \quad (10') \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \dfrac{\beta x_1}{1-\rho} - r_1^2 = 0 \\ \dfrac{\gamma x_1}{1-\rho'} - r_1^2 = 0 \end{cases} \quad (11')$$

şi deci sistemul condiţiunilor, care determină pe M_1 se compune din ecuaţiunile:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{r_1^2(1-\rho)}{\beta}, \; x_1 = \dfrac{r_1^2}{\gamma}(1-\rho') \\ y_1^2 + z_1^2 = r_1^2 - \dfrac{r_1^4}{\beta^2}(1-\rho)^2 \end{cases} \quad (12')$$

Pentru ca problema să fie posibilă trebue în primul să avem condiţiunea:

$$\frac{1-\rho}{\beta} = \frac{1-\rho'}{\gamma} \quad (18)$$

şi în acest caz problema este nedeterminată, însă această nedeterminare legată de condiţiunea de posibilitate:

$$y_1^2 \leqq \frac{r_1^2}{\beta^2}[\beta^2 - r_1^2(1-\rho)^2] \quad (19)$$

care poate fi realizată, dacă avem:

$$\beta^2 - r_1^2(1-\rho)^2 \geqq 0 \quad (20)$$

Presupunând $\beta < 0$, iar $\gamma > 0$, relaţiunea (18) se poate scrie sub forma:

$$\frac{r_1 - r_2}{\beta} = \frac{r_1 - r_3}{\gamma}$$

sau subt formă geometrică: $\dfrac{r_2 - r_1}{-\beta} = \dfrac{r_1 - r_3}{\gamma}$ (18'), adică dacă prin origina O [centrul sferei (S_1)] ducem o paralelă la tangenta comună M'N' la sferele (S_2) şi (S_3) întâlnind razele punctelor de contact O_2M' şi O_3N' respectiv în M şi N, se vede că asemănarea

triunghiurilor dreptunghiuri O_2MO şi ONO_3 dă tocmai relaţiunea (18′) când M′N′ este tangentă şi sferei (S_1) şi reciproc. In ce priveşte relaţiunea (20), ea spune în cazul considerat că o catetă a unui triunghiu dreptunghiu este mai mică ca ipotenuza acestui triunghiu, care este deci totdeauna îndeplinită. In acelaşi fel examinăm condiţiunile de posibilitate în cazurile când pentru ρ şi ρ', combinăm în celelalte trei moduri valorile pozitive şi negative:

$$\left(\rho = +\frac{r_2}{r_1},\ \rho' = -\frac{r_2}{r_1}\right);\ \text{etc.}$$

şi facem toate ipotezele posibile asupra lui β şi lui γ.

3. Să presupunem acum că centrele, celor trei sfere distincte, nu sunt în linie dreaptă.

a) Să considerăm în primul rând cazul când una din sfere este interioară alteia, de exemplu sfera (S_2) interioară sferei (S_3).

Observând că în general avem: $\overline{O_2O_3} + \overline{O_3O} + \overline{OO_2} = 0$ sau încă $\overline{O_2O_3} = \overline{OO_3} - \overline{OO_2} = \gamma - \beta$, dacă sfera (S_2) este interioară sferei (S_3), avem:

$$(\gamma - \beta)^2 = (r_3 - r_2)^2 - d^2, \qquad (21)$$

d fiind o distanţă mai mare ca zero.

Ţinând seamă de relaţiunea (21), relaţiunile de condiţie (14), (15), (16), (17) pot fi puse sub formele:

$$-d\alpha^2 - [\gamma(r_1 - r_2) - \beta(r_1 - r_3)]^2 \geqq 0 \qquad (14')$$

$$-d\alpha^2 - 4r_2r_3\alpha^2 - [\gamma(r_1 + r_2) - \beta(r_1 - r_3)]^2 \geqq 0 \qquad (15')$$

$$-d\alpha^2 - 4r_2r_3\alpha^2 - [\gamma(r_1 - r_2) - \beta(r_1 + r_3)]^2 \geqq 0 \qquad (16')$$

$$-d\alpha^2 - [\gamma(r_1 + r_2) - \beta(r_1 + r_3)]^2 \geqq 0 \qquad (17')$$

Condiţiunile (14′), (15′), (16′), (17′) nu pot fi satisfăcute de oarece o sumă de termeni negativi, dintre care unul cel puţin este diferit de zero, nu poate fi nici pozitivă nici nulă; deci în acest caz problema este imposibilă. Dacă două sfere sunt interioare celei de a treia, à fortiori, problema este imposibilă.

b) Să considerăm acum cazul când sfera (S_2), de exemplu, este tangentă sferei (S_3) în interior. In acest caz avem condiţiunea:

$$(\gamma - \beta)^2 = (r_3 - r_2)^2 \qquad (22)$$

iar relaţiunile (14), (15), (16), (17) devin:

$$-[\gamma(r_1 - r_2) - \beta(r_1 - r_3)]^2 \geqq 0 \qquad (14'')$$

$$-4r_2r_3\alpha^2 - [\gamma(r_1 + r_2) - \beta(r_1 - r_3)]^2 \geqq 0 \qquad (15'')$$

$$-4r_2r_3\alpha^2 - [\gamma(r_1 - r_2) - \beta(r_1 + r_3)]^2 \geqq 0 \qquad (16'')$$

$$-[\gamma(r_1 + r_2) - \beta(r_1 + r_3)]^2 \geqq 0 \qquad (17'')$$

Condiţiunile (15'') şi (16'') ca şi în cazul precedent nu pot fi satisfăcute, aşa că problema este posibilă numai dacă una sau amândouă din condiţiunile următoare pot fi satisfăcute:

$\gamma(r_1 - r_2) - \beta(r_1 - r_3) = 0$ (14'') $\quad \gamma(r_1 + r_2) - \beta(r_1 + r_3) = 0$ (17'')

Să considerăm de exemplu γ şi β pozitive şi de oarece (S_2) este tangentă în interior sferei (S_3) avem $r_2 < r_3$; deci dacă $\beta > \gamma$ trebue să luăm din (22) valoarea:

$$\gamma - \beta = r_2 - r_3 \qquad (23)$$

Din (14'') avem succesiv: $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{r_1 - r_3}{r_1 - r_2}$; $\frac{\gamma - \beta}{\gamma} = \frac{r_2 - r_3}{r_1 - r_3}$,

deci $\gamma = r_1 - r_3$ sau încă: $r_1 = \gamma + r_3$, adică planul tangent comun sferelor tangente (S_2), (S_3) este tangent şi sferei (S_1) cu centrul pe axa OY.

Dacă examinăm condiţiunea (17''), avem prin aceleaşi operaţiuni:

$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{r_1 + r_3}{r_1 + r_2}$; $\frac{\gamma - \beta}{\gamma} = \frac{r_3 - r_2}{r_1 + r_3}$, deci $\gamma = -(r_1 + r_3)$, imposibilă.

Observăm în acest caz particular că trebue o condiţiune asupra razei sferei (S_1), pentru ca problema să fie posibilă; $r_1 = \gamma + r_3$.

Această relaţiune de condiţiune evident se modifică, după ipotezele pe care le facem asupra lui β şi γ. De exemplu, dacă $\gamma > 0$, $\beta < 0$, relaţia (23) fiind înlocuită prin: $\gamma - \beta = r_3 - r_2$, atrage după sine: $\gamma = r_3 - r_1$, care spune acelaşi lucru ca şi condiţiunea de mai sus.

Să presupunem acum de exemplu γ şi β pozitivi, $\beta < \gamma$, iar $\gamma > r_3$.

Examinând în acest caz condiţiile (14'') şi (17''), având: $\gamma - \beta = r_3 - r_2$ din prima găsim: $\gamma = r_3 - r_1$ care nu poate fi îndeplinită. Din (17'') găsim însă: $\gamma = r_1 + r_3$, deci: $r_1 = \gamma - r_3$, în care caz *problema are o soluţiune* (Planul tangent comun celor

trei sfere în toate aceste cazuri este un plan dublu, cele două valori ale lui z devenind egale cu zero); concluziune ce rămâne valabilă în toate ipotezele distincte ce le putem face asupra lui β, γ, r_2, r_3.

c) Să presupunem acum că sferele (S_2) *şi* (S_3) *sunt secante.*

Putem pune în acest caz:

$$(\gamma - \beta)^2 = (r_2 + r_3)^2 - d^2, \qquad (24)$$

unde $0 < d^2 < 4r_2r_3$, deoarece în acest caz distanţa centrelor celor două sfere trebue să fie mai mică ca suma razelor lor şi mai mare ca diferenţa razelor lor. Luând condiţiunile de posibilitate (15) şi (16), ele devin ţinând seamă de relaţia (24) următoarele:

$$-d^2\alpha^2 - [\gamma(r_1 + r_2) - \beta(r_1 - r_3)]^2 \geqq 0 \qquad (15''')$$

$$-d^2\alpha^2 - [\gamma(r_1 - r_2) - \beta(r_1 + r_2)]^2 \geqq 0 \qquad (16''')$$

deci imposibil de realizat, expresiunile fiind sume de doi termeni negativi dintre care unul $(-d^2\alpha^2)$ diferit de zero. Urmează că în acest caz *problema poate avea cel mult patru soluţiuni distincte.* In adevăr dacă însemnăm:

$$R_1 = \frac{|\gamma(r_1 - r_2) - \beta(r_1 - r_3)|}{\sqrt{(\gamma - \beta)^2 - (r_3 - r_2)^2}} \quad \text{şi} \quad R_2 = \frac{|\gamma(r_1 + r_2) - \beta(r_1 + r_3)|}{\sqrt{(\gamma - \beta)^2 - (r_3 - r_2)^2}}$$

avem următorul tablou al discuţiunii pentru cazul considerat.

Să presupunem în primul rând $R_1 < R_2$.

Dacă $\begin{cases} \alpha < -R_2 \\ \quad \text{sau} \\ \alpha > +R_2 \end{cases}$, cele trei sfere au patru plane tangente comune distincte;

» $\begin{cases} \alpha = -R_2 \\ \quad \text{sau} \\ \alpha = +R_2 \end{cases}$, cele trei sfere au patru plane tangente comune, două confundate;

» $\begin{cases} -R_2 < \alpha < -R_1 \\ \quad \text{sau} \\ +R_1 < \alpha < +R_2 \end{cases}$, cele trei sfere au două plane tangente comune distincte;

» $\begin{cases} \alpha = -R_1 \\ \quad \text{sau} \\ \alpha = +R_1 \end{cases}$, cele trei sfere au două plane tangente comune confundate;

» $\begin{cases} -R_1 < \alpha < +R_1 \end{cases}$, cele trei sfere nu au plane tangente comune.

Un tablou analog rezumă discuțiunea problemei, dacă am presupune $R_1 > R_2$. In cazul când valorile lui R_1 și R_2 sunt egale, adică: $\frac{\beta}{r_2} = \frac{\gamma}{r_3}$, tabloul precedent se reduce corespunzător ipotezelor ce le putem face asupra lui α, anume: $\alpha \begin{matrix} < -R_1 \\ > +R_1 \end{matrix}$, $\alpha = \begin{matrix} -R_1 \\ +R_1 \end{matrix}$, $-R_1 < \alpha < +R_1$, și concluziunile sunt imediate.

d) *Să presupunem acum că sferele* (S_2) *și* (S_3) *sunt tangente exterior.*

In acest caz având: $(\gamma - \beta)^2 = (r_2 + r_3)^2$ (25), condițiunile de posibilitate în legătură cu numărul soluțiunilor, devin:

$$4r_2r_3\alpha^2 - [\gamma(r_1 - r_2) - \beta(r_1 - r_3)]^2 \geqq 0 \qquad (14)_4$$

$$4r_2r_3\alpha^2 - [\gamma(r_1 + r_2) - \beta(r_1 + r_3)]^2 \geqq 0 \qquad (17)_4$$

$$-[\gamma(r_1 + r_2) - \beta(r_1 - r_3)]^2 \geqq 0 \qquad (15)_4$$

$$-[\gamma(r_1 - r_2) - \beta(r_1 + r_3)]^2 \geqq 0 \qquad (16)_4$$

Ultimele două condițiuni nu pot fi îndeplinite decât în cazul egalității:

$$\gamma(r_1 + r_2) - \beta(r_1 - r_3) = 0 \qquad (15)_5$$

$$\gamma(r_1 - r_2) - \beta(r_1 + r_3) = 0 \qquad (16)_5$$

dar aceste egalități nu pot fi îndeplinite simultan. In adevăr, ar urma să avem în cazul contrar:

$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{r_1 - r_3}{r_1 + r_2} = \frac{r_1 + r_3}{r_1 - r_2}$ sau $2r_1(r_2 + r_3) = 0$, ceeace nu poate avea loc. Insemnând acum cu:

$$R_1 = \frac{|\gamma(r_1 - r_2) - \beta(r_1 - r_3)|}{2\sqrt{r_2r_3}} \text{ și } R_2 = \frac{|\gamma(r_1 + r_2) - \beta(r_1 + r_3)|}{2\sqrt{r_2r_3}},$$

observăm că valorile lui R_1 și R_2 nu pot fi egale decât în cazul când avem: $\frac{\beta}{r_2} = \frac{\gamma}{r_3}$.

Presupunând $R_1 < R_2$, de exemplu, avem următorul tablou al discuţiunii:

Dacă $\begin{cases} \alpha < -R_2 \\ \text{sau} \\ \alpha > +R_2 \end{cases}$, cele trei sfere admit patru plane tangente comune distincte şi încă două plane tangente confundate, dacă una din condiţiunile $(15)_5$ sau $(16)_5$ este îndeplinită;

» $\begin{cases} \alpha = -R_2 \\ \text{sau} \\ \alpha = +R_2 \end{cases}$, cele trei sfere admit patru plane tangente comune dintre care două confundate. In plus ele mai au două plane tangente confundate, dacă una din condiţiunile $(15)_5$ sau $(16)_5$ este îndeplinită;

» $\begin{cases} -R_2 < \alpha < -R_1 \\ \text{sau} \\ +R_1 < \alpha < +R_2 \end{cases}$, cele trei sfere au două plane tangente comune distincte. In plus, dacă una din condiţiunile $(15)_5$ sau $(16)_5$ este îndeplinită, mai au două plane tangente confundate;

» $\begin{cases} \alpha = -R_1 \\ \text{sau} \\ \alpha = +R_1 \end{cases}$, cele trei sfere au două plane tangente comune confundate. In plus, dacă una din condiţiunile $(15)_5$ sau $(16)_5$ este îndeplinită, ele mai au două plane tangente comune confundate;

» $\begin{cases} -R_1 < \alpha < +R_1 \end{cases}$, cele trei sfere date în general nu au plane tangente comune. Dacă însă una din condiţiunile $(15)_5$ sau $(16)_5$ este îndeplinită, ele au două plane tangente comune confundate.

Aceeaşi discuţiune în cazul când $R_1 > R_2$. In cazul condiţiunii $R_1 = R_2$, tabloul discuţiunii de mai sus este redus la trei intervale

şi concluziunile uşor de dedus. In acest caz singular, iniţial asupra datelor avem două relaţiuni: $\frac{\beta}{r_2} = \frac{\gamma}{r_3}$ şi $(\gamma - \beta)^2 = (r_2 - r_3)^2$.

e) In cazul când sferele (S_2) *şi* (S_3) *sunt exterioare una alteia,* adică

$$(\gamma - \beta)^2 > (r_2 + r_3)^2$$

niciuna din condiţiunile (14), (15), (16), (17) nu este înlăturată şi nici modificată. Insemnând valorile absolute ale rădăcinilor ecuaţiunilor (14), (15), (16), (17) în α cu R_1, R_2, R_3, R_4 şi presupunând, de exemplu, că avem: $R_1 < R_2 < R_3 < R_4$ putem rezuma rezultatele discuţiunii în următorul tablou:

Dacă $\alpha < -R_4$ sau $\alpha > +R_4$, cele trei sfere admit *opt* plane tangente comune distincte;

» $\alpha = -R_4$ sau $\alpha = +R_4$, cele trei sfere admit *opt* plane tangente comune, dintre care două confundate;

» $-R_4 < \alpha < -R_3$ sau $R_3 < \alpha < +R_4$, cele trei sfere admit *şase* plane tangente comune distincte;

» $\alpha = -R_3$ sau $\alpha = +R_3$, cele trei sfere admit *şase* plane tangente comune, dintre care două confundate;

» $-R_3 < \alpha < -R_2$ sau $R_2 < \alpha < R_3$, cele trei sfere admit *patru* plane tangente comune, toate distincte.

» $\alpha = -R_2$ sau $\alpha = +R_2$, cele trei sfere admit *patru* plane tangente comune, dintre care două confundate.

» $R_2 < \alpha < -R_1$ sau $+R_1 < \alpha < +R_2$, cele trei sfere admit două plane tangente comune dinstincte;

Dacă $\alpha = -R_1$ sau $\alpha = +R_1$, cele trei sfere admit două plane tangente confundate.

» $-R_1 < \alpha < +R_1$, cele trei sfere n'au plane tangente comune adică problema n'are soluțiune în acest caz. Aceeași discuțiune în cazul când ordinea numerelor R_1, R_2, R_3, R_4 este alta decât cea presupusă mai sus. Ca și în cazurile mai înainte considerate, putem găsi condițiunile în care două din numerele R_1, R_2, R_3, R_4 sunt egale și deduce tabloul discuțiunii în aceste cazuri.

In cazul când sferele (S_2) și (S_3) sunt egale, adică $r_2 = r_3$, expresiunile de mai sus se simplifică foarte mult și compararea numerelor R_1, R_2, R_3, R_4 se face mult mai ușor și condițiunile obținute sunt foarte simple.

Observarea I. In clasificarea pozițiunilor sferelor date se subînțelege că în fiecare caz considerat condițiunile din cazurile ce preced nu mai au loc pentru două oarecare dintre ele. Astfel în cazul (*e*) sfera (S_1) nu poate fi nici interioară, nici tangentă vreuneia din sferele (S_2), (S_3).

Observarea II. O soluțiune analoagă celei date mai sus, fără discuțiunea analitică ce o însoțește, a fost dată de Domnul Profesor N. TEODORESCU, Doctor în Matematice, pe când era încă *student al Facultății de Științe din București.* D-sa obține o parte din rezultatele discuțiunii de mai sus prin considerațiuni pur geometrice. Domnul IANCU N. SAGER a încercat o soluțiune propunându-și să determine un plan arbitrar supunându-l condițiunii de a fi față de centrele celor trei sfere la distanțe respectiv egale cu razele sferelor. D-sa de asemenea face câteva considerațiuni geometrice în locul discuțiunii cerute.

O. N. Ț.

PROBLEMA 4423. *Se consideră un triunghiu* ABC, *cu laturile* a, b, c. *Înălțimea vârfului* A, *mediana vârfului* B, *bisectoarea vârfului* C, *formează un triunghiu* A'B'C'. *Să se rezolve triunghiul* A'B'C' *când* $a = 53701$ m ; $b = 21425$ m ; $c = 43032$ m.

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluția. Fie AD înălțimea, BE mediana și CF bisectoarea. Notăm cu: $A' \equiv (BE, CF)$; $B' \equiv (CF, AD)$; $C' \equiv (AD, BE)$. Mai notăm cu $\alpha = \sphericalangle CBE$ și $\beta = \sphericalangle BEC$.

Calculăm mai întâi unghiurile triunghiului prin formulele:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\ ,\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}\ .$$

Apoi din triunghiul BCE scoatem:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{2a-b}{2a+b}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{c}{2}}\ ,\quad \beta+\alpha = 180^0 - C$$

de unde scoatem pe α și pe β. Unghiurile triunghiului A'B'C' sunt date acum de formulele:

$$B' = 90^0 - \frac{C}{2}\ ,\quad C' = 90^0 - \alpha\ ,\quad A' = 180^0 - (B' + C').$$

De pe figură se vede că:

$$a' = C'D - B'D.$$

Insă, succesiv din triunghiurile dreptunghice BC'D și BAD scoatem:

$$C'D = DB\ \operatorname{tg}\alpha = c\ \cos B\ \operatorname{tg}\alpha,$$

iar din triunghiurile B'CD și ACD:

$$B'D = CD\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} = b\ \cos C\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Pentru celelalte elemente ale triunghiului folosim formulele:

$$b' = \frac{a'\ \sin B'}{\sin A'}\ ,\quad c' = \frac{a'\ \sin C'}{\sin A'}\ ,\quad S' = \frac{a'b'\sin C'}{2}\ .$$

Calcule numerice

$p = 59074{,}5\ ;\ p - a = 5373{,}5\ ;\ p - b = 37649{,}5\ ;\ p - c = 16051{,}5.$

Calculul lui B.

$$\log \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{2}(\log 5373{,}5 + \log 16051{,}5 + \operatorname{colog} 59074{,}5 + \operatorname{colog} 37649{,}5)$$

$$= \frac{1}{2}(3{,}7302573 + 4{,}2055157 + \bar{5}{,}2285999 + \bar{5}{,}4242408) = \bar{1}{,}2943068.$$

$$\frac{B}{2} = 11^0 8'26''\ ;\quad B = 22^0 16'52''.$$

Calculul lui C.

$$\log \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}(\log 5373{,}5 + \log 37649{,}5 + \operatorname{colog} 59074{,}5 + \operatorname{colog} 16{,}051{,}5)$$

$$= \frac{1}{2}(3{,}7302573 + 4{,}5757592 + \bar{5}{,}2285999 + \bar{5}{,}7944843) = \bar{1}{,}3291007.$$

$$\frac{C}{2} = 24^0 47'32'' \quad ; \quad C = 49^0 35'4''.$$

Calculul lui α și β.

$$\log \operatorname{tg}\frac{\beta - \alpha}{2} = \log 85977 + \operatorname{colog} 128827 + \operatorname{colog} \operatorname{tg} 24^0 47'32''$$

$$= 4{,}9343823 + \bar{6}{,}8899931 + 0{,}3354497 = 0{,}1598251.$$

$$\frac{\beta - \alpha}{2} = 55^0 18'45'' \; ; \; \beta - \alpha = 110^0 37'30'' \; ; \; \beta + \alpha = 130^0 24'56'' ;$$

$$\alpha = 9^0 53'43'' \; ; \; \beta = 120^0 31'13''.$$

Calculul lui A', B', C'.

$$B' = 90^0 - 24^0 47'32'' = 65^0 12'28''.$$

$$C' = 90^0 - 9^0 53'43'' = 80^0 6'17''.$$

$$A' = 180^0 - (24^0 47'32'' + 9^0 53'43'') = 34^0 41'15''.$$

Calculul lui a'.

$$\log C'D = \log 43032 + \log \cos 22^0 16'52'' + \log \operatorname{tg} 9^0 53'43''$$

$$= 4{,}6337007 + \bar{1}{,}9662989 + \bar{1}{,}2416536 = 3{,}8416532$$

$$\therefore \quad C'D = 6944{,}69.$$

$$\log B'D = \log 21425 + \log \cos 49^0 35'4'' + \log \operatorname{tg} 24^0 47'32''$$

$$= 4{,}3309208 + \bar{1}{,}8117939 + \bar{1}{,}6645503 = 3{,}8072650$$

$$\therefore \quad B'D = 6416{,}01.$$

$$a' = 6944{,}69 - 6416{,}01 = 528{,}68.$$

Calculul lui b'.

$$\log b' = \log 528{,}68 + \log \sin 65^0 12'28'' + \operatorname{colog} \sin 34^0 41'15''$$

$$= 2{,}7231929 + \bar{1}{,}9580067 + 0{,}2448113 = 2{,}9260109.$$

$$\therefore \quad b' = 843{,}35.$$

Calculul lui c'.

$$\log c' = \log 528{,}68 + \log \sin 80^0 6'17'' + \operatorname{colog} \sin 34^0 41'15''$$

$$= 2{,}7231929 + \bar{1}{,}9934907 + 0{,}2448113 = 2{,}9614949$$

$$c' = 915{,}15.$$

Calculul lui S'.

$$\log S' = \log 528{,}68 + \log 843{,}35 + \log \sin 80^0 6'17'' + \operatorname{colog} 2$$

$$= 2{,}7231929 + 2{,}9260109 + \bar{1}{,}9934907 + \bar{1}{,}6989700 = 5{,}3416645.$$

$$\therefore \quad S' = 219616{,}2626.$$

Rezultate.

$$A' = 34^0 41'15'' \ ; \ B' = 65^0 12'28'' \ ; \ C' = 80^0 6'17''.$$

$a' = 528{,}68$ m ; $b' = 843{,}35$ m ; $c' = 915{,}15$ m ; $S' = 219616,\ 2626$ m^2.

Observaţii. 1°. S'au primit soluţii dela D-ra DACIA MUSCELEANU şi dela D-nii: ERNEST GH. BEIU-PALADI, PETRU P. COJOCARU, VASILE F. CEAUŞESCU, C-TIN N. GAVRILESCU, ALEX. C. JIPA şi VIRGIL I. ŞIARA. D-lor au făcut calculele folosind table de logaritmi cu cinci zecimale.

2°. D-nii: ALEX. POPESCU-ZORICA şi D. ROTARU au interpretat enunţul greşit.

3°. S'au mai primit: o soluţie necompletă, una greşită şi două identice.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4562. *Să se găsească expresiunea generală a numerelor întregi pozitive* X *şi* Y, *astfel ca* $X^n + Y^n$ *să fie divizibil cu* $X^{n-1} + Y^{n-1}$, *n fiind întreg pozitiv.*

Aplicaţiune pentru $n = 5$.

O. N. ŢINO.

Problema revine la a rezolva în numere întregi şi pozitive ecuaţiunea

$$(1) \qquad X^n + Y^n = M\,(X^{n-1} + Y^{n-1}).$$

In acest scop voiu utiliza metoda şi raţionamentul D-lui Profesor OVIDIU N. ŢINO din articolul D-sale *„Asupra problemei 1402"* publicat în *Gazeta Matematică* Vol. XLI, pag. 53 şi următoarele.

Astfel voiu avea precum urmează:

1°. Notând prin d_1 pe cel mai mare comun divizor al numerelor X şi Y, am să pot scrie:

$$(2) \qquad \begin{cases} X = d_1 x \\ Y = d_1 y \end{cases}$$

x şi y fiind *numere întregi pozitive prime între ele.*

Totodată ecuaţia (1) devine prin aceasta:

$$(3) \qquad d_1 (x^n + y^n) = M (x^{n-1} + y^{n-1}),$$

pe care scriind-o la rândul ei sub forma:

$$(3') \qquad x^{n-1} (d_1 x - M) = y^{n-1} (M - d_1 y),$$

observ că pentru a fi posibilă trebue să avem una din relaţiile:

$$(3'') \qquad \begin{cases} d_1 x - M = \beta' y^{n-1} \\ M - d_1 y = \beta' x^{n-1} \end{cases}$$

şi aceasta pentru că nici unul din numerele x^{n-1} şi y^{n-1} nu poate fi multiplu de celălalt, x şi y fiind prin ipoteză primi între ei.

Se mai observă în plus că relaţiile (3") de fapt nu pot avea loc decât în acelaş timp deoarece una oricare dintre ele este consecinţă a celeilalte.

2°. Eliminând pe M între aceste relaţii obţin ecuaţia:

$$(4) \qquad d_1 (x - y) = \beta' (x^{n-1} + y^{n-1}),$$

care este o *realizantă* a ecuaţiei (3), deci şi a ecuaţiei (1).

Scriind la rândul său ecuaţia (4) sub forma:

$$(4') \qquad x (d_1 - \beta' x^{n-2}) = y (d_1 + \beta' y^{n-2})$$

şi raţionând ca şi la punctul 1°, deducem că pentru ca această ecuaţie să poată avea loc, trebue să avem una din relaţiile:

$$(4'') \qquad \begin{cases} d_1 - \beta' x^{n-2} = d_2 y \\ d_1 + \beta' y^{n-2} = d_2 x. \end{cases}$$

Se observă totodată ca şi în cazul precedent că una oarecare din aceste relaţii este consecinţă a celeilalte.

3°. Eliminând acum între relaţiile (4") pe d_1, obţin ecuaţia:

$$(5) \qquad d_2 (x - y) = \beta' (x^{n-2} + y^{n-2}),$$

care este o a doua *realizantă* a ecuaţiilor (1) şi (3).

4°. Comparând între ele cele două realizante (4) şi (5), observ că ele sunt de aceeaşi formă, numai cât a doua este de un grad mai mic cu o unitate decât cea dintâi.

Este lesne de observat atunci că procedând la rândul său cu a doua realizantă după cum am procedat cu prima, am să obţin o a treia şi din aproape în aproape am să ajung la o realizantă de un ordin oarecare i, de forma

$$(6) \qquad d_i\,(x-y) = \beta'\,(x^{n-i} + y^{n-i})$$

şi care poate să înlocuiască toate realizantele de ordin inferior ei.

5°. In particular pentru $i = n-1$, se obţine realizanta de ordinul cel mai înalt, care este:

$$(7) \qquad d_{n-1}\,(x-y) = \beta'\,(x+y).$$

Punând

$$d_{n-1} = \alpha'$$

ultima realizantă se prezintă sub forma:

$$(8) \qquad \alpha'\,(x-y) = \beta'\,(x+y).$$

Or soluţiile ecuaţiei (8) sunt date de D-l profesor OVIDIU N. ŢINO în articolul D-sale pe care l-am citat.

D-sa pune în evidenţă pe cel mai mare comun divizor al numerelor α' şi β' scriind

$$\alpha' = k\alpha \quad \text{şi} \quad \beta' = k\beta.$$

Apoi ecuaţia (8) o pune sub forma

$$(8') \qquad \alpha\,(x-y) = \beta\,(x+y)$$

şi deduce pentru x şi y soluţiile:

$$(9) \qquad x_1 = \frac{\alpha+\beta}{2},\ y_1 = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$(9') \qquad x_2 = \alpha+\beta,\ y_2 = \alpha-\beta,$$

în primul caz α şi β fiind numere prime între ele şi de aceeaşi paritate, deci ambele *impare,* iar în cazul al doilea α şi β fiind tot prime între ele, dar de *parităţi diferite.*

6°. Imi mai rămâne acum pentru a avea expresiile lui x şi y să calculez pe d_1.

Pentru aceasta mă întorc la grupele de relaţii (4″) şi elimin între ele pe d_2. Obţin astfel pentru d_1 expresia

$$(10) \qquad d_1 = \frac{\beta'}{x - y}(x^{n-1} + y^{n-1}),$$

care la rândul ei se mai poate scrie:

$$(11) \qquad d_1 = \frac{k\beta}{x - y}(x^{n-1} + y^{n-1}) \text{ *).}$$

Inlocuind acum în (11) pe x şi y cu expresiile lor date de formulele (9) şi (9′) obţinem pentru d_1 două determinaţii şi anume:

$$(12) \qquad d_{11} = k\left[\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$(12') \qquad d_{12} = \frac{k}{2}\left[(\alpha + \beta)^{n-1} + (\alpha - \beta)^{n-1}\right].$$

Ţinând la rândul său seama de formulele (12) şi (12′) deducem pentru X şi Y următoarele expresiuni generale satisfăcând condiţiunilor problemei:

$$(13) \qquad \begin{cases} X_1 = d_{11}\, x_1 = k\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)\left[\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)^{n-1} + \left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)^{n-1}\right] \\ Y_1 = d_{11}\, y_1 = k\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)\left[\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)^{n-1} + \left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)^{n-1}\right] \end{cases}$$

$$(13') \qquad \begin{cases} X_2 = d_{12}\, x_2 = k\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)\left[(\alpha + \beta)^{n-1} + (\alpha - \beta)^{n-1}\right] \\ Y_2 = d_{12}\, y_2 = k\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)\left[(\alpha + \beta)^{n-1} + (\alpha - \beta)^{n-1}\right] \end{cases}$$

*) Această expresie a lui d_1 se mai putea obţine şi direct din ecuaţia (4).

De reținut numai că în formulele (13) α și β sunt prime între ele și ambele impare, iar în formulele (13′) α și β sunt prime între ele și de parități diferite.

Aplicație. Pentru $n = 5$ formulele (13) și (13′) devin respectiv:

$$(14)\qquad \begin{cases} X_1 = k\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\dfrac{\alpha^4+4\alpha^2\beta^2+\beta^4}{8}\right) \\ Y_1 = k\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\left(\dfrac{\alpha^4+4\alpha^2\beta^2+\beta^4}{8}\right) \end{cases}$$

$$(14')\qquad \begin{cases} X_2 = k(\alpha+\beta)(\alpha^4+4\alpha^2\beta^2+\beta^4) \\ Y_2 = k(\alpha-\beta)(\alpha^4+4\alpha^2\beta^2+\beta^4)\,. \end{cases}$$

Observare. Plecând dela relațiile (4″), din aproape în aproape deducem relațiile:

$$(15)\qquad \begin{cases} d_i - \beta' x^{n-i-1} = d_{i+1}\, y \\ d_i + \beta' y^{n-i-1} = d_{i+1}\, x\,, \end{cases}$$

cari constituesc o generalizare a celor dintâi.

Făcând în aceste relații pe i să varieze dela 1 până la i, obținem două șiruri de relații, de unde prin eliminarea între relațiile fiecărui șir a lui d_2, $d_3 \ldots d_i$, obținem pentru d_1 următoarele două expresii:

$$(16)\qquad \begin{cases} d_1 = d_{i+1}\, y^i + \dfrac{\beta'}{y-x}\cdot x^{n-i-1}(y^i - x^i)\,, \\ d_1 = d_{i+1}\, x^i + \dfrac{\beta'}{y-x}\cdot y^{n-i-1}(x^i - y^i)\,. \end{cases}$$

In locul acestora obținem o expresie unică pentru d_1 făcând semisuma lor. Avem astfel:

$$(17)\quad d_1 = \frac{1}{2}\left[d_{i+1}(x^i + y^i) + \frac{\beta'}{x-y}(x^i - y^i)\,(x^{n-i-1} - y^{n-i-1})\right],$$

care pentru $i = n-2$ se reduce la:

$$(18)\qquad d_1 = \frac{1}{2}\left[d_{n-1}\,(x^{n-2} + y^{n-2}) + \beta'\,(x^{n-2} - y^{n-2})\right],$$

care se mai poate scrie și sub forma:

$$(19)\qquad d_1 = \frac{1}{2}\left[\alpha'\,(x^{n-2} + y^{n-2}) + \beta'\,(x^{n-2} - y^{n-2})\right]$$

sau încă sub forma:

$$(20)\qquad d_1 = k\left[x^{n-2}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + y^{n-2}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right],$$

în care înlocuind pe x şi y cu expresiunile lor date de formulele (9) şi (9'), regăsim formulele (12) şi (12'), cari ni-au servit pentru a deduce expresiunile lui X şi Y date de formulele (13) şi (13').

VIŞA I. EUGEN
Profesor.

Observare. Problema poate fi încă generalizată pentru cazul a două expresiuni de forma $x^n + y^n$ şi $x^{n-p} + y^{n-p}$, evident p întreg şi pozitiv, mai mic ca n.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4735. *O fracţie are termenii săi de câte două cifre. Împărţind-o cu inversa ei ne dă ca rezultat un număr întreg. Să se găsească fracţiile care îndeplinesc aceste condiţiuni.*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-rele: LIDYA TUDORAN şi SONIA TUDORAN (Şcoala centrală de fete „Marica Brâncoveanu", Bucureşti) şi de D-nii: S.-LT AL. PANĂ (Cluj), S.-LT. M. C. I. VLAD (Cluj), V. L. FLORESCU şi O. G. RĂDULESCU (Liceul militar „N. Filipescu"), T. C. ŞTEFAN (Liceul Turnu Severin), M. A. VASILESCU ŞTABU (Liceul Alba Iulia), M. T. AMĂRĂŞTEANU, R. I. CIURESCU, G. I. COTIGHER, G. DECIULESCU, G. POPOVICIU.

Un număr a împărţit cu inversul lui $(1/a)$ revine la înmulţirea lui cu el însuşi, adică ne dă patratul lui, la produs. Patratul fiind întreg, rezultă că şi numărul ridicat la patrat trebue să fie întreg. Fracţia cerută trebue dar să se reducă la un întreg. Termenii fracţiei fiind de câte două cifre, ea nu se poate reduce decât la unul din întregii 1, 2, 3, ..., 9.

De aci conchidem că soluţiile sunt următoarele:

Câtul 1: Toate fracţiile echiunitare cu termenii numerele de două cifre 10, 11, ... 99. Acestea ne dau 90 soluţiuni.

Câtul 2: Numitorul este unul din numerele $n = 10, 11, \ldots 49$ şi numărătorul respectiv $2n$. Avem 40 de soluţii.

Câtul 3: Numitorul este unul din numerele $n = 10, 11, \ldots, 33$ şi numărătorul $3n$. Avem 24 de soluţii.

Câtul 4: Numitorul este unul din numerele $n = 10, 11, \ldots, 24$ iar numitorul $4n$. Deci avem 15 soluţii.

Câtul 5: Numitorul este unul din numerele $n = 10, 11, \ldots 19$ ar numărătorul $5n$. Avem aci 10 soluţii.

Câtul 6: Numitorul este unul din numerele $n=10, 11, \ldots, 16$ şi numărătorul $6n$. Avem acum 7 soluţii.

Câtul 7: Soluţiile sunt 70/10, 77/11, 84/12, 91/13 şi 98/14, în număr de 5.

Câtul 8: Soluţiile sunt 80/10, 88/11, 96/12, în număr de 3.

Câtul 9: Soluţiile sunt 90/10 şi 99/11 în număr de 2.

Problema admite în total $90+40+24+15+10+7+5+3+2=196$ soluţii.

PROBLEMA 4747. *Se cere a se găsi numerele de patru cifre, aşa ca cifra a doua şi a treia să fie medie aritmetică a cifrelor între care se găsesc scrise.*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-ra ZOE L. FLORESCU (Clasa V, Principesa Elisabeta, Bucureşti); şi de D-nii: GAVRIL POPOVICIU (Elev inginer, Bucureşti); CLAUDIUS VL. TANASICIUC şi V. D. CARAMAN (Clasa VIII, Liceul Militar Cernăuţi); D. I. CIOC (Clasa VII, Liceul Militar Craiova); A. I. CORNĂŢEANU şi A. T. NADOLU (Clasa VII, Liceul Militar Iaşi).

Fie *mszu* numărul căutat. După enunţ avem:

$$s=\frac{1}{2}(m+d) \quad , \quad z=\frac{1}{2}(s+u),$$

$$\therefore \quad m-s=s-z=z-u.$$

Cifrele numărului dat formează o progresiune aritmetică, crescătoare sau descrescătoare. De aci rezultă următoarele 30 de soluţii:

Cu raţia 0: 1111; 2222; 3333; 4444; 5555; 6666: 7777; 8888; 9999.

Cu raţia $+1$: 1234; 2345; 3456; 4567; 5678; 6789.

Cu raţia $+2$: 1357; 2468; 3579.

Cu raţia -1: 3210; 4321; 5432; 6543; 7654; 8765; 9876.

Cu raţia -2: 6420: 7531: 8642; 9753.

Cu raţia -3: 9630.

D-ra ZOE L. FLORESCU a dat şi soluţiile formale 0000; 0123; 0246; 0369.

EXERCIȚII

22. Să se rezolve sistemul:

$$\sin^{3\cot y} x + \operatorname{tg}^{3\operatorname{cosec} x} y = 9/8.$$

$$\sqrt[\operatorname{tg} y]{\sin^2 x} - \sqrt[\sin x \operatorname{tg} y]{\sin^{\sin x} x \cdot \operatorname{tg}^{\operatorname{tg} y} y} + \sqrt[\sin x]{\operatorname{tg}^2 y} = 3/4.$$

DUMITRU D. MATEI.

Soluțiune. Ecuația 2-a a sistemului se scrie:

$$\sin^{2\cot y} x - \sin^{\cot y} x \cdot \operatorname{tg}^{\operatorname{cosec} x} y + \operatorname{tg}^{2\operatorname{cosec} x} y = 3/4.$$

Notând:

$$(1) \qquad \sin^{\cot y} x = u \ , \ \operatorname{tg}^{\operatorname{cosec} x} y = v,$$

sistemul propus se scrie:

$$(2) \qquad \begin{cases} u^3 + v^3 = 9/8 \\ u^2 - uv + v^2 = 3/4. \end{cases}$$

Cele două ecuații împărțite ne dau:

$$u + v = 3/2,$$

pe care ridicând-o la patrat și scăzând din ea ecuația 2-a a sistemului din (2), scoatem:

$$uv = 1/2.$$

u și v sunt dați de ecuația:

$$z^2 - 3/2\, z + 1/2 = 0,$$

de unde:

$$u \, , v = 1 \ , \ v, \ u = 1/2.$$

Inlocuind aceste valori în (1), avem următoarele două sisteme echivalente cu sistemul dat:

$$(3) \qquad \begin{cases} \sin^{\operatorname{cotg} y} x = 1 \\ \operatorname{tg}^{\operatorname{cosec} x} y = 1/2. \end{cases} \qquad (4) \qquad \begin{cases} \sin^{\operatorname{cotg} y} x = 1/2. \\ \operatorname{tg}^{\operatorname{cosec} x} y = 1. \end{cases}$$

Ecuația 2-a din sistemul (3) se poate scrie:

$$\operatorname{cosec} x \log \operatorname{tg} y = \operatorname{colog} 2$$

iar prima:

$$\operatorname{cotg} y \log \sin x = 0,$$

de unde:

$$\operatorname{cotg} y = 0 \ , \ \sin x = 1.$$

Prima valoare nu este verificată de ecuaţia 2-a a sistemului (3), iar a doua valoare ne conduce la rezultatele:

$$\sin x = 1 \ , \ \operatorname{tg} y = 1/2,$$

care ne dau soluţiile:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$y = k\pi + 26^0\, 33'\, 52'', 5.$$

Rezolvând analog sistemul (4) deducem:

$$\sin x = 1/2 \ , \ \operatorname{tg} y = 1 \ ;$$

de unde:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \ , \ x = (2k+1)\,\pi - \frac{\pi}{6} \ ,$$

$$y = k\pi + \frac{\pi}{4} .$$

23. Să se stabilească relaţia:

$$\frac{(\operatorname{tg}A - \operatorname{tg}B)\,(\operatorname{tg}B - \operatorname{tg}C)\,(\operatorname{tg}C - \operatorname{tg}A)}{8\ \operatorname{tg}A\ \operatorname{tg}B\ \operatorname{tg}C} = \frac{(a^2 - b^2)\,(b^2 - c^2)\,(c^2 - a^2)}{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2-b^2+c^2)} .$$

MARCEL AMĂRĂŞTEANU.

R. $\sin A = \dfrac{2s}{bc}$; $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, deci $\operatorname{tg}A = \dfrac{4s}{b^2+c^2-a^2}$.

Analog găsim: $\operatorname{tg}B = \dfrac{4s}{a^2 - b^2 + c^2}$

$$\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}B} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{b^2 + c^2 - a^2} \ ; \ \frac{\operatorname{tg}A - \operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}B} = \frac{2a^2 - 2b^2}{b^2 + c^2 - a^2} \ ; \ \frac{\operatorname{tg}A - \operatorname{tg}B}{2\ \operatorname{tg}B} = \frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a} .$$

Ana log se obţin alte 2 relaţii şi prin înmulţire se verifică relaţia dată.

24. Se dau vectorii $\vec{u}\,[(a+b)^2, -a^2, -b^2]$, $\vec{v}\,[-(a-b)^2, a^2, b^2]$, $\vec{w}\ (2ab,\ 1,\ 1)$. Când aceşti vectori sunt coplanari?

SUB-LT. ION C. SAVIN.

R. Va trebui ca produsul mixt $\vec{u}(\vec{v} \wedge \vec{w})$ să fie nul, deci

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & -(a-b)^2 & 2ab \\ -a^2 & a^2 & 1 \\ -b^2 & b^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desvoltând determinantul, găsim condiția $a = \pm b$.

PROBLEME PROPUSE

4807. Se dă o piramidă. Se consideră o piramidă care are un vârf comun cu prima și celelalte trei vârfuri în jumătățile a trei muchii ale acesteia. Care este volumul celei de a doua piramide față de al celei dintâiu?

I. IONESCU.

4808. Să se găsească cel mai mic patrat perfect ale cărui ultime patru cifre dela dreapta sunt în progresie geometrică.

V. THÉBAULT.

4809. Să se construiască un triunghiu dreptunghiu cunoscând vârful A, direcția ipotenuzei BC și un cerc O pe care se află vârfurile unghiurilor ascuțite B și C. Discuție.

G-L. GH. BUICLIU.

4810. Fie A'B'C' triunghiul ortic al triunghiului cu unghiuri ascuțite ABC — A_b, A_c proiecțiile mijloacelor segmentelor A'C, A'B pe AB, AC — B_a, B_c, C_a, C_b puncte obținute analog.

Să se stabilească relația

$$\overline{A_bA_c} + \overline{B_cB_a} + \overline{C_aC_b} = \frac{5}{4}(\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'A'}).$$

C. IONESCU-BUJOR.

4811. Prin H se duce o dreaptă Δ care taie laturile triunghiului ABC în a, b, c. Perpendicularele duse prin H pe Aa, Bb, Cc taie laturile triunghiului ABC în α, β, γ.

Să se arate ca $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sunt paralele.

THEODOR G. COCEA.

4812. Diferența de nivel dintre două vile așezate pe coasta unui deal este de *25 m.* Lungimea reală a potecii care le unește este cu *40%* mai mare decât distanța în linie dreaptă măsurată pe un plan exact, iar panta medie a drumului real este cu 28% mai mică decât a drumului ce le-ar lega direct. Se cere lungimea potecii dintre vile.

ULPIU FLORESCU.

4813. Ecuațiile

$$x^2 + px + q = 1 \quad \text{și} \quad (q-1)x^2 + pqx + q^2 = 0$$

au rădăcinile de aceeași natură. Să se caute relațiunea dintre rădăcinile lor.

N. N. MIHĂILEANU.

4814. Să se construiască curba

$$y = x^4 - 8px^3 - 2q^2x^2,$$

p și q fiind două numere reale. Din construcția curbei să se deducă discuția rădăcinilor ecuației:

$$x^4 - 8px^3 - 2q^2x^2 - \lambda = 0,$$

λ fiind un parametru real.

Aplicație numerică:

$$x^4 - 8x^3 - 14x^2 - \lambda = 0.$$

TH. ANGHELUȚĂ.

4815. M fiind un punct pe cercul circumscris unui poligon regulat $A_1 A_2 \ldots A_n$, iar N un punct pe cercul înscris, să se arate că există relaţia:

$$2 \Sigma \overline{NA_i^2} = \left(1 + \cos^2 \frac{\pi}{n}\right) \Sigma \overline{MA_i^2} = 2n \left(1 + \cos^2 \frac{\pi}{n}\right) R^2.$$

AL. A. ROŞU.

4816. Să se stabilească identitatea

$$\sin^2(A - B) + \sin^2 C \cos^2(A - B) = (\sin^2 A + \sin^2 B)(\cos^2 A + \cos^2 B),$$

A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu oarecare.

DIMITRIE MAVRODIN.

4817. α şi β fiind doi parametri variabili, să se discute ecuaţia:

$$54x^3 - 9x^2 - 6\alpha^2 x + \beta^3 = 0.$$

GH. VASILIU.

4818. Să se determine n numere întregi şi pozitive astfel ca suma lor să fie egală cu produsul lor şi una din ele să fie egală cu media aritmetică a celorlalte $n - 1$.

TIBERIU POPOVICIU.

ERATĂ. Problema rezolvată publicată la pag. 433, anul XLII, are numărul 4073, nu 4703 cum din eroare s'a publicat.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam Mircea (2503, N); *Anicolaesi V. Clement* (4691); *Bazac Alex.* (4728); *Beiu-Paladi Gh. E.* (4757); *Bivolaru Liviu* (4378); *Bostangiu D. I.* (4795); *Buzincu I. Ioan* (4410, 707, 33, 54, 81); *Chițulescu I. T.* (4795, N); *Ciurescu R.* (4757, N); *Cojocaru P. Petru* (4611, 35, 37, 81, 91, 728, 30, 33, 69, 81, 85); *Constantinescu G. G.* (4728); *Cornățeanu I. Aurel* (4729); *Crișan A. I.* (4728); *Deutsch Adolf* (4728, 85); *Diaconescu D. M.* (4728); *Diaconescu I.* (4757); *Dimitriu Călin I.* (4757, 69, 95); *Florescu Victor* (4728, 57); *Gavrilescu N. Const.* (4757, 95, 99); *Grumăzescu M.* Subloc. (4769, 85, 95); *Herman Victor* (4728, 69, 85, 95); *Imbru Ioan* (4728); *Jareghie V. Ioan* (4785); *Lascu Bal* (4728, 57); *Leuca I.* (4757, 66); *Mamut T. Petre* (4378, 728); *Marcovici Eug.* (4667, 721, 28, 57); *Martac R.* (4757); *Mavrodin D.* (4728); *Milu I. N.* (4769); *Năstase Marin* (4728); *Negoiță M. V. P.* (4795); *Negrea A. Mircea Leonte* (2281, 4704, 28, 57, 95); *Pantelimon V. Const.* (4398, 681, 785); *Parepeanu I.* Subloc. (4757); *Pascaru I. I.* (4728); *Petrescu Achille* (4785); *Petrescu Ben.* (4757); *Popa D. Mircea* (4681, 785); *Popescu-Zorica Al.* (4757, 65, 89, 95); *Popoviciu I. Gavril* (4503); *Postelnicescu C. M.* (4728); *Pungă I. Nicolae* (4378); *Răducănescu D.* (4757); *Rădulescu Oct.* (4728); *Rauch L. P. T.* (4795); *Ripianu D-tru* (4728, 55, 69, 99, 800); *Rumici A. Gh.* (4785, 95); *Stănculescu I.* (4757); *Stănculescu Virgil* (4691, 757); *Stănulescu V.* (4695); *Ștefănescu D. N.* (4585, 728, 95, 99); *Ștefănescu P.* (4757); *Streder I.* (4695); *Tanasiciuc Cl.* (4728); *Tânjală Em.* (4757); *Teodorescu Dorin* (4728); *Tilică C. Șt.* (4570, 97, 99, 733, 57, 81, 95); *Țițeica I. I.* (4728); *Toma Alex.* Subloc. (4728); *Tomescu T. Horațiu* (4728); *Truftin Traian* (4785); *Tudoran M. Sonia* (4766); *Turcu P. Sandu* (4785); *Vasilescu-Stabu Al. M.* (4729, 57, 62, 85, 95); *Vlad Mihai* Locot. (4764).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe **o singură parte a foii și nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN**

C. 44379

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLII

NUMĂRUL 10. — IUNIE 1937

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII

SUMARUL

1. Rezultatul Concursului „Gazetei Matematice“ . . . . . *G. Țițeica.*
2. Două aritmetici vechi anonime *Victor Marian.*
3. Relațiuni între suprafețe de triunghiuri . . . . . *R. Goormaghtigh.*
4. Din geometria triunghiului . . *General Gh. I. Popescu.*
5. Gh. Asachi și postulatul lui Euclid . . . . . *Ilie Popa.*
6. Raport pentru decernarea premiului „V. Cristescu“.
7. Note Matematice: 42 — 45.
8. Bibliografie.
9. Cereri.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 2503, 2623, 3299, 3760, 4394, 4409, 4455, 4467, 4471, 4542, 4569, 4656, 4712, 4732, 4767, 4769, 4795.
12. Exerciții: 25 — 28.
13. Probleme propuse: 4819 — 4830.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1937

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer-Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **D. Stan**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1936 şi nerezolvate sunt enumărate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4724, 26, 31, 34, 42, 49, 61, 70, 72, 79, 80, 83, 86, 90, 91, 92, 94, 97, 98, 801, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	220	260	80
5— 8 „	375	425	100
9—16 „	620	700	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLII *SUPLIMENT* No. 10

DARE DE SEAMĂ

Asupra Mesei Comune care a încheiat Concursul Societăţii „Gazeta Matematică", din anul 1937

In seara zilei de 8 Mai ora 21 erau prezenţi în sala restaurantului „Luzana", din strada 11 Iunie membrii Societăţei *Gazeta Matematică* şi invitaţii care au luat parte la masa comună cu ocaziunea concursului din anul acesta; însă în număr mai mic ca în anii trecuţi.

Dintre concurenţi, au luat parte cei admişi la probele scrise, un ploton de elevi ai liceelor militare şi câţiva elevi ai liceelor civile.

In locul de frunte s'au aşezat ca *Stâlpi* ai *Gazetei Matematice* D-nii profesori: A. G. IOACHIMESCU, I. IONESCU şi G. ŢIŢEICA, deoparte şi alta cei mai în vârstă membri şi invitaţi; iar cele patru ramificaţii ale mesei se terminau cu elevii concurenţi.

— Au mai fost prezenţi la masa Comună:

Domnii: GENERAL IOAN S. DEMETRESCU, Directorul Liceelor Militare, LOCOT. COLONEL ING. C. PANĂ, MAIOR G. ALEXIU, MAIOR NIC. NIŢESCU, CPT. I. VLĂDESCU, LT. GH. ANA, LT. C. CIOCA, LT. MAREŞ şi LT. SCIPIO POPOVICI ca însoţitori ai elevilor liceelor militare, apoi Domnii: E. ABASON, D. BARBILIAN, AL. D. BUNESCU, I. BUŞILĂ, D. CAMBUREANU, I. CHIŢULESCU, GH. DUMITRESCU, U. M. FLORESCU, MAIOR ALEX. D. GHIMUŞ, GH. TH. GHEORGHIU, GH. ILIESCU, G. A. IOACHIMESCU, LT. C. IONESCU-ŢIU, N. MIHĂILEANU, CRISTEA NICULESCU, C. D. ORĂŞANU, AL. PANTAZI, A. A. ROSU, GH. D. SIMIONESCU, D. V. STOICA, GR. VASILESCU, A. VICIU şi GR. ZAMFIRESCU, membrii ai Societăţii *Gazeta Matematică* şi elevii concurenţi:

D-RA G. ROMAŞCAN şi D-NII: ANASTASIU M. M., APOSTOL V. RADU, BEIU PALADI ERNEST, BURLEA M. ALEX., BUZINCU I. IOAN, CIOC I. DUMITRU, COJOCARU I. PETRE, CORNĂŢEANU I. AUREL, CRĂCIUNESCU I. MARCEL, CREŢU ŞERBAN, FLORESCU L. VICTOR, IOAN A. ILIE, IONESCU D. STELIAN, MARTAC V. RADU, MIHALCEA N. NICOLAE, NĂSTASE GR. MARIN, NEDELESCU ANTON, PASĂRE S. EMIL, POPIŞCA V. MIRCEA, POPOVICI GAVRIL, POSTELNICESCU C. MIRCEA, PRECIADO I. THEODOR, RĂDULESCU G. OCTAVIAN, ŞAICHIN O. ADOLF, ŞTEFĂNESCU D. NICOLAE, TĂTARU F. CONSTANTIN, TĂTARU N. NICOLAE, THEODORESCU N. DORIN, TRUFIM C. TRAIAN, TURCU L. ALEXANDRU şi VASILIU C. DUMITRU.

Orchestra cântă câteva cântece pe care D-l C. ORĂŞEANU le recunoaşte: *Glasul roţilor de tren, Doi ochi negri, Căzăceasca, Iubita mea cu ochii*

verzi,... în timp ce elevii încep să obţină autografele tradiţionale pe cartoanele cu menuul având ca desen modelul Diplomă de premiu.

Unii din domni fredonează după muzică şi buna dispoziţie începe. Semnarea autografelor de regulă începe dela D-l PROFESOR I. IONESCU.

Seria cuvântărilor este deschisă de D-l PROFESOR A. GH. IOACHIMESCU, ca cel mai în vârstă dintre Stâlpii Societăţii:

„Se cuvine ca întotdeauna primul gând să fie îndreptat spre acela care reprezintă ţara M. S. Regele Carol II", muzica întonează *Trăiască Regele „să urăm M. S. Regelui sănătate domnie liniştită, viaţă lungă pentru binele neamului. Să trăiască Regele Culturii!"*. Asistenţa ovaţionează şi după câteva minute se ridică şi vorbeşte D-l PROF. I. IONESCU, căruia după tradiţia formată, fiind unul din *întemeietorii* **Gazetei Matematice,** ia revenit de câţiva ani sarcina de a caracteriza concursul. *„Din cauza cursurilor la Şcoala Politechnică începute Joi 6 Mai am fost de câteva ori la concursul ţinut la facultate şi am rămas foarte mulţumit. Sunt elevi care au luat în serios, unii s'au pregătit şi pentru anii următori.*

Din atmosfera concursului reiese un caracter militar. Relaţiile dintre Matematică şi Militărie le-am arătat în câteva articole din **Gazeta Matematică** *apărute în timpul războiului.*

Totdeauna am avut elevi militari la concurs. Colegul nostru Domnul PROFESOR TEODOREANU, *dela Liceul militar Iaşi trimetea mai totdeauna candidaţi. Intr'un an am intervenit la Şcoala de Infanterie pentru găzduirea elevilor şi mi-s'a spus că elevii Şcoalelor militare să cetească războaiele. Acel director s'a predat în timpul marelui război. Războiul nu se poate duce fără ştiinţă. Inginerul* MAURICE D'OCAGNE *a fost mobilizat în Franţa pentru lucrări de monografie şi a adus mari servicii formând abacce pentru Artilerie.*

La noi se face o pregătire a ofiţerilor de Specialitate pentru viaţa de război.

Numărul elevilor militari la concurs este covârşitor, apoi faptul că avem ofiţeri chiar în **Redacţia Gazetei Matematice** *este îmbucurător; însă cu părere de rău observ lipsa în această seară a D-lor* GENERAL GH. BUICLIU, COL. LITEANU *şi alţii,* apoi ridicând paharul *„Să trăiască Armata Română! Să trăiască Domnul* GENERAL DEMETRESCU!"

După această însufleţită cuvântare intervine orchestra cu melodii de armonie pentru a menţine veselia şi armonia produsă în entuziasmul deslănţuit.

Se face tăcere când D-l PROFESOR GH. ŢIŢEICA anunţă cuvântarea indice trei — *cuvântarea morală.*

Domnia sa remarcă, din călătoria recentă la Roma, un dezechilibru în natură: vântul rece, Primăvarara târzie nu numai la noi ci în toată lumea, un dezechilibru sufletesc în Europa — Spania este un iad şi nu se ştie dacă va veni un dezechilibru total; toate preocupările de grija de mâine.

„Concursul este asemănător cu un vânt aspru de Iarnă din care ies cei puternici. Recolta o vom vedea. Rezultatul noi îl aşteptăm din an în an şi vrem să fie din ce în ce mai bun. Matematica este şi o disciplină sufletească, un echilibru în faţa tutulor elementelor de descompunere a societăţii.

Din această cauză dorim concursului să fie o legătură între Matematică și Patriotism. In această grădină a **Gazetei Matematice,** *vântul aspru dărâmă multe flori; însă cele care ies, sperăm să fie boboci frumoși, selecționați cât mai bine. Aceeași legătură sufletească mai dorim și pentru cei ce nu au fost puternici, pentru tinerii care nu s'au prezentat și pentru membrii care au înflorit, premianții de altă dată, cu toată bucuria să trăiască cei ce s'au prezentat la Concursul* **Gazetei Matematice,** *pentru care ridic paharul".*

După aplauze, privirile fiind îndreptate spre cei trei vorbitori, cântă orchestra și apoi ia cuvântul D-l GENERAL ION S. DEMETRESCU :

„Mulțumesc Domnului INGINER ION IONESCU, *pentru cuvintele elogioase aduse armatei și urările aduse mie personal.*

Direcția Liceelor Militare va respecta meritele aducând elogii revistei. Pe cei dela Invățământul Militar ne-ați câștigat sufletește. Suntem datori să dăm o educație patriotică, asupra culturii, instituțiilor de Stat, dinastiei, asupra cultului oamenilor mari, școalei, bisericii, magistraturii și asupra acelora ce se ocupă cu construcția arhitecturală a sufletelor.

Gazeta Matematică, *a devenit o instituție de Stat care caută să formeze pe elevii de liceu așa cum îi dorim noi. Technica, arta militară este urmată zi de zi de problemele matematicilor aplicate. Vom cultiva cultul pentru* **Gazeta Matematică,** *și pentru oamenii mari ai țării.*

In Septembrie vom dărui 15.000 lei **Gazetei Matematice** *și tot în Septembrie dispunem ca portretele Domnilor* IOACHIMESCU, IONECU *și* ȚIȚEICA, *să fie în cuprinsul fiecărui liceu militar pentru ca toți elevii liceelor militare să-i cunoască și să-i stimeze.*

Urez din toată inima ca **Gazeta Matematică să crească și să înflorească!"**

Se provoacă nesfârșite aplauze văzându-se că dragostea pentru *Gazeta Matematică,* a întrecut și de data aceasta cadrul membrilor ei, al corespondenților ei și s'a prelungit analitic în domeniul factorilor Conducători ai școalei.

Domnul Inginer CRISTEA NICULESCU, începe să depene în linii mari cum *Gazeta Matematică,* a urmat legea ondulațiunei cu momente grele și momente mari.

„In momentele mari stâlpii au împărțit gloria cu toți patru, azi se găsesc trei; iar în jurul stâlpilor o sumă de ingineri, militari și profesori. Nu toți din aceștia mai activează și acum la **Gazeta Matematică;** *însă au foarte mult respect real pentru Gazetă cât și pentru Stâlpi, respect pe care au știut să-l impună stâlpii în momentele grele, prin publicațiile alese și prin creșterea acelui copil care se chiamă* **Gazeta Matematică.** *In acești oameni se cristalizează puterea sufletească, gândurile ce i-a animat când au bătut vânturi aspre.*

Ridic paharul în sănătatea celor trei stâlpi în care continuatorii vor găsi exemplul".

Dintre concurenți vorbește elevul Plotonier-major NĂSTASE MARIN :

„La rându-ne, cu ocazia acestor clipe frumoase când sufletele lasă să isbucnească cele mai sincere mărturisiri, încercăm și noi candidații să ne

spunem gândurile şi sentimentele ce ne stăpânesc după terminarea Concursului **Gazetei Matematice.**

— Clipe frumoase au fost şi acelea din timpul probelor scrise şi orale, când pe lângă modestele noastre cunoştiinţe, primiam altele noi, înmânate cu atâta dragoste şi cu atâta crez în ştiinţă şi adevăr.

— Fiţi siguri că atât la concursurile anuale cât şi în alte ocazii am primit cu sufletele şi mintile deschise, semintele culturii pe care Dumneavoastră ni le-aţi aruncat spre o continuitate în viitor.

Fiţi siguri iarăşi, că ele vor rodi, vor căpăta viaţă. Trebue să rodească — acesta ne este ca un imperativ, ca un îndreptar spre bine şi frumos.

Dacă noi cei din clasa VIII-a, va trebui pentru câtva timp să ne deslipim din cadrul acestei societăţi, ne vom reîntoarce iarăşi cu acelaşi zel şi cu aceeaşi dorinţă de a activă în cadrul matematicelor. In armată ni se dă o disciplină în genere, prin matematici ni se dă o disciplină minţii, gândirei şi aceasta este una din cauzele ce determină strânsa legătură între Armată şi Matematică.

Cu aceste preocupări ne descifrăm pe noi înşine ne identificăm propria personalitate, ne unim toţi pentru a lucrà împreună într'o lume a dezinteresării şi a idealului.

Aţi contribuit laolaltă pentru a înălţa un adevărat edificiu cultural ţării noastre. Aţi întemeiat şi întreţinut tot timpul **Gazeta Matematică** *pe care astăzi o urmăriţi mulţumiţi în mersul ei ascensional.*

Laurii recunoştinţei şi ai frumoaselor virtuţi îi aveţi acum ca şi oricând ; ceiace vroim să aducem în plus noi tânăra generaţie este promisiunea puternică de a păstrà şi continua opera aceasta de înalte realizări".

Domnul ING. AL. D. BUNESCU, mulţumeşte cu recunoştiinţă D-lui GENERAL I. S. DEMETRESCU, pentru donaţia pentru care va scoate chitanţa în Toamnă, şi-i urează să conducă mai departe cu aceeaşi însufleţire liceele militare, în timp ce D-l I. IONESCU nu se uneşte cu această părere şi-i urează să meargă mai departe.

— In al doilea rând Domnul BUNESCU mulţumeşte *Căilor Ferate* pentru transportul candidaţilor la concurs, apoi mulţumeşte D-lui THIERRIN care a găzduit câţiva candidaţi şi în urmă aduce mulţumiri *Decanatului Facultăţii de Ştiinţe* care a pus la dispoziţie localul. Tutulor le urează prosperitate.

Seria cuvântărilor fiind terminată D-l ING. CHIŢULESCU reaminteşte introducerea în partea a doua, partea distractivă şi observă plecarea Domnului ING. C. ORĂŞANU care făceà tradiţionalele versuri.

D-l A. A. ROŞU, citeşte versurile unui concurent, valoros în timpul anului ; însă respins la lucrarea scrisă, găsite pe sugativă scrise astfel

„Dac'ai fi în mintea mea
Eu acuş te-aşi rezolva
Şi la oral aş intrà
Dar asta nu se va putea".

Trecând de miezul nopții părăsesc sala D-nii A. IOACHIMESCU și G. ȚIȚEICA.

Partea distractivă a început repede, cântând la vioară elevul Plotonier major NĂSTASE apoi la chitară, elevul O. RĂDULESCU. Domnul Profesor GH. I. DUMITRESCU începe să cânte cu vioara, apoi îndemnat de D-l GH. TH. GHEORGHIU se obține o audiție muzicală, se rupe o coardă și apoi termină pe celelalte.

— Din nou se face liniște. Se ridică D-l ING. AL. D. BUNESCU, Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului în calitate de *Casier* al **Gazetei Matematice** citește o scrisoare dela D-l ING. D. V. STOICA.

— *„In semn de recunoștință pentru membrii stâlpi ai* **Gazetei Matematice** *și de dragoste pentru tineretul care ne înconjoară țin la dispoziția* **Gazetei Matematice,** *10.000 lei pentru donare de cărți elevilor concurenți care se văd pe drumul cel bun din rezultatele concursului".*

D-l ING. CHIȚULESCU nu vrea să întrerupă programul și citește poezia: *„Realism și poezie"*, publicată de unul din membrii Gazetei acum 27 ani ca supliment în *Gazeta Matematică.*

S'a remarcat lipsa dela această masă comună a D-lor membrii redactori G-RAL GH. BUICLIU, O. ȚINO, COLONEL G. LITEANU, M. GHERMĂNESCU, MAIOR I. LINTEȘ și C. IONESCU-BUJOR, care deși obișnuiau să ia parte la toate mesele comune de data aceasta au lipsit din București fiind reținuți de alte preocupări.

— Masa Comună s'a sfârșit când orologiile au trecut cu aproape două ore în a doua zi. Elevii păreau destul de vioi; iar unii se îngrijiau și de concursul Tinerimei la care mai luau parte. Rezultatul a fost văzut și la acest concurs unde deasemenea liceele militare au ocupat locurile de frunte.

LOCOT. C. IONESCU-ȚIU

REZULTATUL CONCURSULUI „GAZETEI MATEMATICE“

1. Cu o stăruință cunoscută și recunoscută de toată lumea, *Gazeta Matematică,* în vederea scopului înalt pe care și l-a fixat dela întemeiere, ține regulat concursurile sale anuale.

Numărul candidaților înscriși la concurs e acum foarte mare, dar probele scrise dovedesc că numărul celor bine pregătiți e foarte mic. Pe lângă aceasta, ca și anul trecut, cele mai bune elemente vin din școlile militare. Fără îndoială, aceste școli dau o bună și serioasă pregătire matematică, temelie bună și sigură pentru specialitățile militare.

Lucrările concursului s'au ținut la Facultatea de științe prin încuviințarea D-lui Decan DR. HURMUZESCU, căruia ținem să-i aducem călduroase mulțumiri.

Comisiunea de examinare a fost compusă din D-nii A. ROȘU pentru Algebra de cl. IV și V, G. T. GHEORGHIU pentru Algebra de cl. VII, VIII și anul preparator, N. N. MIHĂILEANU pentru Geometria de cl. IV, G. D. SIMIONESCU pentru Geometria de cl. V și VI, N. N. MIHĂILEANU pentru Trigonometrie, AL. PANTAZI pentru Geometria analitică și I. CHIȚULESCU pentru Geometria descriptivă.

In legătură cu comisia concursului mai adaug un fapt, care după principiile *Gazetei* merită toată atenția. Un membru al comisiei a avut printre candidați un elev al său. De aceea subiectul probei scrise și examenul oral al acestui candidat au fost făcute de alte persoane. Cu alte cuvinte, din propria inițiativă a acestui membru al comisiei, s'au cerut toate măsurile care să asigure imparțialitatea și, prin urmare, încrederea în valoarea superioară a concursului. E bine să se știe că concursul *Gazetei Matematice* e ținut cu întreagă seriozitate.

Ca totdeauna probele concursului au fost urmărite de multe persoane, în afară de membrii comisiunii, și anume D-nii E. ABASON, D. BARBILIAN, AL. BUNESCU, N. CIORĂNESCU, G. DUMITRESCU, G. ILIESCU, A. G. IOACHIMESCU, ION IONESCU, LT. C. D. IONESCU-ȚIU, GR. LIVADA, T. MAREȘ, MIRON NICOLESCU, ALEX. NICOLESCU, P. SERGESCU, G. STAMATESCU, G. ȚIȚEICA, P. TROFIMOV, A. VICIU. Unele din aceste persoane au pus chestiuni la oral.

2. Ca rezultat general concursul de anul acesta e aproape la fel cu cel de anul trecut. Incât, în linii generale, am putea fi mulţumiţi. Cu toate acestea ne impresionează numărul mare al elementelor slabe şi care, totuşi, se prezintă la concurs. Ar fi bine ca judecata severă şi cumpănirea dreaptă să şi-o facă în rândul întâi candidatul însuşi şi, prin urmare, când nu se simte bine pregătit să numai încurce lumea.

Iată acum clasificarea candidaţilor, cu premiile acordate, pe temeiul probelor date.

I. In fruntea listei a ieşit D-l ŞTEFĂNESCU D. NICOLAE, elev în clasa VII la liceul militar „Mânăstirea Dealu", pentru că a dat dovadă, atât la scris cât şi la oral, la Algebră şi Geometrie descriptivă, că stăpâneşte technica în calcul şi în construcţie, precum şi siguranţa în raţionament. La toate aceste probe acest candidat a obţinut notele maxime. I se dau ca premiu volumele următoare: X. ANTOMARI — *Cours de Géométrie Descriptive;* P. VAN DEUREN — *Théorie des Probabilités;* C. GUICHARD — *Traité de Géométrie, Tome I et II;* ING. D. A. STAN & ING. A. TAUBER — *Tabele pentru calculul fundaţiilor de beton armnt ale stâlpilor izolaţi;* P. MONTEL — *Leţiuni despre funcţiunile aproape-periodice;* TR. LALESCU — *Curs de Geometrie Analitică,* (fasc. IV).

II. La locul al doilea a ieşit D-l IOAN A. ILIE, elev în clasa VI la liceul militar „Mânăstirea Dealu", care s'a deosebit numai prin proba scrisă, şi aceasta foarte bună, dar nu excelentă ca celelalte probe, de candidatul precedent. Probele de Trigonometrie şi oralul de Geometrie au obţinut cele mai înalte note. I se dau ca premiu volumele:

A. TRESSE & A. THYBAUT — *Cours de Géométrie Analytique;* A. TÉTREL — *Solutions de problèmes de Mathématiques;* P. MONTEL — *Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes;* ING. D. A. STAN & ING. A. TAUBER — *Tabele pentru calculul fundaţiilor de beton armat ale stâlpilor izolaţi;* P. MONTEL — *Lecţiuni despre funcţiunile aproape-periodice;* TR. LALESCU — *Curs de Geometrie Analitică,* (fasc. IV).

III. In rândul al treilea a venit D-l FLORESCU L. VICTOR, elev în clasa VI la liceul militar „Mânăstirea Dealu", pentru probele foarte bune de Trigonometrie şi de Geometrie. I se dau ca premiu volumele:

J. TANNERY — *Leçons d'Arithmétique;* M. GHERMĂNESCU — *Curs de Algebră Superioară;* P. MONTEL — *Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes;* ING. D. A. STAN & ING. A. TAUBER — *Tabele pentru calculul fundaţiilor de beton armat ale stâlpilor izolaţi;* TR. LALESCU — *Curs de Geometrie Analitică,* (fasc. IV).

IV. In rândul al patrulea a ieşit D-l THEODORESCU N. DORIN, elev în clasa V la liceul militar „Mânăstirea Dealu", pentru proba orală de Algebră şi proba scrisă de Geometrie amândouă foarte bune, şi proba orală de Geometrie bună. I se dau ca premiu volumele:

F. FRENET — *Recueil d'Exercices sur le Calcul Infinitésimal;* G. BOULIGAND — *Cours de Géométrie Analytique;* P. MONTEL — *Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes; Gazeta Matematică* — (Volum Jubilar); TR. LALESCU — *Curs de Geometrie Analitică,* (fasc. IV).

E de observat în privinţa listei precedente că trei dintre candidaţi au figurat, aproape în aceeaş ordine şi anul trecut. Apoi, tot ca şi anul trecut, toţi cei patru înscrişi pe listă sunt dela liceul „Mânăstirea Dealu". Dorinţa noastră este ca lista noastră să se lungească cu elemente din ce în ce mai bune şi din alte părţi.

3. Inscriem cu menţiuni pentru anumite probe pe următorii candidaţi, cărora li se acordă câte un volum notat în dreptul fiecăruia:

Clasa V-a. CRĂCIUNESCU MARCEL (Oralul de Algebră şi cel de Geometrie), TR. LALESCU — *Curs de Geometrie Analitică* (fasc. IV);

IONESCU STELIAN (Oralul de Geometrie), TR. LALESCU — *Curs de Geometrie Analitică* (fasc. IV);

PAPARIZU I. GABRIEL (Oralul de Algebră), A. ANGELESCU — *Lecţiuni de Calcul Diferenţial.*

Clasa VI. RĂDULESCU G. OCT. (Oralul de Trigonometrie), TR. LALESCU — *Curs de Geometrie Analitică* (fasc. IV);

TĂTARU N. NICOLAE (Oralul de Geometrie), *Gazeta Matematică* — (Volum Jubilar).

Clasa VII. APOSTOL V. RADU (Lucrarea scrisă de Algebră), TR. LALESCU — *Curs de Geometrie Analitică* (fasc. IV);

CORNĂŢEANU A. (Oralul de Geometrie Descriptivă), A. ANGELESCU — *Lecţiuni de Calcul Diferenţial*;

ROMAŞCAN GEORGETA (Lucrarea scrisă de Geometrie Descriptivă), TR. LALESCU — *Curs de Geometrie Analitică* (fasc. IV);

ŞAICHIN O. AD. (Lucrarea scrisă de Algebră, Oralul de Geometrie Descriptivă), I. IONESCU — *Beton Armat.*

Clasa VIII. BEIU PALADE ERNEST (Oralul de Algebră), I. IONESCU — *Beton Armat;*

BUZINCU I. IOAN (Probele de Geometrie Analitică), I. IONESCU — *Beton Armat;*

NĂSTASE MARIN (Probele de Geometrie Analitică), TR. LALESCU — *Curs de Geometrie Analitică* (fasc. IV);

NEDELESCU ANTON (Lucrarea scrisă de Geometrie Analitică), *Gazeta Matematică* — (Volum Jubilar);

POSTELNICESCU MIRCEA (Probele de Geometrie Analitică), . IONESCU — *Beton Armat.*

Şi astfel s'a încheiat anul acesta sforţarea tineretului pe tărâmul matematic. Rezultat bun. Il dorim şi mai bun.

DELEGAT PENTRU RAPOARTE
G. ŢIŢEICA

DOUĂ ARITMETICI VECHI ANONIME

(Urmare de la pag. 451)

In ce priveşte Aritmetica dela 1806, chestiunea e cu mult mai grea. Putem afirma cu siguranţă despre ea numai că e un manual de şcoală tradus după cel oficial german: *Anleitung zum Rechnen,* tipărit la Buda în 1780, după care am arătat că e tradusă şi Aritmetica lui OBRADOVICI. Dau ca unicul exemplu, care să ilustreze acest lucru, începutul primului capitol.

Anleitung zum Rechnen.	**Aritmetica dela 1806.**
A. *Vorläufige Erklärungen.*	A. *Esplicaţii, sau tâlcuiri înainte mergătoare.*
1. *Was eine Einheit ist.*	1. *Ce iaşte Unimea sau Unînţa (Unişoara)?*
Jedes Ding einzeln betrachtet ist eine Einheit; z. B. ein Apfel ist eine Einheit, ein Haus ist eine Einheit.	*Fieşte care lucru, ce se socoteşte de osebi e unime. P. P. Un măr e o unime; o casă iarăşi e o unime.*

2. Was eine Zahl ist.

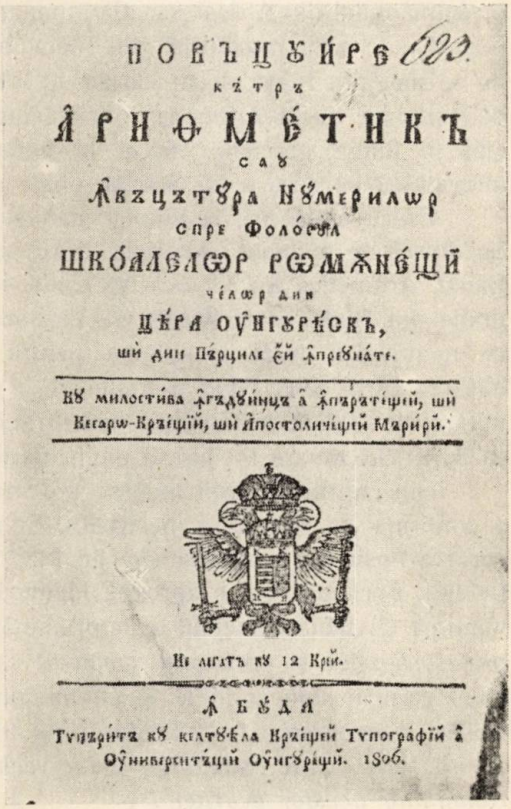
Mehrere Einheiten von einerlei Art, heisst man eine Zahl; z. B. Zwei Aepfel heisst man eine Zahl von Aepfeln; drei Häuser heisst man ebenfall eine Zahl von Häusern.

2. Ce iaşte Numerul?

Mai multe unimi ce sânt de un feliu luate împreună fac Numer. P. P. Două meare fac Numer de Meare; trei case fac Numer de case.

Mai observ că de astă dată nu cunoaştem nici pe autorul originalului german.

In cele ce urmează voiu arăta motivele cari mă îndeamnă să bănuesc, că traducătorul acestei cărţi ar putea fi SAMOIL M. KLEIN. Intr'adevăr, se ştie că în 1772, KLEIN a fost numit profesor de matematici la şcoalele din Blaj şi că el a scris şi o Aritmetică. El însuşi scrie în lucrarea sa; *„Scurtă cunoştinţă a istoriei Românilor“*, publicată de T. CIPARIU în *„Archivu“* din 20 Aprilie 1868, următoarele: *„La acestea se pot adauge şi cele ce am scris eu pre limba românească, care sânt: Gramatica, Logica Aritmetica... Acestea toate eu leam făcut au eu leam tălmăcit“* (pag. 276). CIPARIU mai aminteşte, că manuscrisul publicat de dânsul e o copie din anul 1800. Prin urmare lucrările lui KLEIN înşirate mai



ПОВѢЦЮИРЕ
КѢТРЪ
ÂРНѲМЕТНИКЪ
САѲ
Âвѫцѫтѹра Нѹмерилѡр
спре Фолосѹл
ШКѺЛАВСѲР РѲМѪНѢЩЙ
чѣлѡр дин
ЦѢРА ОѲНГѢРЕСКЪ,
шй дин Пѫрциле ѣй Âпрѣѹнѧте.

Кѹ милостива Âгѫдѹинца а Âпѫратѡрий, шй Кѣгарѡ-Кръіцій, шй Âпостолічій Марій.

Ис лигатъ кѹ 12 Крй.

Âѣдѧ
Тѹпърітъ кѹ кѣлтѹѣла Крăіцій Тѹпографіи а Оѳнивърсітăцій Оѳнгѹріи. 1806.

Foaie de titlu a Aritmeticii din 1806.

sus — astfel şi *Aritmetica* — sunt scrise înainte de 1800. De soarta Aritmeticei lui KLEIN nu se ştie nimic.

De altă parte, Aritmetica lui KLEIN nu putea fi decât un manual de şcoală şi ca atare,—conform legilor de atunci,—desigur traducerea unui manual oficial. Dar manuale oficiale de aritmetică la sfârşitul veacului al XIX-lea, în tot Imperiul Austriac, nu erau decât două: cel amintit mai sus pentru Austria şi provinciile ei şi un al doilea pentru Ungaria şi Marele Principat al Ardealului.

Ştim însă, că după moartea lui IOSIF al II-lea, întâmplată la 1790, influenţa maghiarilor în Ardeal creşte considerabil. Direcţia învăţământului din Ardeal se află în mâinile Cancelariei Aulice, tipografia de cărţi româneşti din Viena trece la Buda, iar în şcoli nu se mai pot folosi decât cărţile tipărite acolo. KLEIN nu putea deci traduce decât Aritmetica oficială din Buda, apărută în 1780, atât în limba germană cât şi în limba maghiară. Ea avea să înlocuiască pe acea a lui ŞINCAI, poate epuizată.

Cauza netipăririi la timp a manuscrisului lui KLEIN s'ar atribui lipsei de mijloace materiale. Intre timp apare, la 1805, pentru Banat, Aritmetica lui OBRADOVICI. Ea se tipărea în aceeaşi tipografie din Buda, unde KLEIN era censorul cărţilor româneşti, ceea ce nu putea fi decât un îndemn pentru acesta să grăbească publicarea cărţii sale. Fiind o traducere a manualului oficial, nu e de mirare că această Aritmetică a apărut anonimă, cu atât mai vârtos că S. KLEIN moare tocmai în anul apariţiei ei.

Din cuprinsul cărţii încă se pot scoate unele indicii cari par a confirma ca traducător pe KLEIN. Stilul e limpede, iar limbajul curat e lipsit de germanismele lui IANCOVICI şi ale lui G. OBRADOVICI. Terminologia e aproape identică cu aceea a lui ŞINCAI ; numirea de tabla Ţibetului e împrumutată dela acesta. Nu e de prisos să relev şi următorul amănunt caracteristic: In textul original german sunt amintite şi cifrele romane. OBRADOVICI le numeşte *„Romaneşti ţifre“*. Traducătorul nostru însă nu scapă ocazia să scrie: *„Ale Românilor celor vechi, adecă ale Strămoşilor Românilor acestor deacum“*.

Iată romanitatea noastră accentuată într'o carte de aritmetică. Şi să nu bănuim în traducătorul cărţii pe unul din corifeii şcoalei latiniste ?

* * *

Acestea sunt cele ce am putut afla referitor la traducătorii celor două Aritmetici anonime. Deşi argumentele nu sunt hotărîtoare şi nu pot indica în mod sigur pe traducători, ele pot contribui totuşi la clarificarea acestei chestiuni.

VICTOR MARIAN

RELAŢIUNI INTRE SUPRAFEŢE DE TRIUNGHIURI

1°. Problema 4205, rezolvată [1]) în *Gazeta Matematică* pag. 259 Vol. XLII, atrage atenţiunea asupra unor relaţiuni remarcabile între suprafeţele unor triunghiuri anume situate în acelaşi plan, anume: se cerea a se determina suprafaţa triunghiului format de punctele care împart în acelaşi raport distanţele între perechile de vârfuri situate pe trei drepte paralele.

Fie $A_1A_2A_3$ şi $B_1B_2B_3$ două triunghiuri coplanare de suprafeţe Δ_a şi Δ_b, apoi M_1, M_2, M_3 punctele care divid în acelaşi raport segmentele A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 aşa în cât

$$\frac{M_1A_1}{M_1B_1} = \frac{M_2A_2}{M_2B_2} = \frac{M_3A_3}{M_3B_3} = k$$

Să notăm cu $\Delta_\alpha \Delta_\beta$ suprafeţele triunghiurilor ce se obţin ducând prin vârfurile triunghiului $B_1B_2B_3$ paralele la laturile corespunzătoare ale triunghiului $A_1A_2A_3$ şi prin vârfurile triunghiului $A_1A_2A_3$ paralele la laturile triunghiului $B_1B_2B_3$. Am arătat în *Mathesis* 1932 pag. 6, că produsele $\Delta_a \Delta_\alpha$ şi $\Delta_b \Delta_\beta$ sunt egale şi am stabilit [2]) că dacă se înseamnă cu $\Phi(a, b)$ valoarea lor comună atunci

$$(1) \qquad (1-k)^2 \Delta_m = k^2 \Delta_b + k\,\Phi(a, b) + \Delta_a$$

unde Δ_m este aria triunghiului $M_1M_2M_3$.

Pe de altă parte am stabilit [3]) că dacă Δ_c este aria triun-

1) A se vedea rectificarea de la pag. 392 Vol. XLII.

2) *Mathesis*, 1932 pag. 5.

3) *Mathesis*, 1932, pag. 64.

ghiului format de extremitățile OC_1, OC_2, OC_3 echipolente la A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 duse din un pol O, atunci

$$\Delta = \Delta_a + \Delta_b + \Phi(a, b) \tag{2}$$

Să ducem în (1) valoarea $\Delta_c - \Delta_a - \Delta_b$ a lui $\Phi(a, b)$ din (2). Obținem:

$$(1 - k)\Delta_m = \Delta_a - k\Delta_b + \frac{k\Delta_c}{1 - k} \tag{3}$$

care este relația ce leagă suprafețele triunghiurilor $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $M_1M_2M_3$, $C_1C_2C_3$, construite cum s'a arătat la început.

Dacă, în particular, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 sunt paralele, Δ_c este nul și (3) devine relația cerută în problema 4205 [1]).

2°. Se observă din (3) că dacă Δ_c este nul iar Δ_a și Δ_b sunt egale și de semne contrare, atunci $\Phi(a, b)$ este nul și deci:

Dacă două triunghiuri, ale căror suprafețe sunt egale dar de semne contrarii, au vârfurile două câte două pe trei paralele, acele triunghiuri sunt paralelogice.

3°. Valorile lui k pentru care puncele M_1, M_2, M_3 sunt colineare iau o formă remarcabilă dacă se face uz de notațiunile precendente.

Aceste valori sunt rădăcinele ecuațiunei

$$k^2\Delta_b - k(\Delta_a + \Delta_b - \Delta_c) + \Delta_a = 0$$

și dacă se pune

$$2\Delta = \sqrt{\Delta_a} + \sqrt{\Delta_b} + \sqrt{\Delta_c}$$

atunci

$$2k\Delta_b = \Delta_a + \Delta_b - \Delta_c \pm 4\sqrt{-\Delta(\Delta - \sqrt{\Delta_a})(\Delta - \sqrt{\Delta_b})(\Delta - \sqrt{\Delta_c})}\ .$$

R. GOORMAGHTIGH
(Bruges, Belgia).

1) Adică relația (2) rectificată prin erata dela pag. 392 Vol. XLII.

DIN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

Proprietăţi în legătură cu triunghiul antiparalel al unei drepte faţă de un triunghiu dat. Antipolul şi locul său, când variază direcţia dreptei.

In *Gazeta Matematică* din August 1935, în articolul « *Din Geometria triunghiului* », am expus unele proprietăţi, ale Ortopolului unei drepte, faţă de un triunghiu dat.

Fie ABC şi Δ, triunghiul dat şi dreapta considerată, iar *a*, *b* şi *c*, proecţiile vârfurilor triunghiului ABC pe Δ. Această dreaptă tae laturile BC, CA şi AB în punctele D, E şi F. (Fig. 1).

In studiul de faţă, vom considera proecţiile punctelor *a*, *b* şi *c* pe laturile adiacente vârfurilor proectate — pentru a se obţine ortopolul, s'au proectat aceste puncte, pe laturile opuse ale triunghiului ABC.

Fie *m* şi *m'*, *n* şi *n'* *p* şi *p'* proecţiile punctelor *a*, *b* şi *c*, respectiv pe AC şi AB, BA şi BC, CB şi CA. Dreptele *mm'*, *nn'* şi *pp'* antiparalelele dreptei Δ, faţă de laturile unghiurilor triunghiului ABC, formează un triunghiu XYZ, pe care îl vom numi *triunghiul antiparalel*, al dreptei Δ, faţă de triunghiul ABC. Există o dreaptă Δ_0, paralelă cu Δ, pentru care triunghiul antiparalel $X_0 Y_0 Z_0$, se reduce la punctul Q.

Numim acest punct Q, *antipol*, ca fiind intersecţie de antiparalele.

Se va vedea că, pentru toate dreptele paralele cu direcţia Δ, corespunde un singur antipol Q şi se va căuta locul acestui antipol, când direcţia Δ, variază.

Totodată, se va arăta analogia ce există între unele proprietăţi din studiul de faţă şi cele arătate, în articolul indicat.

I. *Proprietăţi în legătură cu triunghiul antiparalel* XYZ, *al dreptei* Δ.

1. *Perpendicularele duse din punctele a, b şi c, pe laturile adiacente ale triunghiului* ABC *şi neparalele, concură în trei puncte* a_1, b_1 *şi* c_1 *pe o dreapta* Δ_1, *paralelă cu* Δ, *dreapta* Δ *fiind la egală distanţă de ortopolul* ω *şi dreapta* Δ_1. (Fig. 1).

Perpendicularele *bn* şi *cp'*, *cp* şi *am'*, *am* şi *bn'*, concură respectiv, în punctele a_1, b_1 şi c_1. Dacă ω este ortopolul dreptei Δ,

față de ABC, dreptele ωa, ωb, ωc, sunt respectiv paralelele cu perechile de drepte bn' și cp, cp' și am, am' și bn.

In paralelogramul $\omega a b_1 c$, segmentul ac pe dreapta Δ, fiind o diagonală, punctul b_1 este simetricul ortopolului ω, față de mijlocul lui ac. Făcând aceeași deducție pentru a_1 și c_1, rezultă că, punctele a_1, b_1 și c_1 se găsesc pe o dreaptă Δ_1, paralelă cu Δ, iar dreapta Δ, se găsește la egală distanță de ortopolul ω și Δ_1.

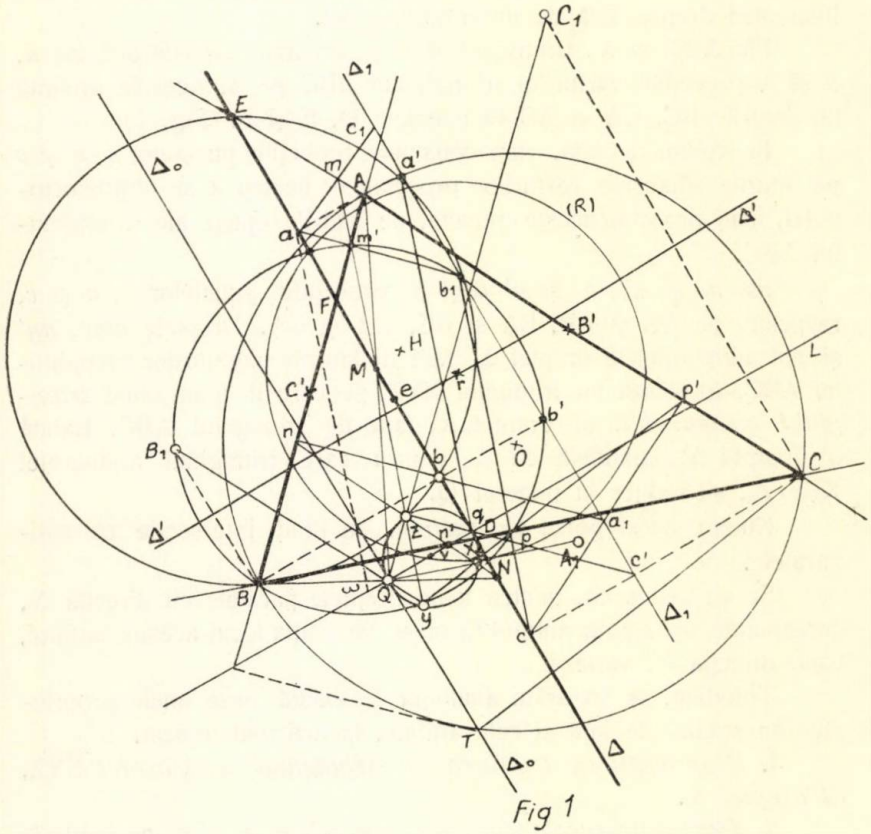


Fig 1

2. *Triunghiul antiparalel* XYZ, *este invers asemenea și ortologic cu triunghiul* ABC.

Perpendicularele duse din A, B și C, respectiv pe antiparalelele mm', nn' și pp' ale dreptei Δ, sunt izogonalele perpendicularelor Aa, Bb și Cc pe Δ, în unghiurile triunghiului ABC. Se știe că,

punctele inverse izogonale, ale punctelor de pe cercul ABC, sunt la infinit[1]) şi cum dreptele Aa, Bb şi Cc sunt paralelele, rezultă că perpendicularele pe antiparalelele considerate, concură în un punct pe cercul ABC.

Aceste perpendiculare trecând prin vârfurile triunghiului ABC, vor face unghiuri egale sau suplimentare cu unghiurile acestui triunghiu.

Cum antiparalelele indicate determină triunghiul XYZ, rezultă că cele două triunghiuri ABC şi XYZ, sunt invers asemenea — inverse, după orientarea vârfurilor cu unghiuri egale la cele două triunghiuri şi în acelaş timp şi ortologice.

In articolul citat, triunghiul $\alpha\beta\gamma$, format de dreptele care unesc proecţiile punctelor E şi F, F şi D, D şi E pe laturile triunghiului ABC, se bucură de aceiaşi proprietate, faţă de ABC ca şi triunghiul XYZ, fiindcă XYZ şi $\alpha\beta\gamma$[2]) au laturile paralele.

3. *Cercurile de diametre* Aa_1, Bb_1 şi Cc_1, *trec prin câte un vârf al triunghiului* XYZ *iar linia centrelor, este o dreaptă* Δ', *perpendiculară pe* Δ.

Cercul de diametru Bb_1, trece prin punctele: B, m', b_1 şi p. Cum dreptele mm' şi pp', concurente în Y, fac un unghiu egal cu $\measuredangle\, m'Bp$, cercul considerat trece şi prin vârful Y.

Cercurile de diametre Aa_1 şi Cc_1, trec respectiv prin X şi Z. Dacă a', b' şi c' sunt proecţiile vârfurilor A, B şi C pe Δ_1, cercurile considerate trec, prin câte unul din aceste puncte.

Segmentele a_1a', b_1b' şi c_1c' au mijlocul lor comun, fiindcă Δ_1 este paralelă cu Δ iar segmentele $a'c_1 = a_1c'$, etc.

Rezultă că linia centrelor este o dreaptă Δ', perpendiculară pe Δ şi trecând prin mijlocul segmentelor a_1a', b_1b' şi c_1c'.

Prin analogie, cercurile de diametre AD, BE şi CF, după cum s'a arătat în articolul indicat mai sus, trec prin câte un punct, a, b şi c şi câte un vârf al triunghiului $\alpha\beta\gamma$.

4. *Grupa cercurilor de diametre* Aa_1, Bb_1 şi Cc_1, *are dreapta* Δ, *coardă comună.*

---

1) *Geometrie, Rouché et Comberousse*, partea 2-a, inversiunea triunghiulară.

2) In articolul citat, se va citi triunghiul $\alpha\beta\gamma$, ca şi pe figură, în text, fiind tipărit greşit $\alpha\beta\delta$.

Cercurile $amCc$ şi $aAp'c$, au segmentul ac coardă comună şi cum cercurile de diametre Cc_1 şi Aa_1 trec, respectiv, prin m şi C, A şi p', rezultă că punctul E, are aceiaşi putere faţă de cele 4 cercuri, iar punctele de intersecţie ale dreptei Δ, cu cercurile Aa_1 şi Cc_1, sunt comune, fiindcă linia centrelor Δ, este perpendiculară pe Δ.

Se deduce că, cercurile de diametre Aa_1, Bb_1 şi Cc_1 au dreapta Δ, coardă comună.

Cercurile de diametre AD, BE şi CF, au coardă comună, dreapta ortocentrelor triunghiurilor formate de patrulaterul complet, dreaptă care trece prin H şi ortopolul ω.

5. *Punctele comune ale fiecăreia, din cele două grupe de cercuri de diametre:* Aa_1, Bb_1, Cc_1 şi AD, BE, CF, *sunt pe un cerc* (R), *cu centrul pe dreapta* Δ'.

Fie e intersecţia dreptei Δ, cu dreapta ortocentrelor. Pentru ca punctele comune ale celor două grupe de cercuri să fie conciclice, trebue ca punctul e, să aibă aceeaşi putere, faţă de cele şease cercuri.

Cercurile de diametre Bb_1 şi BE, au o coardă comună, care trece prin B şi e şi care este perpendiculară pe dreapta Eb_1, — uneşte extremităţile diametrelor ce pleacă din B. Să admitem că această coardă tae pe Δ în e' şi dreapta ortocentrelor în e''. Cum coardele parechilor de cercuri: Aa_1 şi AD; Cc_1 şi CF, trebuind să concure în acelaş timp în e' şi e'', rezultă că vor concura în punctul e.

Punctul e, având aceeaşi putere faţă de cele două grupe de cercuri, rezultă că există un cerc (R), comun celor două fascicole de cercuri considerate. Centrul r al acestui cerc comun, se va găsi pe dreapta Δ', fiindcă are aceeaşi coardă comună, ca prima grupă de cercuri.

6. *Cercul circumscris al triunghiului* XYZ, *este tangent la dreapta* Δ.

Laturile YZ, ZX şi XY, tae dreapta Δ, respectiv, în punctele M, N şi P.

Dacă prin vârfurile triunghiului XYZ, se duc paralelele la laturile triunghiului ABC se obţine punctul Q, iar dacă se duc perpendiculare, pe aceleaşi laturi, se obţine punctul q.

Punctele Q şi q se găsesc pe cercul XYZ, fiindcă triunghiurile XYZ şi ABC sunt asemenea.

Cum dreptele ce pleacă din un vârf al triunghiului XYZ, la Q şi q, sunt perpendiculare, segmentul Qq este un diametru al cercului XYZ.

In unghiurile formate de Q şi vârfurile triunghiului XYZ, diametrul Qq, este o izogonală comună, la dreptele ce trec prin Q şi perpendiculare pe laturile triunghiului XYZ. Această izogonală este perpendiculară pe Δ, faţă de cele arătate la punctul 2.

Fie L, dreapta pe care se găseşte diametrul Qq. Patrulaterele $QXqZ$ şi $Bn'bn$ fiind omotetice iar una din diagonalele omotetice, găsindu-se pe aceeaşi dreaptă nn', rezultă că vârful q, se găseşte pe Δ şi cum Bb este perpendiculară pe Δ, cercul XYZ este tangent la Δ în q. Punctul N, este centrul de omotetie al patrulaterelor considerate, iar punctul Q, se găseşte pe dreapta NB.

Tot astfel, dreptele AM şi CP, concură în Q.

7. *Ortopolul* ω, *al dreptei* Δ, *se găseşte pe dreapta* L, *diametrul* Qq *al cercului* XYZ.

Este suficient să se arate că dreapta qX perpendiculară pe BC şi deci paralelă cu ωa, trece prin punctul a', proecţia lui A pe Δ_1; fiindcă, ωb este egală şi paralelă cu ac_1 şi dacă dreapta qX trece prin a, segmentele $C_1a' = bq$ şi deci q este proecţia lui ω pe Δ. Cercul de diametru Aa_1, trecând prin punctele: A, a', p', a_1, X şi n, şi cum

$$\overset{\frown}{n'Xq} = \overset{\frown}{nn'b} = \overset{\frown}{Fam'} = \overset{\frown}{na_1a'}$$

rezultă că dreapta qX, perpendiculară pe BC, trece prin a'. Ortopolurile ω şi ω', ale dreptei Δ şi diametrului paralel cu Δ, se găsesc deci, pe dreapta L (diametrul Qq) ceeace se deduce din articolul citat.

Din paralelogramul format de dreptele ωa şi qa', aa' şi ωq, rezultă că $\omega q = aa'$.

8. *Vârfurile triunghiului* XYZ, *luate câte două, se găsesc pe trei cercuri, având centrele în vârfurile triunghiului, obţinut prin translaţia triunghiului median.*

Laturile triunghiului XYZ, sunt antiparalelele dreptei Δ_1, faţă de unghiurile fascicolului q (X, Y, Z), de unde şi cercurile: $XZa'c'$, $ZYc'b'$ şi $YXb'a'$.

Centrul cercului $XZa'c'$, va fi la intersecţia perpendicularelor duse din v pe XZ şi A' mijlocul laturei Ac, pe Δ_1.

In articolul indicat reese că, în ortopolul ω' triunghiul $\alpha\beta\gamma$, se reduce la un punct (ω') şi $\omega' B'$ este perpendiculară pe latura $\alpha\gamma$, paralelă cu XZ, — triunghiurile $\alpha\beta\gamma$ şi XYZ fiind omotetice.

Rezultă că cercul centrului $XZa'c'$, se obţine deplasând punctul B', de o cantitate egală cu $\omega' v$ şi perpendicular pe Δ.

Observare. — Se mai deduce că punctul q, are *aceeaşi putere* faţă de 6 cercuri: grupa de cercuri de diametre Aa_1 Bb_1 şi Cc_1; grupa de cercuri trecând prin câte două vârfuri ale triunghiului XYZ.

Tot faţă de acest punct, dreapta Δ_1 este inversa cercului XYZ.

— Punctul q este ortopolul dreptei Δ_1. (Punctul 7).

9. *Triunghiul* $A_1B_1C_1$, *simetricul triunghiului* ABC, *faţă de dreapta* Δ', *are vârfurile pe dreptele* QX, QY QZ, *paralelele cu laturile triunghiului* ABC.

Triunghiul $A_1B_1C_1$, simetricul triunghiului ABC, faţă de dreapta Δ' perpendiculară pe Δ, este invers egal cu ABC iar laturile egale se tae în trei puncte, pe dreapta Δ'.

Cercul de diametru Cc_1, trece şi prin punctul C_1, intersecţia dreptelor duse din C şi Q şi paralelele respectiv la Δ şi AB.

$\sphericalangle mCC_1 = \sphericalangle mZC_1$ şi cum mm' (XZ) este antiparalela dreptei Δ_1, în $\sphericalangle$ EAF, rezultă că, ZC_1 este paralelă cu AB şi deci trece prin Q. Cercul $A_1B_1C_1$ trece prin punctul Q.

10. *Dreptele duse din* Q, *prin vârfurile triunghiului* ABC *şi paralele la laturile acestui triunghiu formează un fascicol involutiv.*

In patrulaterul complect format de triunghiu antiparalel XYZ şi dreapta Δ, segmentele MX, NY şi PZ sunt diagonalele patrulaterului. Fascicolul Q (M, X; N, Y; P, Z) este involutiv. Dreapta L, este una din dreptele duble ale fascicolului.

* * *

II. *Proprietăţile ce rezultă când dreptele* Δ *rămân paralele cu o direcţie dată.* (Fig. 1 şi 2).

Definiţia antipolului Q.

11. *Când dreptele* Δ, *rămân paralele cu o direcţie dată, punctul* Q *şi triunghiul* $A_1B_1C_1$, *rămân fixe.*

Când Δ rămâne paralelă cu ea însăşi, punctele a_1, b_1, c_1 şi a', b', c', rămân pe drepte fixe, perpendiculare pe Δ. Deasemenea dreapta Δ', rămâne fixă precum şi vârfurile A_1, B_1 şi C_1 simetricele vârfurilor triunghiului ABC, faţă de această dreaptă.

Punctul Q, metapolul [1]) triunghiul $A_1B_1C_1$ față de ABC, rămâne și el fix.

Punctul Q, este centru de omotetie al triunghiurilor XYZ.

12. *Pentru dreapta* Δ_0, *ce trece prin* Q, *triunghiul* $X_0Y_0Z_0$, *relativ la* Δ_0, *se reduce la punctul* Q, *numit antipol.*

Când Δ trece prin Q, cercul de diametru Qq, se reduce la punctul Q, odată cu triunghiul XYZ.

In Q, concură cele trei antiparalele ale dreptei Δ, față de triunghiul ABC.

Pentru aceasta, am numit, *punctul* Q, *antipol* (Fig. 2).

Observare. — Antipolul Q, rămâne fix pentru o discuție Δ, pe când ortopolul ω, descrie dreapta L, perpendiculară pe Δ. Deasemenea rămâne fix și ω', ortopolul diametrului paralel cu Δ.

13. *Dreptele care unesc punctul* T, — *intersecția izogonalelor direcții* Δ, *față de unghiurile triunghiului* ABC, — *cu punctele unde dreapta* Δ, *tae laturile acestui triunghiu, trec prin vârfurile triunghiului antiparalel* XYZ. (Fig. 1).

Punctul T, intersecția izogonalelor față de direcția Δ, este pe cercul ABC.

Triunghiurile TAC și Ymp' sunt omotetice — dreptele TA, TB și TC, fiind paralele cu laturile triunghiului XYZ — și centrul de omotetie este în E, deoarece din cercurile $amCc$ și $aAp'c$; având relația $Em.\ EC = EA.\ Ep'$, rezultă că vârfurile Y și T sunt omoloage față de F și deci în linie dreaptă cu E.

Observare. Fascicolul T (A, D; B, E; C, F) este involutiv.

14. *Antipolul* Q, *este proecția punctului* T, *pe dreapta* SIMSON, *relativă la acest punct, față de triunghiul* ABC (Fig. 2).

Când Δ, trece prin Q, punctele D, E și F se găsesc pe Δ_0, și față de cele arătate, mai sus (punctul 13) punctul T se va găsi pe Δ_0. Punctul Q este proecția lui T pe dreapta L. Este suficient să se arate că dreapta L, este dreapta SIMSON a punctului T.

Dacă p'' este punctul unde dreapta L, tae latura AC, se vede că se formează un exagon cu trei vârfuri T, c și Q pe dreapta Δ_0 și alte trei: C, p'' și p' pe AC. Laturile exagonului Qp', Qp'' sunt paralele cu CT și Cc, rezultă că și laturile Cp' și Tp'' sunt

---

1) *Geometrie, Rouché et Comberousse.* Geometria triunghiului, partea 1-a.

paralele şi deci, p'' este proecţia lui T pe AC şi L este dreapta SIMSON, relativă la T.

Q este proecţia lui T, fiindcă Δ_0 este perpendiculară pe L.

* * *

III. *Curba* Q *sau locul antipolului* Q, *când direcţia* Δ, *variază.* (Fig. 2).

15. *Coordonatele antipolului* Q.

Dacă x, y şi z; x', y' şi z' sunt coordonatele normale ale punctelor Q şi T, există relaţiile:

$$x = x' \cdot \frac{DQ}{DT}, \; y = y' \cdot \frac{EQ}{ET}, \; z = z' \cdot \frac{FQ}{FT}.$$

Fie α, este unghiul ce-l face Δ_0 cu AC;

$$\frac{EQ}{ET} = \frac{Em}{EA}$$

fiindcă Qm este paralelă cu TA.

Din cercurile am Cc, se are relaţia:

$$Em \cdot EC = Ea \cdot Ec.$$

Cu $\frac{Ea}{EA} = \frac{Ec}{EC} = \cos\alpha$, şi cele analoage se obţine:

$$\begin{cases} y = y' \cdot \cos\alpha, \\ x = x' \cdot \cos^2(C + \alpha) \\ z = z' \cdot \cos^2(A - \alpha). \end{cases}$$

Se vede că, punctele Q, se găsesc numai în exteriorul laturilor triunghiului ABC, ca şi punctul T, care se găseşte pe cercul ABC.

16. *Curba* Q *locul antipolului* Q. Determinarea curbei Q, se reduce la, a găsi locul proecţiilor unui punct T de pe cercul ABC, pe dreapta SIMSON L, relativă, la acest punct.

Se ştie că înfăşurătoarea dreptelor SIMSON relative la punctele T, este ipocicloida cu trei rebrusmente triplu tangentă la cercul EULER, tangentă la laturile şi înălţimile triunghiului ABC. (*Geometria Modernă* de MARCEL IOAN pag. 95).

Există o strânsă legătură între curba Q şi ipocicloida considerată.

— Când dreptele SIMSON (dreptele L) se confundă cu laturile triunghiului ABC, punctul T, se găseşte pe izogonalele înălţimilor

şi Q proecţia sa pe L, sunt isotomicele picioarelor înălţimilor (1, 2, 3). — In aceste puncte curba Q este tangenta în exteriorul laturilor triunghiului, ca şi ipocicloida. — Pentru dreptele SIMSON, confundate cu înălţimile, punctul Q se va găsi în unul din vârfurile triunghiului ABC şi deci curba Q, trece prin aceste vârfuri (4, 5, 6).

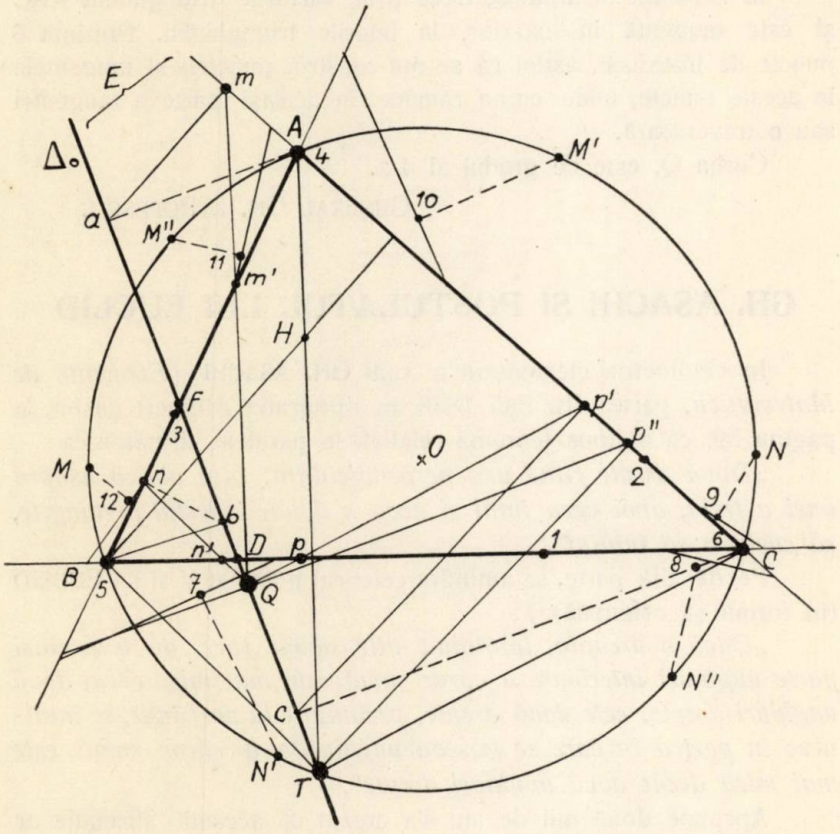


Fig. 2.

— In punctele unde ipocicloida tae prelungirile laturilor triunghiului, dreptele SIMSON, sunt tangente la această curbă, iar pentru curba Q, aceste drepte, sunt tangente în punctele de inflexiune ale curbei Q (7, 8, 9, 10, 11, 12). Poziţiile lui T, în aceste cazuri, sunt extremităţile diametrelor MN, M'N', M''N'', în cercul ABC, paralelele cu laturile acestui triunghiu.

— Pentru tangentele în punctele de rebrusment ale ipocicloidei, corespund drepte SIMSON, trecând prin dreptul cercului EULER iar punctele Q corespunzătoare se găsesc pe aceste drepte. Dreptele TQ în acest caz sunt tangente în Q la curba Q, această curbă rămânând de aceeaşi parte a tangentelor considerate.

In rezumat: Curba Q, trece prin vârfurile triunghiului ABC şi este tangentă în exterior, la laturile triunghiului. Prezintă 6 puncte de infexiune, astfel că se pot construi punctele şi tangentele în aceste puncte, unde curba rămâne în aceiaşi parte a tangentei sau o traversează.

Curba Q, este de gradul al 4-a.

GENERAL GH. I. POPESCU.

GH. ASACHI ŞI POSTULATUL LUI EUCLID

In Geometria elementară a Agăi GH. ASACHI *(Elemente de Matematică,* partea III, Eşii 1838, în tipografia Albinei) găsim, la pagina 59, ca a doua teoremă relativă la paralele, următoarea:

„Două drepte fiind una perpendiculară, alta oblică asupra unei a treia, apoi acea întâi şi acea a doua, îndestul prelungite, să cuvin a să întâlni".

Pe de altă parte, să amintim celebrul postulat V al lui EUCLID (în forma sa originală) [1]):

„Dacă o dreaptă, întâlnind alte două, face de o aceiaşi parte unghiuri interioare a căror sumă este mai mică decât două unghiuri drepte, cele două drepte, prelungite la nesfârşit, se întâlnesc în partea în care se găseau unghiurile a căror sumă este mai mică decât două unghiuri drepte".

Aproape două mii de ani s'a crezut că această afirmaţie ar putea fi demonstrată (pe baza celorlalte axiome impuse de EUCLID) şi deci postulatul V ar fi o teoremă. Câteva din momentele mai de seamă ale istoriei acestui postulat am încercat să redau în: *„Elementele lui* EUCLID" apărut în revista ieşană *„Atheneum"* Anul II. No. 2, 1936. LOBACEFSCHI (1826), BOLYAI, GAUSS şi

1) A se vedea, spre exemplu, foarte interesanta ediţie a Elementelor lui EUCLID *«Gli Elementi d'*EUCLIDE *e la critica antica e moderna»* condusă de FEDERIGO ENRIQUES profesor la Universitatea din Roma.

mai târziu, RIEMANN au arătat că postulatul V este *nedemonstrabil* (pe baza celorlalte axiome euclidiene) şi au creat *geometriile neeuclidiene*[1]).

Cum se face atunci că ASACHI *demonstrează* teorema menţionată care nu este altceva decât postulatul V?

Demonstraţia lui ASACHI este datorită matematicianului LOUIS BERTRAND (cunoscut sub numele de BERTRAND DE GENÈVE [2]) elev şi amic al lui EULER. In această demonstraţie se introduc arii infinite şi se raţionează asupra lor ca şi cum ele ar fi finite. Introducerea ariilor infinite (în special în definiţia unghiurilor) pare datorită filosofului ARNAULD (le grand ARNAULD de Port Royal, 1612—1694). El a scris, între altele, „*Nouveaux Eléments de Géométrie*“ şi a rămas celebru prin a sa „*Logique de Port Royal*“ (1662). La pagina 297 a ediţiei acestei logici publicată de JOURDAIN la 1846, se poate găsi pledoaria lui ARNAULD pentru considerarea ariilor infinite.

Lăsând la o parte erorile quadraturiştilor şi fermatiştilor, istoria matematicelor a cunoscut şi pe acelea ale unor matematicieni ce s'au ocupat de postulatul V. Intre aceştia trebuie numărat şi ARNAULD de Port Royal şi BERTRAND DE GENÈVE.

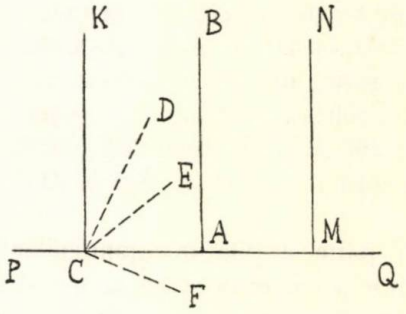
Voiu reproduce demonstraţia lui ASACHI cu tot pitorescul limbei sale:

„*Deacă dreapta* AB *este perpendiculară peste* PQ *fieşcare dreaptă* CD *care face cu* PQ *un unghiu ascuţit* DCQ, *trebuie să întâlnească oareunde pe dreapta* AB. *Spre a dovedi, înalţu la punctul* C *pe dreapta* CK *perpendiculară la* PQ, *apoi tragu dela punctul* C *dreptele* CE, CF, *etc... care înformează unghiurile consecutive* DCE, DCF,... *ecvale între sine şi ecvale cu unghiul* KCD. *Deci adăugind pe unghiul* KCD *cătră el însuş un număr de ori, sântem siguri a căpăta un unghiu obtus* KCI, *mai mare decât unghiul drept* KCQ. *Despre altă parte, de voi lua, percurgând dela punctul* A, *lungimi* AM, MO, *etc... toate ecvale între sine şi ecvale cu* CA, *şi de voi înalţa peste* PQ *perpendicululile* MN, OS,... *atunce figurile dreptunghiulare* KCAB, ABMN, MNOS,... *care în acest feliu le înformez, nu pot, ori care ar fi al lor număr,*

1) Se poate consulta: FELIX KLEIN, *Nichteuklidische Geometrie*, Berlin 1928.

2) v. J. POGGENDORFF, I, Leipzig, 1863, p. 171.

umplea spaţia (locul) indefinită cuprinsă între laturile unghiului drept KCQ. *Prelângă aceste noi am văzut că să poate totdeaune umple această spaţie adăugind un număr îndestul de ori la el însăş spaţia unghiulară indefinită cuprinsă între dreptele* CK *şi* CD. *Deci această din urmă spaţie este mai mare de figura indefinită* KCAB, *şi nu poate rămânea acolo închisă, de să vo prelungi indefinit liniile* CK *şi* CD; *deci* CD, *îndestul de prelungită, va întâlni oareunde pe linia* AB".



Imediat însă, ASACHI are grija, ce-i face cinste, să adauge: *„Demonstraţia trecută are îndeplinirea a să răzăma pe consideraţia spaţiei nemărginite închisă între laturile unghiurilor; de aceia unii autori a tractaturilor de Geometrie să mărginesc întru de a cere ca acea propunere să să socotească ca îndestul de vederată".*

Această neîndeplinire a fost trecută cu vederea şi uneori chiar aplaudată de unii matematicieni. Aşa, de exemplu, LEGENDRE—autorul unor manuale ce au slujit multă vreme în Franţa şi, aproape în traducere la noi—matematician reputat care s'a ocupat de postulatul lui EUCLID, privea cu ochi buni *„consideraţia spaţiei infinite"*. Dar, pentrucă n'a utilizat, în manualul său de geometrie, această spaţie infinită a fost *mustrat:*

*„Il faut dire aussi que, trop préoccupé d'*EUCLIDE, *et cédant à son insu à une manie fréquente alors, de prendre les manières des Grecs et des Romains,* LEGENDRE *eut tort de garder l'ancienne et vicieuse définition de l'angle, et de ne pas adopter la théorie des parallèles de* BERTRAND" (Extras din *„Biographie universelle"* art. lui PARISOT).

La aproape o sută de ani după tranşarea definitivă a chestiunii postulatului V, mai putem găsi încă un matematician care „este de părere că axioma paralelelor a fost *definitiv* şi *complect* demonstrată de BERTRAND". (W. B. FRANKLAND : *Note on the parallel-axiom*, Math. Gazette, 7, 136—139, 1913).

Ceeace ne-a îndemnat să scriem aceste rânduri este constatarea dureroasă că se întâlnesc numeroşi absolvenţi de liceu (Formând majoritatea) care n'au auzit de postulatul lui EUCLID. In această privinţă, suntem în urma mentalităţii lui ASACHI.

ILIE POPA.

RAPORT PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „V. CRISTESCU"
PE ANUL 1935 — 1936.

Cercetând articolele publicate în *Gazeta Matematică* în cursul anului 1935—1936, nu am găsit decât unul singur, care răspunde prevederilor acestui premiu, şi anume articolul „*Asupra unui triunghiu special*" al D-lui ILIE ION ŢIŢEICA, elev în clasa 7-a a liceului militar „Mânăstirea Dealului".

Autorul expune proprietăţile elementare ale triunghiului, în care unul din unghiuri este de 60^0.

Deşi nu s'a sesizat proprietatea de bază a acestui triunghiu, anume :

„*Triunghiul în care unul din unghiuri este de 60^0, are unghiurile în progresie aritmetică şi reciproc*" ; totuşi articolul se evidenţiază printr'o expunere sistematică, demonstraţii clare şi prin cunoştinţi numeroase în domeniul geometriei.

In afară de aceasta D-l ILIE ION ŢIŢEICA este un corespondent asiduu, remarcându-se printre cei mai iscusiţi rezolvitori ai *Gazetei Matematice.*

Suntem dar de părere să i se acorde premiul «V. CRISTESCU». Faptul de a i se fi decernat şi alt premiu nu e decât încă o dovadă de însuşirile deosebite ale autorului.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL „V. CRISTESCU" :
AL. BUNESCU, ION IONESCU, ALEXANDRU V. NICULESCU.

Acest raport s'a citit şi aprobat în şedinţa dela 11 Februarie 1937.

NOTE MATEMATICE

42. *Asupra studiilor lui* GHEORGHE ASACHI. Rugasem de mai mult pe D-l GHEORGHE CHIŢULESCU, student în medicină la Varşovia şi funcţionar la Camera de Comerţ Polono-Română din acea localitate, ca la ocaziune să cerceteze la Lwow (Lemberg) în arhiva Universităţii actele privitoare la studiile făcute la acea Universitate de către GHEORGHE ASACHI precum şi unde a învăţat el ingineria şi ce lucrări a făcut el acolo înainte de a se întoarce la Iaşi. De curând am primit dela D-sa o scrisoare prin care îmi comunică că D-l Baron STANISLAW DANGEL, Directorul sus numitei Camere de Comerţ, a căutat şi controlat personal în Arhiva Universităţii şi a găsit următoarele:

In arhiva Universităţii din Lwow figurează în cataloagele studenţilor GEORGIUS ASSAKIEWICZ (terminaţiunea *evicz* însemnând *„fiul lui"*) ca student al Facultăţii de Filosofie a sus numitei Universităţi Lwowiene. Era în Anul I în anul academic 1802—1803; în Anul II în 1803—1804 şi în Anul III în 1804—1805. Alte informaţiuni asupra continuării studiilor nu se mai găsesc în cataloagele Universităţii. De asemenea nu s'a găsit nimic privitor la obţinerea Doctoratului acelei Universităţi. De altfel în Arhiva acelei Universităţi nu se găseşte păstrat nimica privitor la studenţii care au obţinut doctoratul în primii ani ai secolului XIX.

O şcoală tecnică de sine stătătoare nu a existat în acel timp la Lwow; s'a făcut însă un curs special de Architectură la Facultatea de Filosofie pe care a urmat-o şi ASSACHI. Şcoala aceia era condusă de Profesorul IGNACY CHAMBREZ între anii 1812 şi 1844. Acest profesor venise acolo dela Universitatea Jagellionă din Cracovia.

La 1817 s'a deschis la Lwow o şcoală reală cu caracter tecnic care avea trei ani de studii. Şcoala a fost transformată în 1825—1826 în şcoală pregătitoare pentru cei care doreau să studieze ştiinţele tecnice Universitare, şi avea doi ani de studii. La 1835 ea a fost transformată în Academie realo-comercială. Acestei şcoli i s'a trecut şi catedra de construcţiuni (de architectură) a profesorului CHAMBREZ, care înainte era numai în cadrul Facultăţii de filosofie a Universităţii Lwowiene. (A se vedea: *Politecnica din Lwow, situaţia ei actuală şi trebuinţele ei.* Lwow 1932. Cap. I Pag. 2).

Nu s'a găsit niciun fel de informaţiuni despre activitatea architectonică a lui ASSACHI. In lucrarea cea mai importantă care descrie activitatea architecţilor din Lwow, a lui TADEUSZ MANKOWSKI, cu titlul *„Inceputurile Lwowului modern în architectură"* publicată de către Secţiunea Artei şi Culturei, Vol. I, fascicola I, Lwow 1924 nu se pomeneşte nimic de GHEORGHE ASSACHI. E probabil deci că clădirea pe care el spunea că a făcut-o în mahalaua Halici era de mică importanţă.

Mulţumim d-lui STANISLW DANGEL pentru informaţiunile culese şi trimise *Gazetei Matematice* prin D-l G. CHIŢULESCU.

I. IONESCU

43. *Asupra Problemei 4759.* La întrebarea pusă de D-l ION IONESCU la sfârşitul rezolvării problemei 4759, dată la pag. 440 din acest an, de a se arăta unde şi cum a mai fost propusă această problemă în *Gazeta Matematică,* găsesc că în adevăr a mai fost propusă tot de D-sa în No. 11 din Anul XXV (Iulie 1920) cu No. 2752 şi rezolvată la pag. 130 din Anul XXVI. Enunţul sub care a fost propusă este acesta:

„Să se găsească volumul unei mărgele sferice în funcţiune de lungimea găurii".

TRAIAN I. CHIŢULESCU
(Clasa VII-a ştiinţifică,
Liceul Cantemir Vodă, Bucureşti).

44. *Asupra Notei 26, — pag. 305 — XL.*

Se arată uşor că dacă punctul K, prin care se duc paralelele EF şi GH la laturile AB şi AD ale paralelogramului ABCD, se mişcă aşa ca să avem: $\overline{AE} + \overline{AG} = \frac{a+b}{2}$, unde: $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$, locul punctului $\varphi \equiv$ (BH, DF) este o conică.

Presupunând $a > b$ şi dacă se notează cu I punctul de pe BC, dincolo de B, şi cu J punctul de pe DC, între D şi C, astfel ca să avem: $\overline{BI} = \overline{DJ} = \frac{a-b}{2}$, conica trece prin punctele: A, B, D, I, J.

Dacă: $\frac{a}{b} > 7 + 4\sqrt{3}$ sau $\frac{a}{b} < 7 - 4\sqrt{3}$, conica loc geometric al lui φ este o iperbolă;

dacă: $\frac{a}{b} = 7 + 4\sqrt{3}$ sau $\frac{a}{b} = 7 - 4\sqrt{3}$, conica este o parabolă,

iar dacă: $7 - 4\sqrt{3} < \frac{a}{b} < 7 + 4\sqrt{3}$, conica este o elipsă.

In cazul particular când paralelogramul este un patrat, când suntem deci în cazul problemei 4541, cu deosebire că notaţia e puţin schimbată, conica de mai sus este o elipsă tangentă în B şi D la BC şi DC (I şi J se confundă respectiv cu B şi D), având diagonala AC ca axă de simetrie, lungimea axei orientată după această diagonală fiind $^2/_3$ din lungimea diagonalei.

A. DOBRESCU

45. *Incă o generalizare a problemei 4624*[1]). Fie sumele

$$(1)\quad 1+2(1+2)+\ldots+n(1+2+\ldots+n)=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$$

$$(2)\quad 1+1(1+2)+\ldots+(1+2+\ldots+n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

pe care adunându-le obţinem

$$2+3(1+2)+4(1+2+3)+\ldots+(n+1)(1+2+\ldots+n)=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{24}$$

Adun această sumă cu (2), rezultatul iar cu (2) şi aşa mai departe şi obţin succesiv

$$3+4(1+2)+5(1+2+3)+\ldots+(n+2)(1+2+\ldots+n)=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+9)}{24}$$

$$4+5(1+2)+6(1+2+3)+\ldots+(n+3)(1+2+\ldots+n)=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+13)}{24}$$

$$5+6(1+2)+7(1+2+3)+\ldots+(n+4)(1+2+\ldots+n)=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+17)}{24}$$

. . . . . .

$$i+(i+1)(1+2)+\ldots+(n+i-1)(1+2+\ldots n)=\frac{n(n+1)(n+2)[3n+4(i-1)+1]}{24}$$

. . . . . .

$$n+(n+1)(1+2)+\ldots+(2n-1)(1+2+\ldots+n)=\frac{n(n+1)(n+2)(7n-3)}{24}.$$

---

[1]) A se vedea soluţia de la pag. 449 şi notele dela pag. 527 şi 626 Vol. XLI.

Această sumă o adun cu (2), rezultatul iar cu (2), ... şi obţin din nou

$$(n+1)+(n+2)(1+2)+...+2n(1+2+...+n)=\frac{n(n+1)(n+2)(7n+1)}{24}$$

$$(n+2)+(n+3)(1+2)+...+(2n+1)(1+2+...+n)=\frac{n(n+1)(n+2)(7n+5)}{24}$$

. . . . . .

şi continuând din aproape în aproape

$$n^2+(n^2+1)(1+2)+...+(n^2+n-1)(1+2+...+n)=\frac{n(n+1)(n+2)[4n^2+3n-3]}{24}.$$

I. I. PETRESCU.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tom. CXXIII. Aprilie 1937. Fundamentele matematice ale muzicei de A. E. SAGASTUME BERRA. Forma factorială a numărului complex hiperbolic de J. C. VIGNAUX.

Buletinul Institutului Român pentru Betoane, Construcţii şi Drumuri. Anul II Nr. 1–5 Ianuarie-Martie 1937.

Buletinul Societăţii Politecnice din România. Anul LI. Nr. 3. Martie 1937.

Gazeta Matematică: Supliment cu exerciţii. Anul III. Nr. 9. Iunie 1937.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par H. VUIBERT Anul 61. Nr. 16; 15 Maiu 1937. Paris.

Sphinx: révue mensuelle des questions récréatives. Anul VII. Nr. 6. Iunie 1937. Bruxelles.

Ştiinţă şi Progres: Anul IV. Nr. 2. 15 Maiu 1937. Metodă pentru calcularea sumei patratelor primelor n numere de ION BUZINCU. Enigma stelelor temporale de G. G. CONSTANTINESCU.

N. G. BOTEA: Une relation entre nombres complexes et la généralisation d'un théorème de géométrie élémentaire (extras din Buletinul Şcoalei Politecnice).

Instituto Matematico-Hispano Americano. *Boletin del Seminario matematico.* Buenos-Aires-Madrid 1935. Integrare cu cuadraturi ale ecuaţiilor lui DIRAC, de ANGELO TONOLO. O teoremă asupra singularităţilor integralelor lui LAPLACE-STIELTJES, S. RIOS. Asupra simbolului $\Delta^r z(n,k)/h^r$, de JOSÉ BABINI.

CERERI

266. Cine mi-ar putea indica unde aşi putea găsi tratată următoarea problemă:

„*Cunoscându-se picioarele unei înălţimi, unei bisectoare şi al unei mediane pornind fiecare dintr'un vârf diferit al unui triunghiu, să se construiască acel triunghiu*".

GH. BASACOV.

DIVERSE

Societatea Română de Ştiinţe, Secţia Matematici, a ţinut următoarele şedinţe:

1 Iunie 1936, au comunicat D-nii: GH. TH. GHEORGHIU, *Asupra unor funcţiuni generatoare ale polinoamelor lui* HERMITE şi G. MIHOC, *Asupra lanţurilor statistice.*

19 Octombrie 1936, au comunicat D-nii: Prof. D. POMPEIU, *O observare metodologică şi aplicarea ei la funcţiile armonice* şi Prof. S. STOILOW, *Asupra funcţiunilor analitice continue pe ansamblul lor de singularităţi.*

9 Noembrie 1936, a comunicat D-l R. WAVRE (profesor la Universitatea din Geneva), *Sur les corps d'attraction nulle.*

23 Noembrie 1936, au comunicat D-nii: Prof. V. VÂLCOVICI, *Asupra rezistenţei solidelor în fluidele vâscoase,* şi Ing. S. ŞTEFĂNESCU, *Funcţiuni de flux şi linii de câmp magnetic.*

14 Decembrie 1936, au comunicat D-nii: N. CIORĂNESCU, *Asupra reprezentării funcţiilor analitice de două variabile reale* şi CAIUS IACOB, *Asupra bifurcării unui curent lichid printr'un obstacol circular.*

21 Decembrie 1936, au comunicat D-nii: Prof. G. ŢIŢEICA, *Metoda lui Kubota* şi GR. MOISIL, *Tipuri noui de silogisme ipotetice.*

Sporirea Bibliotecii.

N. COCULESCO. Sur les expressions approchées des termes d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice. Thèse. Paris 1895.
Donată de D-l Profesor E. TOPORĂSCU.

A. DAVIDOGLU. Sur l'équation des vibrations des verges élastiques. Thèse. Paris 1900.
Donată de D-l Profesor E. TOPORĂSCU.

T. LALESCO. Sur l'équation de VOLTERRA. Thèse. Paris 1908.
Donată de D-l Profesor E. TOPORĂSCU.

S. SANIELEVICI. Sur les équations différentielles des cordes et des membranes vibrantes. Thèse. Paris 1908.

Donată de D-l Profesor E. TOPORĂSCU

FEDERICO AMODEO. Elementi di Algebra. Parte prima del volume secondo degli Elementi di matematica. Napoli 1903.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

G. ST. L. CARSON & DAVID EUGENE SMITH. Elements of algebra. Part I. London.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2503*). *Fie x şi y rădăcinile ecuaţiei:*

$$(1+a)z^2+(a-2)z+1=0.$$

Să se arate că expresiunea:

$$\frac{x-1}{y^{n-1}}\left[\frac{1}{x^n}\cdot\frac{y^n-x^n}{y-x}-\frac{2}{x+1}\cdot\frac{y^n-1}{y-1}\right]$$

nu îşi schimbă valoarea dacă înlocuim x cu y şi y cu x.

ION IONESCU.

Prima soluţie. Dacă notăm cu $E(x, y)$ expresia dată, vom arăta că:

$$E(x, y)\equiv E(y, x),$$

sau:

$$\frac{x-1}{y^{n-1}}\left[\frac{1}{x^n}\cdot\frac{y^n-x^n}{y-x}-\frac{2}{x+1}\cdot\frac{y^n-1}{y-1}\right]$$

$$=\frac{y-1}{x^{n-1}}\left[\frac{1}{y^n}\cdot\frac{x^n-y^n}{x-y}-\frac{2}{y+1}\cdot\frac{x^n-1}{x-1}\right]$$

sau grupând convenabil:

$$\frac{x-1}{x^n y^{n-1}}\cdot\frac{y^n-x^n}{y-x}-\frac{y-1}{x^{n-1}y^n}\cdot\frac{x^n-y^n}{x-y}$$

$$=2\,\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{y^n-1}{(y-1)y^{n-1}}-2\frac{y-1}{y+1}\cdot\frac{x^n-1}{(x-1)x^{n-1}}. \quad (1)$$

*) Enunţ rectificat.

Ţinând seama că ecuaţia dată se poate scrie:

$$(z-1)^2 + az(z+1) = 0,$$

sau:

$$\frac{x-1}{x+1} = -a\frac{x}{x-1}, \qquad \frac{y-1}{y+1} = -a\frac{y}{y-1},$$

relaţii care înlocuite în (1) dau:

$$\frac{x^n - y^n}{x^n y^n (x-y)}[(x-1)y - (y-1)x] = \frac{2axy}{(x-1)(y-1)}\left[-\frac{y^n-1}{y^n} + \frac{x^n-1}{x^n}\right]. \quad (2)$$

Insă

$$(x-1)(y-1) = xy - x - y + 1 = \frac{1}{1+a} + \frac{a-2}{1+a} + 1 = \frac{2a}{1+a} = 2axy.$$

Rezultă că relaţia (2) devine:

$$\frac{x^n - y^n}{x^n y^n} = \frac{1}{y^n} - \frac{1}{x^n}.$$

Soluţia a doua. Problema se mai poate demonstra arătând că expresia E este o funcţie simetrică de x şi y.

Avem:

$$E = \frac{x-1}{x^n y^{n-1}} \cdot \frac{y^n - x^n}{y-x} - 2\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{y^n - 1}{(y-1)y^{n-1}},$$

însă:

$$\frac{x-1}{y+1} = -a\frac{x}{x-1},$$

deci:

$$E = (x-1)y\frac{x^n - y^n}{x^n y^n (x-y)} + \frac{2axy}{(x-1)(y-1)} \cdot \frac{y^n - 1}{y^n}.$$

Insă am văzut că:

$$\frac{2axy}{(x-1)(y-1)} = 1,$$

astfel că:

$$E = \frac{1}{x^{n-1}y^{n-1}} \cdot \frac{x^n - y^n}{x-y} - \frac{1}{x^n y^n} \cdot \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y} + 1.$$

MIRCEA ADAM
(Constanţa).

PROBLEMA 2623. *Să se găsească suma seriei.*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha + i\beta}{(a+ir)\ldots[a+(m+i)r]}.$$

D. PERIEȚEANU.

Fie S suma seriei dată, putem scrie:

$$(1)\quad S = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(a+ir)[a+(i+1)r]\ldots[a+(i+m)r]}$$

$$+\beta \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{(a+ir)[a+(i+1)r]\ldots[a+(i+m)r]}.$$

Avem însă:

$$(2)\quad \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(a+ir)[a+(i+1)r]\ldots[a+(i+m)r]}$$

$$= \frac{\alpha}{mr} \cdot \frac{1}{a(a+r)\ldots[a+(m-1)r]}.$$

(A se vedea *Gazeta Matematică,* Vol. XXIII, pag. 39).
De asemenea avem încă evident:

$$(3)\quad \beta \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{(a+ir)[a+(i+1)r]\ldots[a+(i+m)r]}$$

$$= \frac{\beta}{r} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[a+(i+m)r]-(a+mr)}{(a+ir)[a+(i+1)r]\ldots[a+(i+m)r]}$$

$$= \frac{\beta}{r} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(a+ir)[a+(i+1)r]\ldots[a+(i+m-1)r]}$$

$$-\frac{\beta(a+mr)}{r} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(a+ir)[a+(i+1)r]\ldots[a+(i+m)r]}$$

$$= \frac{\beta}{(m-1)r^2} \cdot \frac{1}{a(a+r)\ldots[a+(m-2)r]}$$

$$-\frac{\beta(a+mr)}{mr^2} \cdot \frac{1}{a(a+r)\ldots[a+(m-1)r]},$$

în virtutea aceleeași formule de însumare din (2).

Adunând acum relațiile (2) și (3), obținem:

$$S = \frac{1}{ra\,(a+r)\ldots[a+(m-2)r]}\left[\frac{\alpha}{m[a+(m-1)r]}\right.$$
$$\left.+\frac{\beta}{(m-1)r}-\frac{\beta\,(a+mr)}{mr\,[a+(m-1)r]}\right]$$
$$=\frac{1}{ra\,(a+r)\ldots[a+(m-2)r]}\cdot\frac{(\alpha r-\beta a-\beta mr)(m-1)r+\beta m[a+(m-1)r]}{m(m-1)r\,[a+(m-1)r]}$$
$$=\frac{1}{m(m-1)r^2}\cdot\frac{(\alpha r-\beta a-\beta mr)\,(m-1)r+\beta m\,[a+(m-1)r]}{a\,(a+r)\,(a+2r)\ldots\,[a+(m-1)r]}$$

Soluții date de D-nii: BOCK I. GHEORGHE, CONSTANTINESCU GH. GH. (Tecuci), COȘNIȚĂ VIRGIL (Bârlad) și POPESCU D. GHEORGHE (Iași).

V. A.

PROBLEMA 3299. *Dacă* a, b, c *sunt laturile unui triunghiu* ABC, *să se demonstreze relațiunea:*

$$\begin{vmatrix} b & \cos B & c & \cos C & a & \cos A \\ -c & \cos C & -a & \cos A & -b & \cos B \\ b & \cos B & 2c & 2\cos C & 2a & 2\cos A \\ -c & \cos C & -2a & 2\cos A & -2b & 2\cos B \\ b & \cos B & c & \cos C & 2a & 2\cos A \\ -c & \cos C & -a & \cos A & -2b & 2\cos B \end{vmatrix} = a\,b\,c.$$

N. BOTEA.

Soluție dată de D-l G. G. CONSTANTINESCU. Scăzând prima linie din a treia și a cincea, iar linia doua din a patra și ultima, determinantul din prima parte devine:

$$\begin{vmatrix} b & \cos B & c & \cos C & a & \cos A \\ -c & \cos C & -a & \cos A & -b & \cos B \\ 0 & 0 & c & \cos C & a & \cos A \\ 0 & 0 & -a & \cos A & -b & \cos B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \cos A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & \cos C \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} b & \cos B \\ -c & \cos C \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c & \cos C \\ -a & \cos A \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & \cos A \\ -b & \cos C \end{vmatrix}$$
$$= (b\cos C + c\cos B)\,(c\cos A + a\cos C)\,(a\cos C + b\cos A) = a\,b\,c.$$

PROBLEMA 3760. *Se dă un unghiu* MON *şi un punct fix* A *în planul său. Fie* H *un punct mobil pe cercul de rază* R *şi cu centrul în* O. *Tangenta în* H *la* O *întâlneşte laturile unghiului* MON *în* B *şi* C. *Se uneşte* O *cu mijlocul* P *al lui* BC. *Fie* D *întâlnirea lui* OP *cu paralela la* OH *dusă prin* A. *Să se arate că locul geometric al lui* D *este o hiperbolă echilateră independentă de* R, *hiperbolă a cărei construcţie se cere.*

Să se deducă o soluţie a problemei 1386[1]), *propusă în „Gazeta Matematică", Vol. XIV, pagina 192.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie şi generalizare dată de D-l AD. C. GHEORGHIU, (pe când era student în anul II la facultatea de ştiinţe din Bucureşti).

Observ că OP este diametru conjugat direcţiei BC în conica determinată de dreptele OM, ON şi cum mijlocul tuturor paralelelor cu BC se află pe OP rezultă că poziţia lui D este independentă de mărimea lui R.

Fie mai general o conică (Γ) cu centrul în O, un punct fix A în planul lui (Γ) şi o dreaptă Δ de direcţie μ. Fie OP diametrul conjugat lui Δ şi D intersecţia lui OP cu perpendiculara din A pe Δ. Se cere locul lui D.

Intre coeficienţii unghiulari μ al lui Δ şi m al lui OP se ştie că avem relaţiunea involutivă

$$(1) \qquad C m \mu + B (m + \mu) + A = 0$$

unde A, B, C sunt coeficienţii termenilor de gradul II al ecuaţiei conicei (Γ).

Dacă m' este coeficientul unghiular al lui AD, atunci prin ipoteză.

$$(2) \qquad \mu m' + 1 = 0.$$

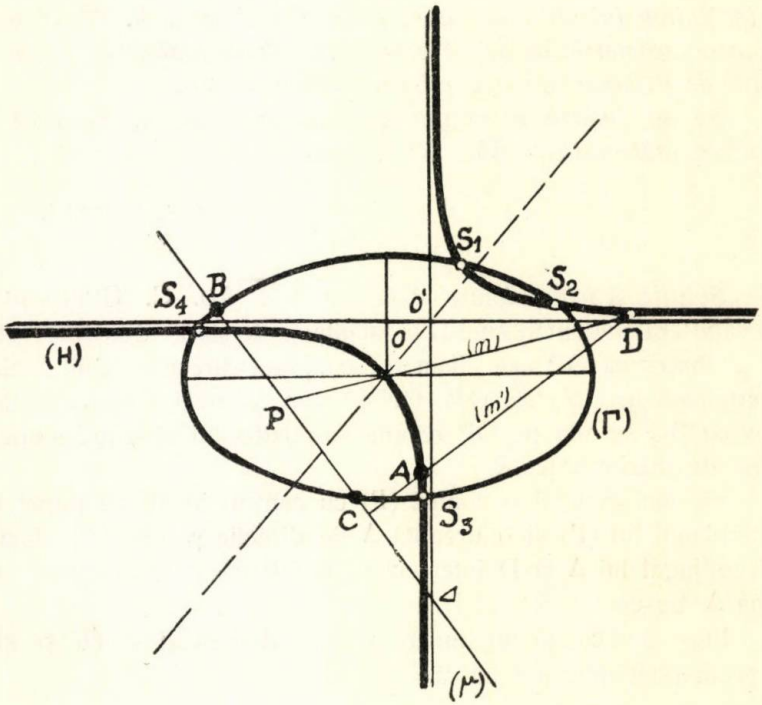
Aşa dar şi între AD şi OD există o corespondenţă omografică ca şi între Δ şi OD. Rezultă că locul intersecţiei lui AD cu OD este conica (Γ') ce trece prin A şi prin O.

---

1) Soluţia problemei 1386 s'a publicat de curând la pag. 311 Vol. XLI şi la paginile 127, 425 şi 469, Vol. XLI.

Eliminând pe μ între (1) şi (2) se găseşte că m, m' sunt legaţi prin relaţiunea

$$Bm\,m' - Cm + Am' - B = 0. \tag{3}$$



Punctele la infinit ale conicei (Γ') sunt date de razele omoloage pentru care

$$m = m$$

sau din (3), pentru care

$$Bm^2 - (C - A)\,m - B = 0$$

care dă tocmai direcţiile axelor conicei (Γ).

Deci direcţiile asimptotice ale conicei (Γ') sunt paralele cu axele conicei (Γ), ceeace se explică observând că dacă $OP \perp \Delta$, atunci AD este paralelă cu OP şi deci D este aruncat la infinit. Rezultă de aici că conica loc (Γ') este o *hiperbolă echilateră.*

Fie S_i unul din punctele de intersecţie ale conicelor (Γ) şi (Γ'). De oare ce AS_i este perpendiculară pe direcţia conjugată diametrului OS urmează că AS_i *este normală în* S_i *la* (Γ).

In cazul particular al problemei 3760 punctele S_i se reduc la punctele S_1, S_2 proecţiile lui A pe OM şi ON. Hiperbola echilatera (Γ') este circumscrisă patrulaterului $AS_1\ OS_2$ şi are centrul în mijlocul lui $S_1\ S_2$.

Pentru rezolvarea problemei 1386 în care A este centrul unui cerc dat (A), iar D un punct pe acel cerc, se vede că acest punct se obţine prin intersecţia hiperbolei (Γ') cu cercul (A).

Observaţiuni. 1°. Am propus problema 3760 în anul 1929 pentru a stimula rezolvarea problemei 1386, după cum pentru acelaşi scop a propus D-l N. ABRAMESCU problema 2889.

2°. Din soluţia D-lui AD. GHEORGHIU se vede că de oare ce AS' sunt normale la (Γ), conica lor găsită este hiperbola lui APOLLONIUS relativă la punctul dat A.

3°. Problema 3760 generalizată, dă după cum se vede şi un metod de construcţie grafică a normalelor din un punct A la o conică (Γ').

4°. Soluţia pe care a dat-o D-l G-L GH. I. POPESCU problemei 1386 în articolul de la pag. 127, Vol. XLI este tot una cu aceea pe care o dă problema 3760.

5°. D-nii: CURCHI şi M. MARGULIUS au găsit numai ecuaţia locului lui D pe cale analitică, iar D-l N. N. MIHĂILEANU pe cale geometrică, fără a aplica rezultatul la rezolvarea problemei 1386 cum se cerea prin enunţ. Unul din ei au afirmat chiar că „nu vede legătura între această problemă şi problema 1386". O poate vedea acum.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4394. *Se consideră într'un plan trei direcţii fixe* Ox, Oy, Oz *şi un punct fix* M. *O dreaptă* Δ *dusă prin* M *întâlneşte pe* Ox *în punctul* A. *Paralela dusă prin* A *la* Oz *întâlneşte pe* Oy *în* B, *iar cercul circunscris triunghiului* OAB *întâlneşte din nou pe* Δ *în* C.

Să se arate că dacă dreapta Δ *se roteşte în jurul punctului* M:

1°. *Punctul* C *se mişcă pe un cerc fix.*

2°. *Dreapta* BC *trece printr'un punct fix.*

N. BOTEA

Soluţie dată de D-nii: D-TRU LEBĂDĂ, VIRGIL METEA, OCTAVIAN MIHALCEA, M. POSTELNICESCU, IANCU SAGER, ILIE IOAN ŢITEICA.

1°. Se observă egalităţile:

$$\widehat{MCO} = \widehat{ACO} = \widehat{ABO} = \widehat{Oy, Oz} = \text{const.}$$

Rezultă că C se găseşte pe un cerc fix, ce trece prin punctele O şi M.

2°. Fie D punctul în care BC întâlneşte acest cerc. Unghiul $\widehat{OCD}$ este egal sau suplimentar cu unghiul $\widehat{BAO}$ iar acesta este constant, fiind egal cu unghiul făcut de dreptele Ox, Oz.

Punctul D este deci fix.

PROBLEMA 4409. *Se consideră trei cercuri* O_1, O_2, O_3 *în acelaşi plan. Cercurile* O_1 *şi* O_2 *se întâlnesc în punctele* A *şi* B, *iar cercurile* O_2 *şi* O_3 *se întâlnesc în punctele* C *şi* D.

Dreapta AD *întâlneşte din nou cercul* O_1 *în* A′ *şi cercul* O_3 *în* D′, *iar dreapta* BC *întâlneşte din nou cercul* O_1 *în* B′ *şi cercul* O_3 *în* C′. *Să se arate că:*

1°. *Patrulaterul* A′B′C′D′ *este înscris într'un cerc* O_4.

2°. *Centrele cercurilor* O_1, O_2, O_3, O_4 *formează un paralelogram.*

N. BOTEA

Soluţia dată de D-ra BIBY UNTER şi D-nii: RADU APOSTOL, SLT. AUREL BĂDESCU, ION BOGDAN, GH. BOIANGIU, VIRGIL BUCUR, IOAN BUZINCU, VASILE CEAUŞESCU, CONST. CHIRIAC, PETRE COJOCARU, AUREL CORNĂŢEANU, COSTEL COTESCU, VICTOR D. ENĂŞESCU, C-TIN GAVRILESCU, ENACHE IORDACHE, VIRGIL IONESCU, D. LEBĂDĂ, PANAIT MAZILU, DUMITRU MIHALCEA, OCTAVIAN MIHALCEA, M. NĂSTASE, SLT. I. PAREPEANU, IOAN PETRESCU, M. POSTELNICESCU, ION ŞABAC, IANCU SAGER, AL. STOICA, I. STREDER, ILIE ŢIŢEICA, GHEORGHE VASILACHE.

1°. Patrulaterele ABA′B′, ABCD, CDC′D′ fiind înscrise în cercurile O_1, O_2, O_3 au unghiurile opuse suplimentare. Se deduce că unghiurile patrulaterului A′B′C′D′ sunt egale cu unghiurile patrulaterului ABCD. Deci şi A′B′C′D′ este înscris într'un cerc O_4.

2°. Tot din considerarea unghiurilor patrulaterelor de mai sus se deduce: A′B′ ∥ CD, AB ∥ C′D′. Dar : $O_1O_2 \perp AB$, $O_2O_3 \perp CD$, $O_3O_4 \perp C'D'$, $O_4O_1 \perp A'B'$. Rezultă $O_1O_2 \parallel O_3O_4$, $O_2O_3 \parallel O_1O_4$ şi punctele O_1, O_2, O_3, O_4, sunt vârfurile unui paralelogram.

PPOBLEMA 4455. *Se consideră trei puncte* A_1, B_1, C_1, *pe trei paralele duse prin vârfurile triunghiului* ABC. *Punctul* A_1 *se proiectează în* A_b *şi* A_c *pe* AC *şi* AB. *Analog obţinem proiecţiunile* B_c, B_a; C_a, C_b.

Perpendicularele coborîte din A, B, C *respectiv pe* $A_b A_c$, $B_c B_a$, $C_a C_b$ *trec printr'un acelaşi punct.*

N. BOTEA.

Soluţie dată de D-nii: PAUL DOBRESCU, ARNO HILF, ION PETRESCU, ION ŞABAC, IANCU SAGER, I. I. ŢIŢEICA. Fie A' proiecţia lui A pe $A_b A_c$. Patrulaterul $AA_b A_1 A_c$ este inscriptibil şi avem între unghiuri relaţiile:

$$\sphericalangle A_c A_1 A = \sphericalangle A_c A_b A, \quad \sphericalangle A_c A_1 A + \sphericalangle A_c AA_1 = 90^0,$$
$$\sphericalangle A_c A_b A + \sphericalangle A' AA_b = 90^0.$$

Rezultă de aci egalitatea $\sphericalangle A_c AA_1 = \sphericalangle A' AA_b$, care arată că dreptele AA_1, AA' sunt izogonale în raport cu unghiul din A. Dreptele AA_1, BB_1, CC_1 fiind paralele se ştie şi se poate demonstra uşor că izogonalele lor AA', BB', CC' se întâlnesc într'un punct M, situat pe cercul circumscris triunghiului ABC.

PROBLEMA 4467. *Intre* l_9, *latura poligonului regulat convex cu nouă laturi, şi raza* R *a cercului circumscris, există relaţia*

$$(l_9^2 - 2R^2)(l_9^2 + \sqrt{3}\, R l_9 - R^2) + R^4 = 0$$

din care se deduce

$$\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2} R < l_9 < R.$$

C. IONESCU-BUJOR.

1. *Soluţia I.*

a) Avem în vedere relaţia

$$4 \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{9} + \cos \frac{\pi}{9} = 2. \qquad (1)$$

(Probl. 4485, G. M. Vol. XLII, p. 207)

şi notând a_9 apotema poligonului considerat,

$$\sin \frac{\pi}{9} = \frac{l_9}{2R}, \quad \cos \frac{\pi}{9} = \frac{a_9}{R} = \frac{\sqrt{4R^2 - l_9^2}}{2R},$$

(1) devine

$$2l_9^2 + \sqrt{3}\, l_9 R + R\sqrt{4R^2 - l_9^2} = 4R^2$$

sau

$$4R^2 - 2l_9^2 - \sqrt{3}\, l_9 R = R\sqrt{4R^2 - l_9^2}.$$

Ridicând la patrat şi reducând, avem succesiv

$$l_9^4 + \sqrt{3}\, R l_9^3 - 3R^2 l_9^2 - 2\sqrt{3}\, R^3 l_9 + 3R^4 = 0$$

$$(l_9^2 - 2R^2)^2 + \sqrt{3}\, R l_9 (l_9^2 - 2R^2) + R^2 (l_9^2 - 2R^2) + R^4 = 0$$

$$(l_9^2 - 2R^2)(l_9^2 + \sqrt{3}\, R l_9 - R^2) + R^4 = 0 \qquad (2)$$

adică relaţia enunţului.

b) Aceasta se mai poate scrie

$$(l_9^2 - 2R^2)(l_9^2 + \sqrt{3}\, R l_9 - R^2) = -R^4,$$

deci

$$(l_9^2 - 2R^2)(l_9^2 + \sqrt{3}\, R l_9 - R^2) < 0 \qquad (3)$$

l_9 subîntinzând un arc de 40^0, este mai mic decât latura exagonului regulat înscris în cerc, deci

$$l_9 < R \qquad l_9^2 < 2R^2,$$

iar primul factor al membrului I în (3) fiind negativ

$$l_9^2 + \sqrt{3}\, R l_9 - R^2 > 0. \qquad (4)$$

Rădăcinile acestui trinom de gradul II în l_9 sunt

$$\frac{-\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2} R, \quad \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2} R$$

şi pentru a exista inegalitatea (4) trebue să luăm

$$l_9 < \frac{-\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2} R \quad \text{sau} \quad l_9 > \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2} R.$$

Cum l_9 este pozitiv, rămâne

$$\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2} R < l_9 < R.$$

2. *Soluţia II.* D-l MIRCEA A. NEGREA (Brăila) consideră identitatea

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

în care $x = 20^0$ şi punând $l_9 = 2R \sin 20^0$, D-sa obţine

$$l_9^3 - 3 l_9 R^2 + \sqrt{3} R^3 = 0,$$

care multiplicată cu $l_9 + \sqrt{3} R$ dă relaţia enunţului.

Inegalitatea este apoi dedusă ca în soluţia precedentă.

3. *Alte soluţii: a)* D-l PANAIT C. MAZILU observă descompunerea membrului I al relaţiei problemei în produsul de factori

$$(l_9 + \sqrt{3} R)(l_9^3 - 3 l_9 R^2 + \sqrt{3} R^3)$$

şi stabileşte geometric valoarea zero a factorului secund.

b) D-nii: D. MAVRODIN şi M. F. AMĂRĂŞTEANU verifică egalitatea problemei ţinând seamă de egalitatea (1).

c) D-l M. C. POSTELNICESCU a demonstrat numai egalitatea problemei.

4. Din soluţiile D-lor MIRCEA A. NEGREA şi PANAIT C. MAZILU rezultă şi proprietatea:

„Latura poligonului regulat convex cu nouă laturi, înscris în cercul de rază **a** *este rădăcina reală a ecuaţiei*

$$x^3 - 3a^2 x + \sqrt{3} a^3 = 0.$$

C. I. B.

PROBLEMA 4471. *Să se arate că expresia*

$$(x+a)(y+b)(z+c)(u+d) - (y+z+u-a)x$$
$$(z+u+x-b)(u+x+y-c)(x+y+z-d)$$

se divide cu $x+y+z+u$. *Să se generalizeze.*

N. BOTEA.

Soluţie şi *generalizare* date de D-ra DACIA MUSCELEANU şi D-nii: RADU APOSTOL, MIHAI CHIRIŢĂ, VILHELM CSEKE, A. DOBRESCU, PAUL DOBRESCU, VICTOR FLORESCU, C-TIN GAVRILESCU, ARNO HILF, VINTILĂ GRIGORESCU, GRIGORE MARTES, DIM. MAVRODIN, PANAIT MAZILU, MIRCEA LEONTE NEGREA, ANASTASIE PETRESCU, NICOLAE ŞTEFĂNESCU, ILIE IOAN ŢIŢEICA.

Expresia:

$$E(s) = s_1 s_2 \ldots s_n + (-1)^{n+1} (s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_n)$$

se divide cu s, căci

$$E(0) = s_1 s_2 \ldots s_n - s_1 s_2 \ldots s_n = 0.$$

Dacă $s = x + y + z + u$, $s_1 = x + a$, $s_2 = y + b$, $s_3 = z + c$, $s_4 = u + d$ se obţine cazul particular al enunţului.

D-ra BIBY UNTER şi D-nii M. AMĂRĂSTEANU, I. BOGDAN, V. BUCUR, I. BUZINCU, V. CEAUŞESCU, P. COJOCARU, C. COTESCU, C. I. DIMITRIU, I. ENACHE, D. V. ENĂŞESCU, M. GRUMĂZESCU, ISAC DUMITRU, V. IONESCU, D. LEBĂDĂ, G. NIŢESCU şi I. STREDER, au rezolvat problema fără a o generaliza.

N. B.

PROBLEMA 4542. *Fie x', x'' rădăcinile ecuaţiunii cu coeficienţi reali:*

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Să se formeze ecuaţiunea în y, *care admite ca rădăcini sumele:*

$$\frac{x'}{x''} + \frac{x''}{x'} \text{ şi } \frac{x'}{x''} - \frac{x''}{x'}.$$

Să se dea condiţiunea, necesară şi suficientă, ca ecuaţiunea formată să aibă rădăcinile reale.

O. N. ŢINO.

Soluţiune dată de Domnul DIMITRIE MAVRODIN (Student Bucureşti).

Să presupunem că x' este rădăcina în care $\sqrt{b^2 - 4ac}$ are semnul plus şi fie:

$$y^2 + px + q = 0, \tag{1}$$

ecuaţiunea în y ce trebue formată.

Folosind relaţiunile dintre coeficienţi şi radăcini, avem:

$$p = -2\frac{x'}{x''} = -2\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} = -\frac{(b - \sqrt{b^2 - 4ac})^2}{2ac}. \tag{2}$$

Asemenea, avem:

$$q = \frac{(x'^2 + x''^2)(x'^2 - x''^2)}{x'^2 x''^2} = \frac{(x' + x'')(x' - x'')(x'^2 + x''^2)}{(x'x'')^2},$$

dar:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}; \; x'x'' = \frac{c}{a};$$

$$x'^2 + x''^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}, \; x' - x'' = +\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a},$$

deci:

$$q = -\frac{b(b^2 - 2ac)\sqrt{b^2 - 4ac}}{a^2 c^2}. \qquad (3)$$

Aşa dar ecuaţiunea cerută este următoarea:

$$2a^2 c^2 y^2 - ac\,(b - \sqrt{b^2 - 4ac})^2 y - 2b(b^2 - 2ac)\sqrt{b^2 - 4ac} = 0. \qquad (4)$$

Natura rădăcinilor ecuaţiunii (4) depinde de semnul lui $p^2 - 4q$; însă putem scrie această expresiune succesiv:

$$p^2 - 4q = a^2 c^2 (b - \sqrt{b^2 - 4ac})^4 + 16a^2 c^2 b(b^2 - 2ac)\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$= 4a^2 c^2 \{[b^2 - 2ac - b\sqrt{b^2 - 4ac}]^2 + 4b(b^2 - 2ac)\sqrt{b^2 - 4ac}\} \qquad (5)$$

$$= 4a^2 c^2 [b^2 - 2ac + b\sqrt{b^2 - 4ac}]^2.$$

Dacă b este *diferit de zero,* cantitatea $(p^2 - 4q)$ este pozitivă, dacă expresiunea $[b^2 - 2ac + b\sqrt{b^2 - 4ac}]$ este reală, însă a, b, c fiind reali acest lucru are loc dacă $(b^2 - 4ac)$ este pozitivă sau nulă, adică dacă rădăcinile ecuaţiunii date sunt reale. Această condiţiune necesară este şi suficientă, căci dacă rădăcinile ecuaţiunii date sunt reale, rădăcinile: $y' = \frac{x'}{x''} + \frac{x''}{x'}$ şi $y'' = \frac{x'}{x''} - \frac{x''}{x'}$ sunt deasemenea reale.

Dacă $b = 0$, rădăcinile ecuaţiunii date sunt:

$$x' = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \; x'' = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

deci $y' = -2$, $y'' = 0$, iar ecuaţiunea în y este următoarea: $y^2 + 2y = 0$, cu rădăcini reale chiar dacă ecuaţiunea dată are rădăcini imaginare.

Exceptând deci cazul particular $b = 0$, *condiţiunea necesară şi suficientă, ca ecuaţiunea în* y *formată să aibă rădăcini reale, este ca ecuaţiunea dată să aibă rădăcini reale.*

In cele ce preced am luat pentru x' rădăcina $-b+\sqrt{b^2-4ac}$ a ecuației date; dacă luăm pentru x' cealaltă rădăcină, adică $x'=-b-\sqrt{b^2-4ac}$, și însemnăm ecuațiunea în y, ce trebue să formăm, cu

$$y^2+p'y+q'=0 \tag{6}$$

în calculele pe care le-am făcut pentru p și q se schimbă x' și x'' între ele, așa că avem: $pp'=4$ și $q'=-q$, deci

$$p'=\frac{4}{p}=\frac{-8ac}{(b-\sqrt{b^2-4ac})^2}=\frac{-(b+\sqrt{b^2-4ac})^2}{2ac};$$
$$q'=\frac{b(b^2-2ac)\sqrt{b^2-4ac}}{a^2c^2} \tag{7}$$

și în acest caz ecuațiunea în y, devine:

$$2a^2c^2y^2-ac(b+\sqrt{b^2-4ac})^2y+2b(b^2-2ac)\sqrt{b^2-4ac}=0, \tag{8}$$

iar cantitatea

$$p'^2-4q'=4a^2c^2[b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}]^2. \tag{9}$$

Observând expresiunea (9), deducem pentru ecuațiunea (8) concluziunile obținute în cazul ecuațiunii (4). Acest lucru rezultă și pe altă cale, observând că aceste două ecuațiuni în y au o rădăcină comună, celelalte două fiind două numere contrarii.

Alte soluțiuni au fost date de Domnii: G. G. CONSTANTINESCU; VICTOR FLORESCU (Liceul Militar „N. Filipescu“ Târgoviște).

O. N. Ț.

PROBLEMA 4569. *Să se arate că expresiunea:*

$$G_n=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{3}+\ldots+\sin\frac{\pi}{n}-\pi\log n$$

tinde către o limită bine determinată pentru $n=\infty$.

M. GHERMĂNESCU.

1. *Soluția* D-lui O. SACTER.

Considerăm seria cu termenul general:

$$u_n=G_n-G_{n-1}=\sin\frac{\pi}{n}+\pi\log\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Desvoltările cunoscute:

$$\sin c = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\log(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$$

permit a scrie

$$u_n = -\frac{\pi}{2n^2} + \frac{\lambda}{n^3}$$

λ fiind fix când $n = \infty$. Aceasta arată că seria cu termenul general u_n este convergentă, deci expresiunea

$$u_2 + u_3 + \dots + u_n = (G_2 - G_1) + (G_3 - G_2) + \dots + (G_n - G_{n-1}) = G_n - G_1$$

are o limită bine determinată pentru $n = \infty$, care va fi chiar limita expresiunii din enunţ, căci $G_1 = 0$.

2. *Soluţia* D-lui SILAŞ GEORGE (student Cluj).

Expresiunea:

$$C_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

are o limită bine determinată pentru $n = \infty$, care este celebra *constantă a lui* EULER $C = 0{,}577215664\dots$ Scriind apoi diferenţa

$$\pi C_n - G_n = \pi + \left(\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) + \dots \left(\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}\right),$$

observăm că seria cu termenul general $u_n = \frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}$ este convergentă căci

$$\lim_{n=\infty} n^3 \left(\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi^3}{3!}.$$

Vom avea deci, însemnând prin S suma acestei serii:

$$\lim(\pi C_n - G_n) = \pi C - \lim G_n = S$$

deci

$$\lim G_n = \pi C - S.$$

Cum evident $S > \pi$ căci $u_n > 0$, rezultă

$$\lim G_n < \pi(C-1) < 0.$$

La fel se găseşte că expresia analoagă

$$H_n = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \ldots + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} - \pi \log n$$

are o limită $H > \pi\left(C - \frac{3}{2}\right)$.

Notă. O soluţie analoagă primei a trimis şi D-l TUDOR STOICESCU, pe când nu era membru al *Gazetei*.

M. G.

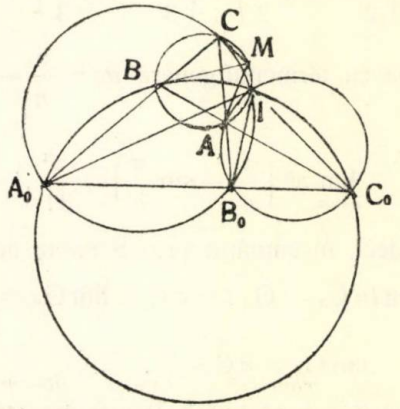
PROBLEMA 4656. *Fie* B_0 *şi* I *punctele de intersecţie a două cercuri date. O dreaptă ce trece prin* B_0 *le taie în* A_0 *şi* C_0. *Se ia un punct oarecare* B *pe cercul* A_0IC_0. *Dreapta* A_0B *taie cercul* A_0B_0I *în* C, *iar* CB_0 *taie cercul* B_0C_0I *în* A. *Să se arate:* 1°. *Dreapta* BA *trece prin* C_0. 2°. *Triunghiul* ABC *rămâne asemenea cu el însuşi; iar laturile sale trec prin trei puncte fixe* A_0, B_0, C_0 *coliniare.* 3°. *Cercul circumscris triunghiului* ABC *trece prin* I. 4°. *Tangentele în* A, B, C *la cercurile* B_0IC_0, C_0IA_0, A_0IB_0 *se taie în acelaşi punct* M *pe cercul* ABCI.

N. ABRAMESCU.

Soluţie dată de D-nii: BAL LASCU, DOBRESCU PAUL, MIRCEA-LEONTE A. NEGREA.

1°. Unghiurile $BCA = A_0CB_0 = A_0IB_0$ în cercul A_0IB_0; $BAC = B_0AC_0 = B_0IC_0$ în cercul B_0IC_0; în cercul A_0IC_0 avem

$$A_0BC_0 = A_0IC_0 = A_0IB_0 + B_0IC_0.$$



Deci unghiurile $A_0BC_0 = BCA + CAB$; unghiul A_0BC_0 este exterior triunghiului BAC, astfel că BA trece prin C.

2°. In triunghiul ABC, unghiurile

$$BCA = A_0IB_0 = \text{const.},$$

$$BAC = B_0IC_0 = \text{const.},$$

$$CAB = \pi - A_0BC_0 = \pi - A_0IC_0 = \text{const.}$$

Deci triunghiul ABC rămâne asemenea cu el însuşi, iar laturile sale trec prin trei puncte fixe coliniare A_0 , B_0 , C_0.

3°. In cercul A_0IB_0, unghiurile $ACI = B_0CI = B_0A_0I$; în cercul A_0IC_0, unghiurile

$$B_0A_0I = C_0A_0I = C_0BI = ABI.$$

Deci $ACI = ABI$, patrulaterul ABCI este inscriptibil, cercul ABC trece prin I.

4. In cercul ABCM, avem unghiurile

$$MAC_0 = MCB = MCA + ACB = MCB_0 + B_0CA_0.$$

Dar în cercul CA_0B_0, avem unghiurile $MCB_0 = CA_0B_0$. Deci

$$MAC_0 = CA_0B_0 + B_0CA_0 = \pi - A_0B_0C = CB_0C_0 = AB_0C_0.$$

Aceasta probează că MA este tangentă la cercul AB_0C_0, sau că tangenta în A la cercul IB_0C_0 trece prin M.

Observări. I. D-l PAUL DOBRESCU a mai arătat că, însemnând cu O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor BIC_0, C_0IA_0, A_0IB_0, atunci dreptele MA, MB, MC sunt respectiv perpendiculare pe O_1A, O_2B, O_3C; dreptele O_1A, O_2B, O_3C se întâlnesc în acelaşi punct Q pe cercul ABC.

II. Problema propusă corespunde unui caz particular, când un triunghiu variază rămânând asemenea cu el însuşi, iar laturile sale trec prin trei puncte fixe în linie dreaptă [1]).

PROBLEMA 4712. *Să se formeze un patrat de şapte cifre scriind o dată cifra 3 şi de câte două ori pe fiecare din cifrele 0, 8 şi 9.*

G-L GH. BUICLIU

---

1) N. ABRAMESCU. *Proprietăţi geometrice ale mişcării unei figuri plane variabile care rămâne asemenea cu ea însăşi, când trei drepte ale figurii trec prin trei puncte fixe, sau când trei puncte descriu trei drepte fixe (Gazeta Matematică,* vol. 41, 1936, p. 409–414).

Fie

$$N^2 = abcdefg$$

patratul căutat. Faţă de cifrele date în enunţ g nu poate fi de cât 0 sau 9.

1°. $g = 0$. In acest caz f este neapărat 0, iar e va fi terminaţie de patrat. In cazul problemei $e = 9$ şi deci

$$N^2 = abcd\,900.$$

Problema revine la a găsi patratul de 5 cifre

$$X^2 = abcd\,9$$

format din cifrele 3, 8, 8, 9, 9. Consideraţia ultimelor 2 cifre ale unui patrat arată că d nu poate fi decât 8 şi apoi din aproape în aproape se caută celelalte cifre. Ne folosim însă de rezultatele date anterior în *Gazeta Matematică* spre a uşura cercetările. Astfel dacă se foloseşte tabloul dela pag. 368 Vol. XXXVII *Gazeta Matematică* [1]) se găseşte $cd = 88$ şi deci

$$X^2 = 39889 \text{ sau } X^2 = 93889.$$

Aceste numere nu sunt însă patrate perfecte, deci problema nu are soluţie în cazul 1°.

2°. $g = 9$. Folosind articolul citat al D-lui I. V. MĂTIEŞ se găsesc următoarele posibilităţi pentru efg

$$efg = 009;\ 809;\ 089 \text{ sau } 889.$$

Fie $efg = 009$. Atunci

$$3889009 \leqslant N^2 \leqslant 9883009$$

$$(1) \qquad 1972 < N \leqslant 3143.$$

Conform articolului citat, în acest caz

$$N = 250\,n \pm 3.$$

Dând lui n diferite valori se găseşte că N, care să satisfacă neegalităţile (1) poate fi între numerele:

1997, 2003, 2247, 2253, 2497,
2503, 2747, 2753, 2997, 3003.

---

1) Articolul D-lui I. V. MĂTIEŞ: *Asupra ultimului grup de* **p** *cifre ale patratelor perfecte.*

Din aceste numere se elimină acelea divizibile prin 3 pentru că N^2 nu se divide prin 3 căci

$$0+0+3+8+8+9+9 \not\equiv 3m.$$

Rămân numerele

$$1997,\ 2003,\ 2497,\ 2503,\ 2747,\ 2753$$

pe care ridicându-le la patrat, găsim soluția

$$1997^2 = 3988009.$$

Fie $efg = 809$. Avem

$$0389809 \leqslant N^2 \leqslant 9830809;\quad 624 \leqslant N \leqslant 3135$$

$$N = 250\,n \pm 53$$

de unde se deduce că N trebue căutat între numerele

$$697,\ 803,\ 947,\ 1303,\ 1447,\ 1553,\ 1697,$$
$$2053,\ 2197,\ 2303,\ 2447,\ 2803,\ 2947,\ 3053,$$

care nu dau soluție.

Pentru $efg = 089$ se găsește

$$0389089 \leqslant N^2 \leqslant 9830089;\quad 624 \leqslant N \leqslant 3135$$

$$N = 250\,n \pm 33$$

$$967,\ 1033,\ 1217,\ 1283,\ 1717,\ 1783,\ 1967,$$
$$2033,\ 2467,\ 2533,\ 2717,\ 2783,$$

care nu dau soluții.

In fine $efg = 889$ conduce la

$$0039889 \leqslant N^2 \leqslant 9300889;\quad 199 \leqslant N \leqslant 3049$$

$$N^2 = 250\,n \pm 83$$

$$167,\ 583,\ 667,\ 833,\ 917,\ 1333,\ 1417,\ 1583,\ 1667,$$
$$2083,\ 2167,\ 2333,\ 2417,\ 2833,\ 2917,$$

din care niciunul nu este acceptabil.

Singura soluție a problemei este deci

$$\boxed{1997^2 = 3988009}\ .$$

Soluţii bune, pe căi analoage, dela D-nii: M. F. AMĂRĂŞTEANU, L. M. BIVOLARU, A. CĂLINESCU, R. I. CIURESCU, V. ECKSTEIN, S-LT. M. GRUMĂZESCU, P. I. MAMUT, D. MAVRODIN, şi C. SĂNDULACHE.

D-l TILICĂ C. ŞTEFAN înlocuind în enunţ cifra 3 prin 2 găseşte soluţia

$$2997^2 = 8982009.$$

Analog cu problema 4712 am propus problema 4549 rezolvată la pag. 637 Vol. XLI şi problema 4605 propusă la pag. 263 Vol. XLI, dar nerezolvată încă.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4732. *Se dă un cerc* O *şi un punct* C *pe acest cerc. Prin punctul* C *se duce un cerc* O_1 *având centrul pe diametrul* OA *al cercului* O. *Fie* OB *diametrul cercului* O *perpendicular pe* OA. *Cercul* O_1 *taie pe* OB *în punctul* D.

Se notează cu γ *unghiul celor două cercuri (în punctul* C) *şi cu* δ *unghiul din* D *al cercului* O_1 *cu dreapta* OB.

Să se arate că raportul:

$$\frac{\sin\gamma}{\cos\delta}$$

nu depinde decât de cercul O *şi de puncul* C.

TH. ANGHELUŢĂ.

Prima soluţie dată de D-nii: LASCU BAL (Student Cluj); PAUL DOBRESCU.

Prin definiţie γ este unghiul format de tangentele în C la cercurile O şi O_1; se are deci:

$$\gamma = \widehat{OCO_1},$$

O şi O_1 fiind centrele celor două cercuri. Din triunghiul COO_1 deducem relaţia:

$$\sin\gamma = \frac{OO_1}{CO_1}\sin\widehat{COO_1}.$$

Unghiul făcut de tangenta în B la cercul O_1 cu diametrul OB l'am notat cu δ. Din triunghiul ODO_1 tragem relaţia:

$$\cos\delta = \frac{OO_1}{CO_1}$$

şi prin urmare deducem:

$$\frac{\sin\lambda}{\cos\delta} = \sin \widehat{COO_1}\,.$$

Unghiul $\widehat{COO_1}$ depinde numai de cercul O şi punctul C.

A doua soluţie dată de D-nii: EUG. MARCOVICIU (Student Iaşi); D-TRU RIPIANU.

Fie: R şi r respectiv razele cercurilor O şi O_1, α abscisa centrului O_1, iar (a, b) coordonatele punctului C. Se găseşte uşor:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\alpha b}{R^2 - a\alpha}$$

de unde:

$$\sin\gamma = \frac{\alpha b}{Rr}\,.$$

Se are deasemenea:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\sqrt{r^2-\alpha^2}}{r}$$

şi deci:

$$\cos\delta = \frac{\alpha}{r}\,.$$

Prin urmare avem:

$$\frac{\sin\gamma}{\cos\delta} = \frac{b}{R}\,.$$

PROBLEMA 4767. α, β, γ *fiind unghiuri oarecare, există relaţia:*

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \Sigma\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}{\Sigma\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha)} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)}\,.$$

C. IONESCU-BUJOR.

1°. *Soluţia I* dată de D-nii: MIRCEA A. NEGREA (Brăila), MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU (elev inginer şi student matematici), SLT. M. GRUMĂZESCU, SLT. I. PAREPEANU (din geniu), N. D. ŞTEFĂNESCU şi V. FLORESCU (Lic. militar N. Filipescu).

Notăm

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = l\ ,\quad \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma} = m\ ,\quad \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha} = n\ ,\ lmn = 1.$$

Deci

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \frac{l+1}{l-1} \quad \therefore \quad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{l+1}{l-1}$$

iar membrul II al egalității se poate scrie succesiv

$$\frac{(l+1)(m+1)(n+1)}{(l-1)(m-1)(n-1)} = \frac{2+lm+ln+mn+l+m+n}{l+m+n-(lm+ln+mn)}$$

și înlocuind l, m, n prin valorile corespunzătoare, se obține primul membru al relației.

2°. *Soluția II* dată de D-nii: M. F. AMĂRĂȘTEANU, R. V. APOSTOL (Lic. militar N. Filipescu), P. P. COJOCARU (Lic. militar Iași), P. D. DOBRESCU, IACOB COTIGHER (elev inginer București), G. POPOVICIU (elev inginer București) și ȘTEFAN G. TILICĂ (Lic. Traian, T. Severin).

Primul membru se descompune în produs de factori astfel:

$$\frac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)(\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha)}{(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma)(\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha)}\ ,$$

expresie care făcută calculabilă prin logaritmi dă membrul II.

3°. Alte soluții date de: D-ra GEORGETA ROMAȘCAN (Școala Centrală București), R. I. CIURESCU (Colegiul Național Sf. Sava), SLT. MARIN P. TICA-GALL, O. G. RĂDULESCU și DORIN THEODORESCU (Lic. militar N. Filipescu), AL. C. JIPA și I. STREDER (Iași) și un grup de elevi cărora le citâm numai fidelitatea cu care au copiat soluția oferită de un suflet generos.

4°. *Observări. a).* D-l N. D. ȘTEFĂNESCU, punând în relația problemei

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - a,\quad \beta = \frac{\pi}{2} - b,\quad \gamma = \frac{\pi}{2} - c$$

obține identitatea

$$\frac{2\operatorname{cotg}a\ \operatorname{cotg}b\ \operatorname{cotg}c + \Sigma \operatorname{cotg}a\ \operatorname{cotg}b\ (\operatorname{cotg}a + \operatorname{cotg}b)}{\Sigma \operatorname{cotg}a\ \operatorname{cotg}b\ (\operatorname{cotg}a - \operatorname{cotg}b)} = \frac{\sin(a+b)\sin(b+c)\sin(c+a)}{\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)}\ .$$

b) Dacă în relația problemei α, β, γ sunt unghiurile A, B, C ale unui triunghiu, avem

$$\frac{2\,\mathrm{tgA\ tgB\ tgC}+\Sigma\,\mathrm{tgA\ tgB\ (tgA+tgB)}}{\Sigma\,\mathrm{tgA\ tgB\ (tgB-tgA)}}=\frac{\mathrm{sinA\ sinB\ sinC}}{\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A)}$$

care conduce la

$$\frac{2\cos A\cos B\cos C+\Sigma\cos^2 A}{\Sigma\cos^2 A\sin(C-B)}=\frac{1}{\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A)}.$$

C. I. B.

PROBLEMA 4769. *Să se calculeze determinantul*

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
5a & 4a+b & 3a+2b & 3b+2a & 4b+a & 5b\\
10a^2 & 6a^2+4ab & 3a^2+6ab+b^2 & 3b^2+6ab+a^2 & 6b^2+4ab & 10b^2\\
10a^3 & 4a^3+6a^2b & a^3+6a^2b+3ab^2 & b^3+6ab^2+3a^2b & 4b^3+6ab^2 & 10b^3\\
5a^4 & a^4+4a^3b & 2a^3b+3a^2b^2 & 2ab^3+3a^2b^2 & b^4+4ab^3 & 5b^4\\
a^5 & a^4b & a^3b^2 & a^2b^3 & ab^4 & b^5
\end{vmatrix}.$$

V. CLAUDIAN.

Soluție dată de D-nii: M. A. NEGREA, M. F. AMĂRĂȘTEANU, I. D. BOSTANGIU, R. I. CIURESCU, P. P. COJOCARU, I. S. COTIGHER, I. C. DIMITRIU, V. FLORESCU, SUBL. M. GRUMĂZESCU, HERMAN V., D. MAVRODIN, P. I. MIHĂILESCU, N. I. MILU, M. NĂSTASE, O. GH. RĂDULESCU, D. RIPIANU, N. D. ȘTEFĂNESCU, I. STREDER și T. C. ȘTEFAN. Fie Δ valoarea determinantului din enunț. Scăzând prima coloană din toate celelalte și dezvoltând după prima linie găsim, după ce am dat ca factor comun la fiecare coloană pe $b-a$:

$$\Delta=(b-a)^5\begin{vmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5\\
4a & b+7a & 3b+9a & 6b+10a & 10b+10a\\
6a^2 & 3ab+9a^2 & b^2+7ab+10a^2 & 4b^2+10ab+10a^2 & 10a^2+10ab+10a^2\\
4a^3 & 3a^2b+ba^3 & 2ab^2+5a^2b+5a^3 & b^3+5ab^2+5a^2b+5a^3 & 5b^3+5ab^2+5a^2b+5a^3\\
a^4 & a^3b+a^4 & a^2b^2+a^3b+a^4 & ab^3+a^2b^2+a^3b+a^4 & b^4+ab^3+a^2b^2+a^3b+a^4
\end{vmatrix}.$$

Inmulţim prima coloană cu 2 şi o scădem din a doua, apoi cu 3 şi o scădem din a treia, ..., apoi cu 5 şi o scădem din ultima. Dezvoltând determinantul găsit după prima linie şi dând la fiecare coloană drept factor comun pe $(b-a)$, găsim:

$$\Delta=(b-a)^9\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 3a & b+8a & 4b+14a & 10b+20a \\ 3a^2 & 2ab+7a^2 & b^2+6ab+11a^2 & 5b^2+10ab+15a^2 \\ a^3 & ab+2a^3 & ab^2+2a^2b+3a^3 & b^3+2ab^2+3a^2b+4a^3 \end{vmatrix}.$$

Inmulţim prima coloană cu 3, 6, 10 şi o scădem apoi respectiv din coloanele a II^a, III^a, IV^a. Determinantul găsit dezvoltându-l după prima linie şi din care se scoate la fiecare coloană factorul $(b-a)$, dă succesiv:

$$\Delta=(b-a)^{12}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2a & b+7a & 5b+15a \\ a^2 & ab+3a^2 & b^2+3ab+6a^2 \end{vmatrix}=(b-a)^{14}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ a & b+4a \end{vmatrix}=(b-a)^{15}$$

$$\therefore\ \Delta=(b-a)^{15}.$$

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4795. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sin x+\cos x+\operatorname{tg}x=\sec x+\operatorname{cosec}x+\operatorname{cotg}x=0.$$

I. IONESCU

Soluţie dată de D-l C. N. GAVRILESCU (Şcoala pregătitoare de Oficeri, Bucureşti).

Inlocuim totul numai în funcţie de sinus şi cosinus, trecem totul în partea întâia a ecuaţiei şi găsim:

$$\sin x-\frac{1}{\cos x}+\cos x-\frac{1}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=0,$$

$$\therefore\ \frac{\sin x\cos x-1}{\sin x}+\frac{\sin x\cos x-1}{\cos x}+\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin x\cos x}=0,$$

$$\therefore\ \frac{(\sin x\cos x-1)(\sin x+\cos x)}{\sin x\cos x}+\frac{(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}{\sin x\cos x}=0,$$

$$\therefore\ \frac{(\sin x+\cos x)(\sin x-1)(\cos x+1)}{\sin x\cos x}=0. \qquad (1)$$

Această ecuație este echivalentă cu cea dată. Valorile care verifică această ecuație vor verifica și pe aceia. Ecuația (1) se descompune în următoarele trei:

$$\sin x + \cos x = 0\,,\ \sin x - 1 = 0\,,\ \cos x + 1 = 0\,. \qquad (2)$$

Prima din ele poate fi scrisă succesiv:

$$\cos x = -\sin x = -\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right)$$

$$= \cos\left(\pi - \tfrac{1}{2}\pi + x\right) = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi + x\right),$$

$$\therefore\quad x = 2k : \pm\left(\tfrac{1}{2}\pi + x\right).$$

Soluția cu + nu dă nimic, iar cealaltă ne dă:

$$x = k\pi - \tfrac{1}{4}\pi\,. \qquad (3)$$

A doua din ecuațiile (2) ne dă:

$$\sin x = 1\,, \qquad \therefore\quad x = k\pi + \tfrac{1}{2}\,\pi\,. \qquad (4)$$

Pentru această valoare însă ecuația (1) se reduce la:

$$(1 + 0)\,(1 - 1)\,(0 + 1)/(1 \times 0) = 0/0\,.$$

Expresiunea ia forma nedeterminată $0/0$ dacă x variază, tinzând către valorile date de (4). Să vedem către ce tinde fracția $(\sin x - 1)/\cos x$ care produce această nedeterminare. Să înmulțim această expresiune cu $(\sin x + 1)$ care nu se anulează pentru valorile (4) ale lui x. Ea devine $[-(\sin^2 x - 1)/\cos x\,(\sin x + 1)]$ sau $[-\cos^2 x/\cos x\,(1 + \sin x)]$ sau $[-\cos x/(1 + \sin x)]$, care devine 0 pentru valorile (4) ale lui x. Deci aceste valori sunt soluții ale problemei.

A treia din ecuațiile (1) ne dă:

$$\cos x = -1\,, \qquad \therefore\quad x = (2k + 1)\,\pi\,. \qquad (5)$$

Pentru aceaste valori ale lui x însă ecuația (1) se reduce la:

$$(0 + 1)\,(0 - 1)\,(-1 + 1)/0 \times (-1) = 0/0\,.$$

Examinând ca mai sus, se găseşte că nedeterminarea vine de la fracţia $[(\cos x + 1)/\sin x)]$ care se poate scrie

$$[2\cos^2 \tfrac{1}{2} x / 2\sin \tfrac{1}{2} x.\ \cos \tfrac{1}{2} x],$$

sau $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} x$, care este 0 pentru valorile (5) ale lui x. Deci şi acele valori sunt admisibile.

Problema admite dar soluţiile (3), (4) şi (5).

Au găsit toate soluţiile, fără însă a cerceta dacă sunt toate admisibile şi D-nii HERMAN VICTOR, NEGOIŢĂ M. V. PANAIT, NICULAE D. ŞTEFĂNESCU, TRAIAN I. CHIŢULESCU, ION D. BOSTANGIU, ALEXANDRU POPESCU ZORICA, TILICĂ C. ŞTEFAN, N. AL. VASILESCU STABU, DUMITRU CĂLIN IOAN, IOSIF BEBE L. RAUCH, ROŞCULEŢ N. MARCEL, GHEORGHE A. RUMICI.

D-l MIRCEA LEONTE, A. NEGREA şi M. GRUMĂZESCU au rezolvat bine problema înlocuind toate funcţiunile trigonometrice prin tangente, fără a cerceta admisibilitatea tutulor soluţiilor.

EXERCIŢII

25. Să se demonstreze identitatea:

$$(\alpha\gamma - \beta^2)^2 + (\alpha\gamma - \delta^2)^2 - (\beta\delta - \alpha^2)^2 - (\beta\delta - \gamma^2)^2 - 2(\alpha\delta - \beta\gamma)(\delta\gamma - \alpha\beta)$$
$$\equiv [(\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2][(\beta + \delta)^2 - (\alpha + \gamma)^2].$$

DIMITRIE MAVRODIN.

R. Considerăm determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \gamma & \delta & \alpha \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ \delta & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

pe care îl desvoltăm după minorii de ordinul al doilea, ai lui LAPLACE, obţinem astfel primul membru al identităţii date. Desvoltăm acum acelaşi determinant în mod analog cu acela din problema 2661, rezolvată în G. M. vol. XLII pag. 94, obţinem membrul al doilea al identităţii. Dealtfel determinantul din problema 2661 nu e decât un caz particular al lui Δ şi anume cazul când: $\alpha = (a + b)^2$, $\beta = (a - b)^2$, $\gamma = a^2 + b^2$, $\delta = a^2 - b^2$. Deci determinantul Δ generalizează pe cel din problema 2661.

26. Să se demonstreze că relaţia care face obiectul problemei 4694 (G. M. XLII pag. 381) se menţine în cazul când A, B, C sunt arce oarecari a căror sumă am convenit să o notăm cu litera π. Generalizare.

MIRCEA ADAM.

R. Fie a, b, c trei arce oarecari a căror sumă o notăm cu k — se stabileşte uşor:

$$\sin a + \sin b + \sin c + \sin k = 4 \sin \frac{k}{2} \Pi \cos \frac{a}{2} - 4 \cos \frac{k}{2} \Pi \sin \frac{a}{2}$$

$$\cos a + \cos b + \cos c + \cos k = 4 \cos \frac{k}{2} \Pi \cos \frac{a}{2} - 4 \sin \frac{k}{2} \Pi \sin \frac{a}{2}$$

relaţii cari înmulţite respectiv cu $\sin\varphi$ şi $\cos\varphi$ — φ fiind un arc oarecare — şi apoi adunate:

$$\sin\varphi \, \Sigma \sin a + \cos\varphi \, \Sigma \cos a + \cos(\varphi - k)$$

$$= 4 \cos\left(\varphi - \frac{k}{2}\right) \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} - 4 \sin\left(\varphi - \frac{k}{2}\right) \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$$

relaţie în care dacă facem

$$a = \frac{A}{10}, \; b = \frac{B}{10}, \; c = \frac{C}{10}, \; k = \frac{\Pi}{10}$$

şi $\varphi = \dfrac{\Pi}{5}$ obţinem relaţia din problema 4694.

27. Fie M un punct oarecare în interiorul triunghiului ABC şi α, β, γ unghiurile făcute de AM, BM, CM respectiv cu AB, BC, CA. Să se demonstreze relaţia:

$$\Sigma \sin(2A - \alpha + \beta + \gamma) = \sin(\alpha + \beta + \gamma) + 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma .$$

MIRCEA ADAM.

R. Folosim relaţia:

$$\sin a + \sin b + \sin c = \sin(a + b + c) + 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{c+a}{2}$$

unde a, b, c, sunt arce oarecari — prima parte a relaţiei devine:

$$\sin(2\Pi + \alpha + \beta + \gamma) + 4 \sin(A + B + \gamma) \sin(B + C + \alpha) \sin(C + A + \beta)$$
$$= \sin(\alpha + \beta + \gamma) + 4 \sin(A - \alpha) \sin(B - \beta) \sin(C - \gamma)$$

astfel că relaţia propusă devine:

$$\sin(A - \alpha) \sin(B - \beta) \sin(C - \gamma) = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

care nu este decât relaţia de condiţie pentru concurenţa cevienelor punctului M.

28. Ω fiind suprafaţa unei elipse de centru O, circumscrisă triunghiului ABC de suprafaţă S, iar α, β, γ unghiurile ce fac între ele razele vectoare OA, OB, OC respectiv, să se demonstreze formula:

$$2\Omega = \Pi S \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cosec}\frac{\beta}{2}\operatorname{cosec}\frac{\gamma}{2}.$$

DIMITRIE MAVRODIN.

R. Fie a şi b lungimea semiaxelor elipsei şi φ_1, φ_2, φ_3 respectiv unghiurile ce le fac razele vectoare OA, OB, OC cu axa mare.

Aria triunghiului ABC este egală cu $\frac{1}{2}\Sigma(x_1 y_2 - x_2 y_1)$, unde x, y sunt coordonatele vârfurilor triunghiului. Însă: $x_i = a\cos\varphi_i$, $y_i = b\sin\varphi_i$, deci: $2S = \Sigma ab(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1) = ab\,\Sigma \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$. Pe de altă parte:

$\varphi_2 - \varphi_1 = \gamma$, $\varphi_3 - \varphi_2 = \alpha$, $\varphi_1 - \varphi_3 = \beta - 2\Pi$, căci $\alpha + \beta + \gamma = 2\Pi$.

Astfel că: $2S = ab\,\Sigma \sin\alpha$, calculând această sumă, găsim:

$$\Sigma \sin\alpha = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}, \text{ deci: } S = 2ab\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \quad (1)$$

Însă: $\Omega = \Pi ab$, şi înlocuind în (1) obţinem formula cerută.

PROBLEME PROPUSE

4819. Se cer numerele de patru cifre *mszu* divizibile prin numerele de două cifre *ms, sz, zu.*

I. IONESCU.

4820. Produsul a două numere a şi b este *864.* Să se afle aceste numere ştiind că în şirul

$$b,\ 2b,\ 3b,\ \ldots\ (a-1)\,b,\ ab$$

se găsesc doisprezece multipli ai numărului a.

P. SERGESCU.

4821. Să se construiască un patrulater căruia i se cunosc două unghiuri, două laturi şi suma celorlalte două laturi.

ULPIU FLORESCU.

4822. Se dau două cercuri ortogonale O şi O_1, care se taie în P şi P_1, şi punctul A pe cercul O_1. Dreapta AP taie cercul O a doua oară în B, iar dreapta BP_1 taie cercul O_1 a doua oară în C.

Când A este mobil pe cercul O_1, care este locul centrului cercului ABC.

LOCOT. I. GH. ZAMFIRESCU.

4823. Prin fiecare din vârfurile unui triunghiu ABC se duce câte o antiparalelă la una din laturile adiacente prin raport cu celelalte două laturi ale triunghiului. Dacă a', b', c' şi a, b, c sunt respectiv lungimile antiparalelelor ce pleacă din vârfurile A, B, C şi lungimile laturilor opuse aceloraşi vârfuri să se arate că avem:

$$a' \cdot b' \cdot c' = a \cdot b \cdot c \quad ; \quad a' b' c' (a' + b' + c') = b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2.$$

IULIAN ALEXIU.

4824. Se ia un punct M pe cercul O circumscris triunghiului ABC. Perpendicularele din M pe laturile triunghiului taie cercul O în A', B', C', iar dreptele MA, MB, MC întâlnesc respectiv pe B'C', C'A', A'B' în punctele A_1, B_1, C_1. Să se arate că:

a) Dreptele AA', BB', CC' sunt concurente într'un punct P de pe dreapta lui SIMSON;

b) Punctele A_1, B_1, C_1 sunt colineare.

M. NĂSTASE.

4825. Fie SABC un tetraedru regulat. Se notează cu (Δ) dreapta dusă prin vârful S perpendiculară pe faţa BCA şi cu M un punct de pe (Δ). Se consideră diferenţa: $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} - \overline{MS}$ şi se cere:

1°. Să se demonstreze că diferenţa este cel puţin egală cu înălţimea tetraedrului, când M descrie dreapta (Δ);

2°. Valoarea diferenţei când M se află şi pe sfera circumscrisă tetraedrului ABC;

3°. Poziţia punctului M, pentru care diferenţa este egală cu muchia a a tetraedrului dat.

GH. DUMITRESCU.

4826. Să se determine relaţii între coeficienţii polinoamelor P şi Q, de grade respectiv mr şi nr în x, astfel încât expresiunea

$$E = \sqrt[m]{P} - \sqrt[n]{Q}$$

să aibă o limită finită şi diferită de *zero* pentru $n = \infty$. Caz particular $r = 1$.

M. GHERMĂNESCU.

4827. Să se arate că:

$$A_m^p A_{n-p-1}^{m-p} + A_m^{p-1} A_{n-p}^{m-p+1} + A_m^{p-2} A_{n-p+1}^{m-p+2} + \ldots$$
$$+ A_m^1 A_{n-2}^{m-1} + A_m^0 A_{n-1}^m = A_n^m - A_m^{p+1} A_{n-p-1}^{m-p-1}$$

în care A este simbolul de aranjări.

ADRIAN BUŞILĂ.

4828. a_1, a_2, a_3, a_4 fiind unghiuri oarecare, există relaţia

$$\frac{(\operatorname{tg}a_1 \operatorname{tg}a_3 + \operatorname{tg}a_2 \operatorname{tg}a_4)^2 + \Sigma \operatorname{tg}a_1 \operatorname{tg}a_2 \operatorname{tg}a_3 (\operatorname{tg}a_1 + \operatorname{tg}a_2 + \operatorname{tg}a_3)}{(\operatorname{tg}a_1 \operatorname{tg}a_3 + \operatorname{tg}a_2 \operatorname{tg}a_4)^2 - \Sigma \operatorname{tg}a_1 \operatorname{tg}a_2 \operatorname{tg}a_3 (\operatorname{tg}a_1 - \operatorname{tg}a_2 + \operatorname{tg}a_3)} =$$
$$\frac{\sin(a_1 + a_2) \sin(a_2 + a_3) \sin(a_3 + a_4) \sin(a_4 + a_1)}{\sin(a_1 - a_2) \sin(a_2 - a_3) \sin(a_3 - a_4) \sin(a_4 - a_1)}.$$

C. IONESCU-BUJOR.

4829. In orice triunghiu există relaţia:

$$\frac{a^2 - 2r_a r}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2} \mp i \operatorname{cotg}\frac{C}{2}} + \frac{b^2 - 2r_b r}{\operatorname{cotg}\frac{C}{2} \mp i \operatorname{cotg}\frac{A}{2}}$$
$$+ \frac{c^2 - 2r_c r}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2} \mp i \operatorname{cotg}\frac{B}{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot p}{r} \sqrt{1 \pm i}$$

notaţiile fiind cele obişnuite, iar $i = \sqrt{-1}$.

GH. VASILIU.

4830. Să se stabilească natura seriilor, care au termenul general

$$u_n = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \quad \text{sau} \quad v_n = \frac{(-1)^n C_{2n}^n}{2^{2n}},$$

C_{2n}^n este numărul combinărilor fără repetiţie a $2n$ obiecte luate câte n.

TH. ANGHELUŢĂ.

ERATĂ. La pag. 446 în enunţul problemei 4796 se înlocueşte α prin a şi $\overline{OI_t}$ prin $\overline{OI_b}$.

In G. M. XLII. pag. 342 rândul 2 se va citi *ordonatele* în loc de coordonatele.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam Mircea (P); *Amărăşteanu F. M.* (4789); *Anastasiu M. Mihail* (4802); *Andreescu M. R.* (4787); *Anicolaesei V. Cl.* (4760); *Anonim* (4802); *Bal Lascu* (4787, 802); *Bivolaru M. Livius* (4760, 75); *Bodnărescu M. H.* (4760); *Cetăţeanu St.* (4727, 87); *Claudian Virgil* (P); *Cocea Gh. Theodor* (P); *Cojocaru P. Petre* (4775); *Constantinescu N. Ioan* (E); *Cornăţeanu A.* (4787); *Crăciun I. I.* (4787); *Florescu L. Victor* (4799, 813, 16); *Gavrilescu N. Const.* (4802); *Goth L. M.* (4787, 802); *Grumăzescu Mircea Subloc.* (4778, 802, 16, P); *Herman V.* (4784, 87); *Ioan A. Ilie* (4773); *Ionescu B. N. Gh.* (4787); *Ionescu D. St.* (4787); *Jareghie V. I.* (4760, 84, 87); *Mamut I. Petre* (4773); *Marcovici E.* (4787); *Martac Radu* (4769, 99, 802); *Mavrodin D-trie* (4816); *Milu I. Nicolae* (4378, 649); *Negoiţă M. V. Panait Locot.* (4815, 16, P); *Negrea A. L. M.* (4796, 802); *Nicolau I. Locot.* (P); *Niculescu Gh. M.* (4748, 60); *Pană Al.* (4760, 84); *Pantelimon V. C.* (4748, 87); *Parepeanu I. Subloc.* (4520, 57, 70); *Petrescu Achile* (4784, 87); *Popa D. M.* (4748, 87); *Popescu Zorica N. Al.* (4588, 97, 725, 51, 68, 87, P); *Popoviciu Gabriel* (4748, 53, 87, P); *Pungă I. Nicolae* (4760, 75); *Rădulescu Gh. O.* (4787); *Rauch B. I.* (4802); *Ripianu D-tru* (4782, 87, 802); *Roşculeţ N. Marcel* (4784, 89, 802, 16); *Rumici A. Gh.* (4787); *Ştefănescu D. Nicolae* (4802, 16); *Stoenescu D. Mirel* (4802); *Streder I.* (4760, 87); *Theodorescu N. Dorin* (4570, 765, 89, 96, 99, 802, 13, P); *Tilică C. Şt.* (4570, 652, 54, 61, 708, 33); *Ţiţeica I. Ilie* (4649, 707, 33, 74, 77, 81, 82, 89); *Tudoran M. Sonia* (4784, 87); *Turcu R. S.* (4787); *Vartic Nicolae* (4775); *Vasilescu-Stabu Al. M.* (4784, 87, 802).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* geometrie, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.

Manuscrisele se vor scrie pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele ***se vor lipi sau coase în partea stângă,*** împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. ***Foile vor avea format de sfert de coală,*** iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN**

C. 44519

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLII

NUMĂRUL 11. — IULIE 1937

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASTRA" SIBIU

SUMARUL

1. Determinarea transformărilor omografice care lasă neschimbată o ecuaţie de gradul al doilea . . *Th. Angheluţă.*
2. Despre rădăcinile comune la mai multe ecuaţii multinome . . . *Tiberiu Popoviciu.*
3. In jurul problemelor 1386—2889 . *Lt. Mihail I. Focşeneanu.*
4. Premiul „Inginer H. Capriel".
5. Note Matematice: 46.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 267.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 4518, 4554, 4555, 4719, 4721, 4739, 4752, 4787, 4799, 4807.
11. Exerciţii: 29 — 30.
12. Probleme propuse: 4831 — 4842.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1937

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer-Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **D. Stan**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijă în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1936 şi nerezolvate sunt enumărate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4724, 26, 31, 34, 42, 49, 61, 70, 72, 80, 83, 94, 97, 98, 801, 03, 04, 05, 06, 07, 09, 10, 12, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	220	260	80
5— 8 „	375	425	100
9—16 „	620	700	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLII. No. 11 *SUPLIMENT* IULIE 1937

RECREAȚIUNI

1. **Aritmetica sportivă.** Profesorul întreabă:
— *Matematicescule*, ia spune-mi cât este:

$$7 : 3$$

— *Matematicescu* răspunde fără ezitare:
— Trebue să-mi spuneți echipele care au jucat, Domnule Profesor.

GH. B.

*

2. **Patrate în persoane și în personalități!** In *Universul Literar* din 26 Septemvrie 1926, la pag. 6 găsim:

„Orice persoană care este alcătuită din mai multe persoane este o persoană la puterea a doua, sau un geniu".

In *„Fenomenul originar"* de D-l *Lucian Blaga* găsesc la pagina 73 următoarele:

„Personalitatea este rasa la puterea a doua".

CORNELIU N. POPESCU
(Giurgiu).

*

3. **Numere prime, cu învârteală!** Următoarele numere prime scrise pe o bucată de hârtie rămân tot numere prime dacă întoarcem hârtia cu 180°:
1, 11, 19, 101, 109, 181, 199, 619, 1019, 1061, 1091, 1109, 1181, 1609, 16669, 1991, 6199, 6689.

I. C. SAVIN.

*

4. **Numărul 14.** Cu toate că acest număr este dublul lui 7 și cu toate că 7 era un număr în mare stimă și considerațiune în vechime, totuși pe 14 îl întâlnim rar prin legende. In Biblie se vorbește de pervazuri de 14 coți în lung și 14 coți în lat; de stâlpi de 14 coți împrejur; de 14 ani sau 14 zile ca durate de timp; de 14 cetăți; de 14 miei de un an; de 14 femei cu câte 3 fiice. Se vorbește și de un pod făcut în 14 zile.

I. I.

*

5. **Socoteala în zicătorile populare.** Tontul nu știe ce este contul.
— Unde a socotelii și a minții raze nu lucesc.
Duhurile puterii puțin procopsesc.
— Unde norocul pizmuiește,
Toată socoteala bună se smintește.

— Cel mai greu lucru din lume este să dai socoteala unui prost.
— Socotelile vechi întreţin duşmănie.
— Socoteala de a casă nu se potriveşte cu cea din târg.
— Socoteala deasă
E frăţie aleasă.

I. I.

*

6. **Jumătăţi neegale.** In „*L'Ecole des femmes*" de *Molière* se definesc în modul următor cele *două jumătăţi* ale căsniciei:

„*Bien qu'on soit deux moitiés de la Société.*
Ces deux moitiés poutant n'ont jamais d'égalité:
L'une est moitié suprême, et l'autre subalterne,
L'une en tout est soumise à l'autre qui gouverne".

Apoi, prin comparaţii cu disciplina militară, supunerea către stăpân, etc. se ajunge la concluzia că jumătatea subalternă trebue să fie tot aşa de supusă... „*pour son mari, son chef, son seigneur et son maître*".

GH. B.

*

7. **Ce este Adunarea?** Este o *Adunătură*, ne spune umoristul N. T. ORĂŞANU, în următoarele versuri:

Adunare însemnează o mare *Adunătură*
De lachei, de slugi plecate, de clăpani, de cască-gură,
Adunaţi din toată ţara, după ce făgădueşc
C'or vota după porunca celor care îi numesc.
Ei s'aleg de stăpânire, de prefecţii şi de zapcii,
Ori de voie, ori prin bâte, ori prin escamatorii.
Pentru plata ostenelii, ţara le plăteşte'n bani
Doi galbeni pe zi de geaba; nu-i destul pentru golani?
Iar guvernul le mai pune şi neamul în slujbuşoare,
Bez că de nu curge, pică şi-alte mai mici trebuşoare".

(Din *Dicţionarul Politic*, 1871).

I. I.

*

8. **Diferitele feluri de echilibru.** Toate exemplele de echilibru se pot vedea într'un singur fenomen şi anume al îmbătării. Se începe cu *echilibrul stabil*, după câtva timp vine cel *indiferent* şi apoi cel *instabil*. La urmă întâlnim *starea de repaus*.

I. FOCA.

*

9. **Stabilitatea morală.** Extragem următoarele dela DIMITRIE CANTEMIR:

„*Din trei picioare ale scăiunaşiului minciunii, unul scoţându-se, în vicleşug răzimătorul fără greş pohârnindu-se, cu bună seamă cu capul în gios se dă*".

I. I.

*

10. **Definiţia matematică a Legii.** Cetim în „*Cetatea Literară*“ din Mai 1926, următoarele:

„*O lege nu este numai un sistem geometric. O lege de administraţie este o funcţiune algebrică*“.

CORNELIU N. POPESCU.

*

11. $+\infty = -\infty$. Avem în adevăr:

$$+\infty = (a/0) = (-a)/(-0) = (-a/0) = -(a/0) = -\infty,$$

c. c. e. d. d.

GH. TH. GHEORGHIU.

*

12. **Sugestii pentru figuri de stil:**

a) O cameră romboidală.

b) Schimbător ca un sinus. GH. B.

*

13. **Matematica în poezia germană.** In poezia „*Der Affe*“ de GELLERT găsim, ca o concluzie morală a fabulei:

„*So kannst du mathematisch schliessen*
Dass Sie nicht das Geringste wissen“.

N. M.

*

14. **Repetarea eclipsei.** Renumitul astronom CASSINI anunţase o eclipsă de soare şi invitase lumea înaltă din Paris ca să vină să le explice fenomenul la Observatorul din Paris, la o anumită oră. Un Marchiz, care vedea că Doamnele dela dânsul se grăbeau să-şi facă toaleta ca să nu întârzie, le spune:

„Nu vă grăbiţi, nu vă fie teamă de întârziere; D-l CASSINI îmi este bun prieten şi sunt sigur că va avea bunăvoinţa să reînceapă experienţa pentru mine“.

I. I.

*

15. **Teoremă literară.** V. BLASCO-IBANEZ abundă în aplicaţiuni literare ale termenilor şi expresiunilor matematice şi ştiinţifice. Iată o teoremă a lui pe care o extrag din *Le voyage d'un romancier autour du monde*:

„*Valoarea timpului este direct proporţională cu spiritul de observaţie*“.

Care o fi unitatea de măsură a spiritului de observaţie, nu se ştie!

GH. B.

*

16. **Critica literară.** Dintr'un ziar (*Le Soleil* 11/IX, 1897):

„*L'action suit deux parallèles qui se coupent à un point déterminé*“.

I. I.

*

17. **Problemă ciclică.** Să ne propunem să demonstrăm neegalitatea: $2p/3 > R$ Inlocuind succesiv avem:

$$(a+b+c)/3R, \quad \therefore \quad (a+b+c)/R > 3, \quad \therefore \quad 2\Sigma \sin \tfrac{1}{2}A > 3,$$

$$\therefore \quad 8 \cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C > 3. \quad \therefore \quad 8\,(p/abc)\,S > 3, \quad \therefore \quad 2p/R > 3, \quad \therefore \quad 2p/3 > R,$$

c. c. e. d. d.

N. M.

*

18. **31 Noemvrie!** Impărţirea anului în luni neegale ne-a rămas moştenire dela strămoşii noştri Romani. Oameni culţi ajung de îmbătrânesc şi nu ştiu câte zile are fiecare lună. Astfel scriitorului GEORGES DUVAL în *Mémoires d'un Parisien* ia scăpat un Noemvrie de 31 zile:

„En 1875, un 31 Novembre, je venais d'accompagner Virgine Déjazet...".

Nu va trece mult şi lumea va scăpa de lunile ca unităţi de timp neegale! In Casele financiare şi industriale din America se introduce din ce în ce mai mult Calendarul raţional cu 13 luni de câte 4 săptămâni şi 1 sau 2 zile suplimentare la finele anului.

I. I.

*

19. **La Bacalaureat.** Câţi termeni are progresia:

$$-a.b.c.\ldots.k.l?$$

— Elevul, după o socoteală minuţioasă pe degete, răspunde: 12.

— Profesorul nedomirit: Şi cum ai făcut calculul?

Elevul, foarte mirat de ignoranţa profesorului în cunoaşterea rezultatului, îi răspunde: „Intre *a* şi *l* sunt 12 litere ale alfabetului"!.

N. MIHĂILEANU.

*

20. **Bietul cosinus!** Generalul X face o inspecţiune la unul din atelierele din Capitală, şi întreabă pe Lt. Y:

— Ei! Cum mai merge uzina?

— Să trăiţi D-le General? Ar merge bine dacă n'ar fi năbădăiosul de cos*a*, ce ne tot încurcă în socoteli.

Cum asta? Faci imediat raport şi-l bagi la închisoare!

A. A. R.

*

21. **Fracţii ireductibile!** La un examen de fine de an, după reforma programelor.

Profesorul. — Iţi dau $\operatorname{tg} x = 3/4$. Să-mi calculezi celelalte linii trigonometrice.

Elevul. — Se ştie că $\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x$; însă Dumneavoastră mi-aţi dat că $\operatorname{tg} x = 3/4$. Deci avem:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4}.$$

Dar fracţia 3/4 fiind ireductibilă, trebue să avem cel puţin $\sin x = 3$, $\cos x = 4$. Celelalte linii se deduc prin inversare şi găsim $\operatorname{cotg} x = 4/3$, $\sec x = 1/4$, $\operatorname{cosec} x = 1/3$.

M. UNGHEANU.

DETERMINAREA TRANSFORMĂRILOR OMOGRAFICE CARE LASĂ NESCHIMBATĂ O ECUAȚIE DE GRADUL AL DOILEA

1. Se observă că ecuația

$$ax^2 + bx + c = 0 , \tag{1}$$

se schimbă în ea însăși prin transformarea

$$x = -\frac{b}{a} - y . \tag{2}$$

De asemenea și transformarea

$$x = \frac{c}{ay} \tag{3}$$

lasă neschimbată ecuația (1). In adevăr transformările (2) și (3) schimbă rădăcinele ecuației (1) între ele, căci sunt relațiile cari ne dau respectiv suma și produsul rădăcinilor ecuației (1).

Ne propunem să generalizăm observația de mai sus căutând transformările omografice

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta} , \tag{4}$$

care transformă ecuația (1) *în ea însăși.*

Pentru aceasta să formăm ecuația în y, înlocuind în ecuația (1) pe x prin valoarea sa dată de egalitatea (4). Se obține astfel ecuația

$$a(\alpha y + \beta)^2 + b(\alpha y + \beta)(\gamma y + \delta) + c(\gamma y + \delta)^2 = 0$$

care ordonată după puterile lui y devine

$$(a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2) y^2 + [2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta] y + a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2 = 0 \tag{5}$$

și deci trebue să determinăm parametrii $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pentru ca ecuațiile (1) și (5) să aibă aceleași rădăcini. Prin urmare $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ satisfac ecuațiile

$$\frac{a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2}{a} = \frac{2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta}{b} = \frac{a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2}{c} . \tag{6}$$

Punând pentru prescurtare

$$2a\alpha + b\gamma = m$$
$$b\alpha + 2c\gamma = n$$
$$\frac{a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2}{a} = k$$

ecuaţiile de mai sus se pot scrie după cum urmează

$$(7) \qquad \begin{cases} a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2 = ck \\ m\beta + n\delta = bk. \end{cases}$$

Aceste ecuaţii ne permit să determinăm pe β şi δ în funcţie de a, b, c, α, γ. Parametrii α, γ rămân deci arbitrari.

Vom presupune în cele ce urmează că discriminantul ecuaţiei (1) este diferit de zero

$$(8) \qquad b^2 - 4ac \neq 0$$

căci altfel problema revine la a găsi transformările (4) cari lasă neschimbată o ecuaţie de gradul întâi, problemă foarte simplă.

Să facem încă observarea că m şi n nu pot fi nuli simultan, adică nu putem avea ecuaţiile

$$2a\alpha + b\gamma = 0$$
$$b\alpha + 2c\gamma = 0.$$

In adevăr din cauza condiţiei (7) aceste ecuaţii ne dau

$$\alpha = 0 \; ; \; \gamma = 0$$

şi deci transformarea (4) nu mai există.

Rezolvând a doua ecuaţie prin raport cu β şi introducând în prima, sistemul (6) devine

$$(9) \qquad \begin{cases} \beta = \dfrac{bk - n\delta}{m} \\ a(bk - n\delta)^2 + bm\delta(bk - n\delta) + cm^2\delta^2 = cm^2 k. \end{cases}$$

Ultima ecuaţie din sistemul (9) ordonată după puterile lui δ devine

$$(10) \qquad (an^2 - bmn + cm^2)\delta^2 + (bm - 2an)kb\delta + (ab^2k - cm^2)k = 0.$$

Ţinând seamă de valorile lui m, n avem

$$an^2 - bmn + cm^2 = a(b\alpha + 2c\gamma)^2 - b(2a\alpha + b\gamma)(b\alpha + 2c\gamma) + c(2a\alpha + b\gamma)^2.$$

Sau ordonând după puterile parametrilor α, γ obţinem

$$an^2 - bmn + cm^2 = (4ac - b^2)(a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2).$$

Inlocuind pe m, n, k prin valorile lor şi punând pentru prescurtare

$$a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2 = l$$

avem

$$(bm - 2an)k = [b(2a\alpha + b\gamma) - 2a(b\alpha + 2c\gamma)]\frac{l}{a} = (b^2 - 4ac)\gamma\frac{l}{a}$$

$$(ab^2 k - cm^2)k = [b^2(a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2) - c(2a\alpha + b\gamma)^2]\frac{l}{a}$$

$$= (b^2 - 4ac)\alpha(a\alpha + b\gamma)\frac{l}{a}.$$

Ecuaţia (10) prin urmare devine

$$(4ac - b^2)\frac{l}{a}[a\delta^2 - b\gamma\delta - (a\alpha + b\gamma)\alpha] = 0.$$

Este imposibil să avem

$$l = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2 = 0$$

sau

$$m\alpha + n\gamma = 0$$

căci din ecuaţiile (6) ar rezulta să avem în acelaşi timp şi ecuaţia

$$m\beta + n\delta = 0.$$

Dar am arătat că m şi n nu pot fi nuli simultan, prin urmare din cele două ecuaţii din urmă rezultă că trebue să avem

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma} = \rho.$$

Dar atunci transformarea (4) căutată devine transformarea identică

$$x = y.$$

Ecuaţia care ne dă pe δ este

$$a\delta^2 - b\gamma\delta - (a\alpha + b\gamma)\alpha = 0 .$$

Această ecuaţie ne dă soluţiile

$$\delta = -\alpha \; ; \; \delta = \frac{a\alpha + b\gamma}{a} .$$

Inlocuind succesiv aceste valori în prima ecuaţie a sistemului (9) obţinem aceste două soluţii pentru β şi δ

$$1^0 \quad \beta = \frac{b\alpha + c\gamma}{a} \qquad \delta = -\alpha$$

$$2^0 \quad \beta = -\frac{c\gamma}{a} \qquad \delta = \frac{a\alpha + b\gamma}{a}$$

parametrii α şi γ rămânând nedeterminaţi.

Prin urmare toate transformările de forma (4), *care lasă neschimbată ecuaţia*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sunt date de următoarele două expresiuni

$$1^0 \quad x = \frac{\alpha y + \frac{1}{a}(b\alpha + c\gamma)}{\gamma y - \alpha} \; ; \quad 2^0 \quad x = \frac{\alpha y - \frac{c\gamma}{a}}{\gamma y + \frac{1}{a}(a\alpha + b\gamma)}$$

în care α *şi* γ *rămân arbitrari* [1]).

Aplicaţii: a) Dacă în 1^0 facem succesiv

$$\alpha = -a \; , \; \gamma = 0$$

$$\alpha = 0 \quad , \; \gamma = a .$$

Se găsesc respectiv transformările (2) şi (3).

b) O altă aplicaţie a acestor formule se găseşte considerând conica

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

şi căutând diametrii conjugaţi egali.

---

1) Se remarcă raţionalitatea transformărilor 1^0 şi 2^0, prin raport cu a, b, c cât şi prin raport cu α şi γ.

Coeficienţii unghiulari a doi diametri conjugaţi sunt legaţi prin relaţia

$$(11) \qquad Cmm' + B(m + m') + A = 0 .$$

Căutând cotangenta unghiului acestor doi diametri se găseşte

$$\frac{-Bm^2 + m(C - A) + B}{Cm^2 + 2Bm + A} .$$

Pentru a găsi pe m corespunzător la doi diametri conjugaţi egali se caută extremele fracţiunii precedente. Se are astfel ecuaţia

$$(12) \qquad (AC - C^2 - 2B^2)\, m^2 - 2B(A + C)\, m + AC - A^2 - 2B^2 = 0$$

care dă direcţiile diametrilor conjugaţi egali. Dacă se aplică acestei ecuaţii transformarea (11) ecuaţia în m' este indentică cu ecuaţia în m. Rezultat evident a priori. Făcând în transformarea 1^0

$$\alpha = -B \ , \ \gamma = C .$$

Se găseşte pentru ecuaţia (12) transformarea (11). In treacăt remarcăm că discriminantul ecuaţiei (11) se poate scrie,

$$(AC - B^2)[4B^2 + (A - C)^2] .$$

Numai în elipsă avem diametrii conjugaţi egali.

— Problema tratată în aceste rânduri este o generalizare a chestiunii următoare: Să se determine substituţia

$$x = \alpha y + \beta v$$

$$u = \gamma y + \delta v$$

pentru ca să avem identitatea

$$x^2 + u^2 \equiv y^2 + v^2$$

oricare ar fi y şi v.

Condiţiile (6) se înlocuiesc prin cele ce urmează

$$a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2 = a$$

$$2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta = b$$

$$a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2 = c$$

şi pentru cazul considerat avem

$$a = c = 1 \ , \ b = o .$$

Ecuaţiile cari determină pe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sunt deci

$$\alpha^2 + \gamma^2 = 1 \, , \, \alpha\beta + \gamma\delta = o \, , \, \beta^2 + \delta^2 = 1$$

se găseşte astfel transformarea bine cunoscută

$$x = y \cos\varphi - v \sin\varphi$$
$$u = y \sin\varphi + v \cos\varphi .$$

Transformarea 1^0 are o proprietate însemnată: *Transformarea inversă a ei*, adică transformarea obţinută scoţând din 1^0 pe y în funcţie de x, *are aceeaşi formă*, căci se găseşte

$$y = \frac{\alpha x + \frac{1}{a}(b\alpha + c\gamma)}{\gamma x - \alpha} .$$

Pe când transformarea inversă a transformării 2^0,

$$(13) \qquad y = \frac{-\frac{1}{a}(a\alpha + b\gamma)x - \frac{c\gamma}{a}}{\gamma x - \alpha}$$

nu mai păstrează aceeaşi expresiune ca 2^0. Dar dacă considerăm o altă transformare de forma 2^0

$$x = \frac{\alpha' y - \frac{c\gamma}{a}}{\gamma' y + \frac{1}{a}(a\alpha' + b\gamma')}$$

şi luăm

$$\alpha' = -\frac{1}{a}(a\alpha + b\gamma) \, , \, \gamma' = \gamma$$

se găseşte

$$-\frac{c\gamma'}{a} = -\frac{c\gamma}{a} \, , \, \frac{1}{a}(a\alpha' + b\gamma') = -\alpha$$

deci transformarea (13). Inversa transformării 2^0 face parte din aceeaşi clasă de transformări. Apoi se mai observă că transformarea 1^0 nu lasă fixe rădăcinile ecuaţiei (1) pe când 2^0 le lasă pe loc.

Vrem să arătăm că putem considera numai transformările de forma 1^0. Cu alte cuvinte transformările de forma 2^0 pot fi formate cu transformări de forma 1^0.

In adevăr ecuației (1) să-i aplicăm succesiv următoarele două transformări de forma 1^0

$$x = \frac{\alpha y + \frac{1}{a}(b\alpha + c\gamma)}{\gamma y - \alpha} \qquad y = \frac{\alpha' u + \frac{1}{a}(b\alpha' + c\gamma')}{\gamma' u - \alpha'}$$

cari echivalează cu următoarea transformare

$$x = \frac{\alpha \dfrac{\alpha' u + \frac{1}{a}(b\alpha' + c\gamma')}{\gamma' u - \alpha'} + \frac{1}{a}(b\alpha + c\gamma)}{\gamma \dfrac{\alpha' u + \frac{1}{a}(b\alpha' + c\gamma')}{\gamma' u - \alpha'} - \alpha}$$

obținută înlocuind pe y prin valoarea sa în funcție de u. Făcând reducerile transformarea devine

$$x = \frac{\left[\alpha\alpha' + \gamma' \frac{1}{a}(b\alpha + \gamma)\right] u - \frac{c}{a}(\alpha'\gamma - \alpha\gamma')}{(\alpha'\gamma - \alpha\gamma')\, u + \left[\alpha\alpha' + \frac{1}{a}(b\alpha' + c\gamma')\right]}.$$

Dacă acum notăm

$$\alpha_1 = \alpha\alpha' + \gamma' \frac{1}{a}(b\alpha + c\gamma), \quad \gamma_2 = \alpha'\gamma - \alpha\gamma'$$

transformarea de sus ia forma 2^0

$$x = \frac{\alpha_1 u - \frac{c\gamma_1}{a}}{\gamma_1 u + \frac{1}{a}(a\alpha_1 + b\gamma_1)}.$$

Prin urmare putem conchide că este destul să considerăm numai transformările 1^0, căci prin două transformări succesive se poate obține și transformările 2^0. [1])

II. Generalizare. In rândurile ce urmează vom generaliza problema tratată în partea întâia a acestui articol.

---

1) Se poate prin acest exemplu elementar introduce noțiunea de grup.

Ne propunem să găsim transformările omografice (4) care schimbă ecuația (1) în ecuația

$$(1') \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

Trebue pentru aceasta ca ecuația (5) să fie aceeași cu ecuația (1') în care în loc de x scriem y. Prin urmare ecuațiile (6) devin

$$\frac{a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2}{a'} = \frac{2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma)}{b'} = \frac{a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2}{c'}$$

sau încă sub forma

$$\begin{cases} a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2 = \dfrac{c'}{a'} l \\ m\beta + n\delta = \dfrac{b'}{a'} l \end{cases}$$

m, n, l având aceleași semnificații ca mai sus. Rezolvind ecuația a doua din acest sistem prin raport cu β și introducând în prima obținem sistemul echivalent

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{\dfrac{b'}{a'} l - n\delta}{m} \\ a\left(\dfrac{b'}{a'} l - n\delta\right)^2 + b\delta m\left(\dfrac{b'}{a'} k - n\delta\right) + cm^2\delta^2 = \dfrac{c'}{a'} m^2 l. \end{cases}$$

Ultima ecuație ordonată prin raport cu δ devine

$$a'^2(an^2 - bmn + cm^2)\delta^2 + a'b'l(bm - 2an)\delta + l(ab'^2 l - a'c'm^2) = 0.$$

Pe de altă parte ținând seamă de notațiile întrebuințate avem

$$h = ab'l - a'c'm^2 = b^2(b'^2 - 4a'c')\alpha^2 + ab(b'^2 - 4a'c')\alpha\gamma + (acb'^2 - a'c'b^2)\gamma^2.$$

Ecuația de mai sus care ne dă pe δ poate fi scrisă

$$a'^2(4ac - b^2)\delta^2 + a'b'(b^2 - 4ac)\gamma\delta + h = 0.$$

Punând

$$b^2 - 4ac = r$$

$$b'^2 - 4a'c' = r'.$$

Se găsește lesne discriminantul acestei ecuații, care este

$$rr'(2a\alpha + b\gamma)^2.$$

Prin urmare valorile lui δ sunt

$$\delta = \frac{b'\gamma\sqrt{r} \mp \sqrt{r'}(b\alpha + 2c\gamma)}{2a'\sqrt{r}}.$$

Se găseşte pentru β valorile

$$\beta = \frac{b'\alpha\sqrt{r} \mp \sqrt{r'}(b\alpha + 2c\gamma)}{2a'\sqrt{r}}.$$

Transformările căutate sunt astfel determinate.

TH. ANGHELUŢĂ.

DESPRE RĂDĂCINILE COMUNE LA MAI MULTE ECUAŢII MULTINOME

1. Să considerăm n ecuaţii algebrice cu $n+1$ termeni de acelaşi fel

$$(1) \quad f_i(x) = p_{i0}x^{m_0} + p_{i1}x^{m_1} + p_{i2}x^{m_2} + \ldots + p_{in}x^{m_n} = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ sunt numere întregi şi pozitive astfel că $1 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots < m_n$. Pentru moment luăm $m_0 = 0$, dar păstrăm notaţia pentru mai multă simetrie.

Fie

$$(2) \quad \begin{matrix} p_{10} & p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n0} & p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{matrix}$$

tabloul coeficienţilor, având n linii şi $n+1$ coloane. Vom nota cu $(-1)^i \delta_i$ determinantul ce se obţine din tabloul (2) suprimând coloana de ordinul $i+1$, adică coloana care conţine elementele $p_{1i}, p_{2i}, \ldots, p_{ni}$. In cele ce urmează vom presupune că $\delta_0 \neq 0$, care este de altfel cazul general. Deasemenea, când va fi vorba

de rădăcini comune ale ecuaţiilor, vom presupune că aceste rădăcini sunt diferite de zero. Lăsăm pe seama cetitorului să facă completările şi modificările ce trebuesc făcute în cazurile contrare.

2. Să ne propunem a calcula determinantul lui WRONSKY sau wronskianul

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & (x) & f_2 & (x) & \ldots & f_n & (x) \\ f_1' & (x) & f_2' & (x) & \ldots & f_n' & (x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-1)}(x) & & f_2^{(n-1)}(x) & & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) & \end{vmatrix}$$

al polinoamelor (1).

E uşor de văzut că acest determinant nu este altceva decât produsul tabloului (2) prin tabloul

$$\begin{matrix} x^{m_0} & x^{m_1} & \ldots & x^{m_n} \\ m_0 x^{m_0-1} & m_1 x^{m_1-1} & \ldots & m_n x^{m_n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

$$m_0(m_0-1)\ldots(m_0-n+2)\,x^{m_0-n+1} \quad m_1(m_1-1)\ldots(m_1-n+2)\,x^{m_1-n+1} \ldots m_n(m_n-1)\ldots(m_n-n+2)\,x^{m_n-n+1}$$

unde fiecare linie e formată de derivatele elementelor din linia precedentă. Vom avea deci, după o formulă cunoscută,

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \delta_i W(x^{m_0}, x^{m_1}, \ldots, x^{m_i-1}, x^{m_i+1}, \ldots, x^{m_n}).$$

Un calcul direct ne arată însă că

$$W(x^{m_0}, x^{m_1}, \ldots, x^{m_i-1}, x^{m_i+1}, \ldots x^{m_n}) = x^{m-m_i-\frac{n(n-1)}{2}} V(m_0, m_1, \ldots, m_{i-1}, m_{i+1}, \ldots, m_n)$$

unde am notat

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$$

şi cu

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_i & \alpha_i^2 & \ldots & \alpha_i^{x-1} \end{vmatrix}$$

determinantul lui VAN DER MONDE al numerelor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Pentru simplificare vom pune

$$V_i = V(m_0, m_1, \ldots, m_{i-1}, m_{i+1}, \ldots, m_n).$$

Avem în definitiv

$$F(x) = W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \delta_i V_i x^{m-m_i - \frac{n(n-1)}{2}}.$$

3. Să presupunem că ecuaţiile (1) au o rădăcină comună $x = x_1$. Inlocuind pe x cu x_1 avem în (1) un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute $x_1^{m_1}, x_1^{m_2}, \ldots, x_1^{m_n}$. Rezolvând acest sistem cu ajutorul regulei lui CRAMER găsim

$$x_1^{m_1} = \frac{\delta_1}{\delta_0}, \quad x_1^{m_2} = \frac{\delta_2}{\delta_0}, \quad \ldots, \quad x_1^{m_n} = \frac{\delta_n}{\delta_0}$$

şi se găseşte deci că:

Condiţia necesară şi suficientă cu ecuaţiile (1) *să aibă o rădăcină comună este ca ecuaţiile binome*

$$(3) \qquad x^{m_1} = \frac{\delta_1}{\delta_0}, \quad x^{m_2} = \frac{\delta_2}{\delta_0}, \quad \ldots, \quad x^{m_n} = \frac{\delta_n}{\delta_0}$$

să aibă o rădăcină comună. Rădăcina comună a ecuaţiilor (1) *este atunci rădăcină comună a ecuaţiilor binome* (3).

Bineînţeles dacă $m_1, m_2, \ldots, m_n$ au un divizor comun diferit de 1 ecuaţiile (3) şi deci şi ecuaţiile (1) au mai multe rădăcini comune. Se vede imediat, ceeace e aproape evident, că numărul rădăcinilor comune este atunci egal cu c. m. m. d. c. al numerelor $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Mai precis ecuaţiile (1) sau nu au nicio rădăcină comună sau au cel puţin atâtea rădăcini comune cât este c. m. m. d. c. al numerelor $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

In general condiţiile ca ecuaţiile (3) să admită o rădăcină comună nu se exprimă sub formă simplă. Dacă însă $m_1 = 1$ rădăcina comună nu poate fi decât

$$\frac{\delta_1}{\delta_0}$$

şi putem deci enunţa proprietatea:

Dacă $m_1 = 1$, *condiția necesară și suficientă ca ecuațiile* (3) *și deci și ecuațiile* (1) *să aibă o rădăcină comună este ca să avem*

$$\delta_1^{m_i} = \delta_i \, \delta_0^{m_i - 1}, \qquad i = 2, 3, \ldots, n.$$

4. In particular, să luăm ecuația

$$(4) \qquad f(x) = p_0 x^{m_0} + p_1 x^{m_1} + \ldots + p_n x^{m_n} = 0$$

unde vom presupune că coeficienții sunt toți diferiți de zero. Să căutăm condiția ca ecuația (4) să admită o rădăcină multiplă de ordinul n. Se vede imediat că dăm peste cazul studiat mai sus luând:

$$f_1(x) = f(x), \; f_2(x) = xf'(x), \; f_3(x) = x^2 f''(x), \ldots, f_n(x) = x^{n-1} f^{(n-1)}(x)$$

care sunt polinoame de aceeași formă.

In acest caz

$$p_{1i} = p_i, \; p_{ki} = m_i (m_i - 1) \ldots (m_i - k + 2) p_i$$

$$i = 0, 1, \ldots, n; \; k = 2, 3, \ldots, n$$

și vom avea

$$\delta_i = (-1)^i \, p_0 p_1 \ldots p_{i-1} p_{i+1} \ldots p_n V_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Putem dar enunța următoarea proprietate:

Condiția necesară și suficientă ca ecuația (4) *să aibă o rădăcină multiplă de ordinul* n *este ca ecuațiile binome*

$$(5) \qquad x^{m_i} = (-1)^i \frac{p_0 V_i}{p_i V_0}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

să aibă o rădăcină comună

In particular putem spune că:

Condiția necesară și suficientă ca ecuația

$$p_0 + p_1 x + p_2 x^{m_2} + \ldots + p_n x^{m_n} = 0$$

să aibă o rădăcină multiplă de ordinul n este ca să avem

$$(-1)^{m_i} p_i \left(\frac{p_0}{V_0}\right)^{m_i - 1} = (-1)^i V_i \left(\frac{p_1}{V_1}\right)^{m_i}, \qquad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Rădăcina comună este în acest caz

$$-\frac{p_0 V_1}{p_1 V_0}.$$

5. Să vedem acum câteva exemple. Condiţia ca două ecuaţii binome să admită o rădăcină comună se exprimă simplu. Pentru ca ecuaţiile

$$x^a = A,\ x^b = B$$

să aibă o rădăcină comună e necesar şi suficient ca

$$A^{\frac{b}{(a,\,b)}} = B^{\frac{a}{(a,\,b)}}$$

unde am notat cu (a, b) c. m. m. d. c. al numerelor a şi b.

Să luăm deci două ecuaţii trinome de aceeaşi formă

$$(6)\qquad \begin{matrix} x^r + px^s + q = 0 \\ x^r + p_1x^s + q_1 = 0 \end{matrix} \qquad r > s \geqslant 1.$$

Avem

$$\delta_0 = p - p_1,\quad \delta_1 = q_1 - q,\quad \delta_2 = p_1 q - pq_1$$

şi condiţia necesară şi suficientă ca ecuaţiile (6) să aibă o rădăcină comună este ca

$$\left(\frac{q_1 - q}{p - p_1}\right)^{r'} = \left(\frac{p_1 q - pq_1}{p - p_1}\right)^{s'}$$

unde $r' = \dfrac{r}{(r, s)}$, $s' = \dfrac{s}{(r, s)}$.

Ca un alt exemplu să luăm ecuaţia cuadrinomă

$$(7)\qquad x^r + ux^s + vx + w = 0,\quad r > s \geqslant 2$$

şi să căutăm condiţiile ca ea să aibă o rădăcină triplă.

In acest caz

$$\delta_0 = (r-1)(s-1)(r-s)uv,\quad \delta_1 = sr(s-r)uw \quad \delta_2 = r(r-1)vw$$
$$\delta_3 = s(1-s)uvw$$

şi condiţia necesară şi suficientă ca ecuaţia (7) să aibă o rădăcină triplă este ca să avem (făcând calculele)

$$(r-s)u\left(\frac{rw}{s-1}\right)^{s-1} = \left(\frac{-(r-1)v}{s}\right)^s$$

$$(r-1)(s-r)w = s\left(\frac{(r-1)(s-1)v}{rs}\right)^r.$$

6. Să revenim la sistemul (1). La Nr. 2 am calculat polinomul $F(x)$, adică wronskianul polinoamelor (1). Să luăm ecuaţia

$$x^{m-\frac{n(n-1)}{2}} F\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \delta_i V_i x^{m_i} = 0.$$

Condiţia necesară şi suficientă ca această ecuaţie să aibă o rădăcină multiplă de ordinul n este dată de rezultatele de la Nr. 4. N'avem decât să punem $p_i = (-1)^i \delta_i V_i$ şi ecuaţiile binome (5) devin

$$x^{m_i} = \frac{\delta_0}{\delta_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Făcând încă odată transformata în $\frac{1}{x}$, vedem că aceste ecuaţii coincid tocmai cu ecuaţiile (3). Avem aşa dar proprietatea următoare:

Condiţia necesară şi suficientă ca ecuaţiile (1) *să aibă o rădăcină comună este ca ecuaţia*

$$F(x) = W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0$$

să aibă o rădăcină multiplă de ordinul n.

7. Inainte de a încheia voim să facem o observaţie asupra polinomului $F(x)$. Să luăm polinomul (4), avem atunci

$$F(x) = W(f, xf', x^2 f'', \ldots, x^{n-1} f^{(n-1)})$$

$$= \sum_{i=j}^{n} p_0 p_1 \ldots p_{i-1} p_{i+1} \ldots p_n V_i^2 x^{m-m_i-\frac{n(n-1)}{2}}$$

care se mai poate scrie şi

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i' x^{m'i}$$

unde

$$p_i' = p_0 p_1 \ldots p_{i-1} p_{i+1} \ldots p_n V_i^2, \quad m_i' = m - m_i - \frac{n(n-1)}{2}$$

$$i = 0, 1, \ldots, n.$$

Vom avea şi

$$F_1(x) = W(F, xF', x^2 F'', \ldots, x^{n-2} F^{(n-1)}) = \sum_{i=0}^{n} p_i'' x^{m''i}$$

unde

$$p_i'' = p_0' p_1' \dots p_{i-1}' p_{i+1}' \dots p_n' V_i'^2, \quad m_i'' = \sum_{i=0}^{n} m_i' - m_i' - \frac{n(n-1)}{2}$$

$$V_i' = V(m_0', m_1', \dots m_{i-1}', m_{i+1}', \dots, m_n').$$

Observăm însă că

$$\sum_{i=0}^{n} m_i' = (n+1)m - \sum_{i=0}^{n} m_i - \frac{n(n-1)(n+1)}{2}$$

$$= nm - \frac{n(n-1)(n+1)}{2}$$

$$m_i'' = (n-1)m + m_i - \frac{n(n-1)(n+1)}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Pe urmă

$$m_i' - m_j' = m_j - m_i$$

deci

$$V_i'^2 = V_i^2, \qquad i = 0, 1, \dots, n.$$

In fine

$$p_0' p_1' \dots p_n' = (p_0 p_1 \dots p_n)^n (V_0 V_1 \dots V_n)^2$$

$$p_i'' = \frac{p_0' p_1' \dots p_n'}{p_i'} V_i^2 = (p_0 p_1 \dots p_n)^{n-1} (V_0 V_1 \dots V_n)^2 p_i$$

$$i = 0, 1, \dots, n$$

şi

$$V_0 V_1 \dots V_n = [V(m_0, m_1, \dots, m_n)]^{n-1}.$$

Avem aşa dar

$$F_1(x) = [p_0 p_1 \dots p_n V^2(m_0, m_1, \dots, m_n)]^{n-1} x^{(n-1)\left(m - \frac{n(n+1)}{2}\right)} f(x)$$

deci:

Dacă luăm un polinom cu n termeni

$$f(x) = p_0 x^{m_0} + p_1 x^{m_1} + p_2 x^{m_2} + \dots + p_n x^{m_n}$$

şi dacă formăm wronskianul

$$F(x) = W(f, xf', x^2 f'', \dots, x^{n-1} f^{(n-1)})$$

obţinem tot un polinom cu n termeni pentru care

$$W(F, xF', x^2 F'', \dots, x^{n-1} F^{(n-1)})$$

$$= [p_0 p_1 \dots p_n V^2(m_0, m_1, \dots, m_n)]^{n-1} x^{(n-1)\left(m - \frac{n(n+1)}{2}\right)} f(x).$$

În particular fie

$$m_0 = 0, m_1 = 1, \ldots, m_n = n, m = \frac{n(n+1)}{2}$$

avem atunci proprietatea:

Fie

$$f(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n$$

un polinom de gradul n (cu toţi coeficienţii diferiţi de zero).

Dacă punem

$$F(x) = W(f, xf', x^2 f'', \ldots, x^{n-1} f^{(n-1)})$$

la rândul său wronskianul

$$W(F, xF', x^2 F'', \ldots, x^{n-1} F^{(n-1)})$$

nu diferă decât printr'un factor constant de $f(x)$.

Această constantă este egală cu

$$[p_0 p_1 \ldots p_n (1!2! \ldots n!)^2]^{n-1}.$$

Observaţie: Se ştie că avem formula

$$W(\varphi f_1, \varphi f_2, \ldots, \varphi f_n) = \varphi^n W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$$ [1])

ceeace ne arată că dacă *n* ecuaţii au o rădăcină comună, wronskianul lor are aceeaşi rădăcină ca rădăcină multiplă de ordinul *n*. Reciproca însă nu este adevărată.

TIBERIU POPOVICIU.

IN JURUL PROBLEMELOR 1386—2889

Reiau chestiunea pusă în aceste probleme, sub diferite aspecte

I°.

Generalizarea cea mai largă a acestor probleme ar fi următoarea:

Fiind date trei curbe plane C_1, Γ, C_2, *să se găsească punctele* M *pe* Γ, *astfel ca tangenta în* M *la* Γ *să tae* C_1 *şi* C_2 *în* M_1 *şi* M_2, *segmentul* $\overline{M_1 M_2}$ *fiind împărţit de* M *într'un raport dat.*

---

1) A se vedea de exemplu POLYA und SZEGÖ „*Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*". Bd. II p. 113.

Soluţia se găseşte, prin intersecţia unor locuri geometrice.

a) Dacă considerăm un punct M_1 pe C_1 şi ducem prin M_1 tangentele de la curba Γ, luând pe MM_1 un punct M'_1 care să împartă acest segment în raportul $\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = k$, locul punctului M'_1 este o curbă C'_1, căreia îi putem determina *normala* şi *tangenta* în M'_1.

In adevăr, considerând centrul de curbură **m** în M, la Γ, iar m_1 şi m'_1 punctele unde normalele în M_1 şi M'_1 tae normala M*m*, avem relaţiunile:

$$d(M_1M) = \overline{mm_1} \cdot d\alpha \quad \text{şi} \quad d(M'_1M) = \overline{mm'_1} \cdot d\alpha$$

cum:

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{M'_1M}} = k \quad \text{rezultă} \quad \frac{d(M_1M)}{d(M'_1M)} = k \quad \text{sau} \quad \frac{\overline{mm_1}}{\overline{mm'_1}} = k.$$

Cunoscându-se m_1 se construeşte imediat m'_1.

Construcţia curbei C'_1 în general întâmpină dificultăţi, nefiind construibilă decât *prin puncte.*

b) In mod analog, dacă considerăm un punct M_2 pe C_2 şi se ia pe tangentele din M_2 la Γ, punctele M'_2 astfel ca raportul $\frac{\overline{M_2M}}{\overline{MM'_2}} = \frac{1}{k}$ locul acestor puncte este o curbă C'_2, care va intersecta pe C_1 în aceleaşi puncte M_1, soluţiile problemei.

II°.

1°. **O a 2-a generalizare,** dar mai restrânsă decât prima ar fi să considerăm curbele C_1 *şi* C_2 *drepte.* Privind problema altfel însă, dăm peste *o nouă soluţie, analitică,* care uneori are aplicaţiuni foarte frumoase.

In prima soluţie, găsim întâi punctele M_1 şi M_2 şi apoi pe M. Aplicând metoda analitică, *vom găsi direct punctele* M.

Să luăm un sistem de axe cu origina în intersecţia dreptelor D_1 şi D_3, faţă de care curba Γ are ecuaţia $f(x, y) = 0$, iar dreptele

$$y = m_1 x \quad \text{şi} \quad y = m_2 x.$$

Ecuaţia tangentei la Γ în M este: $y - y_1 = -\frac{f'_{x_1}}{f'_{y_1}}(x - x_1)$,

iar condiţia ca $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = \frac{\alpha}{\beta}$ (c^t) dă următoarele 2 relaţii între coordonatele (x_1, y_1) ale punctului de contact M.

$$(1) \qquad (\alpha+\beta)x_1 = \alpha\frac{y_1 + x_1\delta'}{m_1 + \delta'} = \beta\frac{y_1 + x_1\delta'}{m_2 + \delta'} \qquad \delta' = \frac{f'_{x_1}}{f'_{y_1}}.$$

$$(2) \qquad (\alpha+\beta)y_1 = \alpha m_1\frac{y_1 + x_1\delta'}{m_1 + \delta'} + \beta m_2\frac{y_1 + x_1\delta'}{m_2 + \delta'}$$

La aceste relaţii se adaugă condiţia $f(x_1, y_1) = 0$ (3).

Cum aceste 3 relaţii sunt satisfăcute de 2 valori, înseamnă că una din ele este consecinţa celorlalte două.

Aşa fiind, pentru găsirea valorilor x_1, y_1, luăm relaţiile (2) şi (3), care vor simplifica chestiunea.

In adevăr dacă alegem ca axă, chiar una din dreptele D_1, D_2, ecuaţia (2) devine:

$$(\alpha+\beta)y = \beta m_2\frac{y + x\delta'}{m_1 + \delta'} \cdot \qquad (2')$$

Care reprezintă *o curbă* C_1 *de grad egal cu curba dată.*

Construcţia s'a redus, la construcţia unei curbe de grad egal cu Γ, care în unele cazuri particulare, se poate face.

2°. *Observaţiuni.* α) Orice schimbare de axe, care menţine una din axe paralelă cu dreptele D_1 şi D_2 ne duce la construcţia unor curbe tot de grad egal cu Γ.

Astfel dacă alegem originea pe dreapta D_2 şi axa Ox paralelă cu D_1, transformarea de coordonate se reduce la

$$x = X \quad \text{şi} \quad y = Y + a.$$

Curba C_1 este în acest caz

$$(\alpha+\beta)y = \alpha a + \beta m_2\frac{x\delta'_1 + y}{m_2 + \delta'_1}$$

în care:

$$\delta'_1 = \delta' + \frac{a}{1!}\cdot\frac{\partial\delta'}{\partial y} + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2\delta'}{\partial y^2} + \ldots + \frac{a^n}{n!}\cdot\frac{\partial^n\delta'}{\partial y^n}: \qquad (4)$$

Se vede că avem de-aface cu o curbă de acelaş grad cu Γ.

β) Metoda aceasta ne dă şi o indicaţie asupra numărului de puncte M.

Punctele M, la intersecţia curbelor [Γ, C_1], vor fi în număr de n^2, dacă considerăm gradul lui Γ, egal cu **n.**

γ) Dacă luăm în considerare ecuaţia (1). Ea reprezintă o curbă de grad $2n-1$, care va avea intersecţiile cu Γ, în punctele căutate de noi, pentru acelaş motiv, că ecuaţia (1) e o consecinţă a ecuaţiilor (2) şi (3).

In unele cazuri, de ex. *conice*, această din urmă cursă e o *cubică* destul de interesantă.

Astfel cubica (1) dela pag. 426, articolul „Două probleme" trece prin punctele O_1, α_1, α_2, A, B, C, D, β' şi are *3 asimtote* distincte, dintre care *2 sunt perpendiculare pe* OY şi *una pe* OX.

Punctele α_1, α_2 sunt intersecţiile cercului (O_1) cu O_1x.

(A se privi figura dela pag. 426).

Această *cubică* are şi alte proprietăţi interesante, care vor face obiectul unei note.

δ) Curba (2) pusă sub forma:

$$[\beta m_2 x - (\alpha+\beta)y]f'_x - \alpha m_2 y f'_y = 0$$

se observă care mai are şi alte proprietăţi.

Una din acestea este că *dacă curba* Γ *are un centru,* atunci C_1 *trece prin acel centru.*

Este clar că dacă $f'_x = f'_y = 0$ atunci $C_1 = 0$.

Se mai vede că *trece şi prin intersecţia dreptelor* (D_1, D_2).

ε) Punctele căutate vor fi la intersecţia curbei (Γ) cu oricare din curbele fascicolului ce are de bază curbele Γ şi C_1.

Acest fascicol de ecuaţie $f(x,y) + \lambda C_1 = 0$ reprezintă *o infinitate de curbe de grad n,* dintre care unele sunt mai remarcabile şi deci în unele cazuri, construibile.

Este mai ales *cazul conicelor.*

III°.

Vreau să aplic observaţia de mai sus la conice şi să dau *o soluţie analitică,* care se reduce la *construcţie de drepte.*

Dacă $C = 0$ şi $C_1 = 0$ sunt ecuaţiile punctuale ale conicei Γ şi ale conicei C_1 definită de ecuaţia (2'), ecuaţia

$$C + \lambda C_1 = 0 \qquad (5)$$

reprezintă *un fascicol punctual de conice,* care trece prin punctele comune conicelor Γ şi C_1, adică prin A, B, C, D.

Ne propunem să găsim *conicele fascicolului, care se reduc la 2 drepte* şi pe acestea să le construim. Vor fi chiar cuplurile de drepte (AB, CD), (AD, BC), (AC, DB).

Dacă Δ şi δ sunt determinanţii clasici ai conicelor (5) condiţia ca aceste conice să se reducă la 2 drepte, este:

$$\Delta(\lambda) = 0$$

ecuaţia de gradul 3 în λ, care *are totdeauna o rădăcină reală.*

Una din aceste rădăcini se poate găsi totdeauna, reducând ecuaţia la forma

$$\lambda^3 + A\lambda + B = 0$$

şi apoi aplicând formula cunoscută.

Cele 3 valori ale lui λ definesc cele 3 cuple de drepte (AB, CD), AD, BC) şi (AC, DB).

In acest caz, conicele (5) se reduc la dreptele

$$X\sqrt{S_1} \pm Y\sqrt{S_2} = 0$$

ce trec prin centrul conicelor (5) şi în care S_1 şi S_2 sunt notaţiunile clasice.

Aceste drepte se construesc foarte uşor. Intersecţia lor cu conica Γ, ne dau punctele căutate.

Aplicaţia la cazul cercului, este un exerciţiu frumos de Algebră, pe care-l recomand corespondenţilor.

IV^0.

O generalizare extinsă numai la *elipsă,* a proplemei 1386 se obţine proectând ortogonal figura dela pag. 426.

In acest caz: cercul (O_1) devine elipsa cu centrul în O_1, raportul în care punctul de tangenţă împarte tangenta rămâne.

Hiperbola (H_1) de ex. trece de asemenea prin β', polul lui OX faţă de elipsă, iar asimtotele sunt definite la fel: Δ, paralela dusă prin N″ mijlocul lui αN (diametrul conjugat direcţiei OY), iar Δ_2 paralelă cu diametrul conjugat direcţiei OX, şi trecând prin N′ astfel că $\overline{O_1N'} = \frac{\overline{O_1N}}{2}$.

La fel se defineşte (H_2), care prin proecţie rămâne tot hiperbolă ca şi (H_1).

Putem deci enunța:

Fiind date *o elipsă și 2 drepte* OX *și* OY, *punctele în care tangenta la elipsă este împărțită de cele 2 drepte în segmente egale, sunt la intersecția elipsei cu 2 hiperbole* (H_1) *și* (H_2) *ce trec respectiv prin polii dreptelor* OX *și* OY *și au câte o asimtotă paralelă cu una din drepte, iar a 2-a paralelă cu diametrul conjugat celeilalte.*

LT. MIHAIL I. FOCȘENEANU
Șc. Sup. Războiu.

PREMIUL „INGINER H. CAPRIEL"

Subiectul propus

Se trage un proectil cu viteza V_0 și unghiul de tragere φ și se obține o bătaie X, rezistența aerului urmând legile cunoscute.

Se cere să se determine o lege pentru rezistența aerului așa ca în fiecare punct de pe traectorie rezistența să rămână constantă, dând astfel putința de a obține totdeauna bătaia X când se trage sub unghiul φ și viteza V_0.

In practică, problema revine la a construi un proectil care să emane la fund și în sens opus mișcării, o vână variabilă de gaz care să mențină rezistența constantă pe tot lungul traectoriei.

G-L GH. BUICLIU, GH. ILIESCU, D. STOICA.

Soluțiile se primesc până la 1 Iulie 1938.

NOTE MATEMATICE

46. *Asupra problemei 3811. Se cer patratele mai mici ca 10.000 ale căror complimente aritmetice sunt tot patrate. Există cuburi în aceste condițiuni?*

Relativ la această chestiune D-l Prof. GH. CONSTANTINESCU ne trimite o notă în care afirmă că soluția dată problemei în *G. M.* anul XXXV, pag. 274 este necompletă, căci sunt soluțiuni omise și inexacte, căci s'a spus că pentru $n = 7$ nu sunt soluțiuni.

In adevăr pentru această valoare a lui n, D-sa scrie:

$$1992^2 + 2456^2 = 10^7.$$

Numerele 1992^2 şi 2456^2 nu sunt însă soluţiuni ale problemei căci sunt mai mari ca 10.000 şi deci afirmaţia D-sale relativ la soluţia dată problemei de mai sus este eronată.

Totuşi D-sa dă o interesantă generalizare a problemei în cazul când nu se mai ţine seama ca patratele căutate să fie mai mici ca 10.000.

Dacă se înseamnă cele două patrate cu x^2 şi y^2 se are:

$$x^2 + y^2 = 10^n.$$

Pentru $n = 1$ avem soluţia cunoscută:

$$3^2 + 1^2 = 10.$$

Se consideră acum *relaţia algebrică.*

$$(1) \quad (pp' \pm qq')^2 + (pq' \mp qp')^2 = (p^2 + q^2)(p'^2 + q'^2)$$

în care dacă se face:

$$p = p' = 3 \quad \text{şi} \quad q = q' = 1$$

se găseşte:

$$8^2 + 6^2 = 10^2$$

şi

$$10^2 + 0^2 = 10^2.$$

Ultima soluţie nu se consideră, pentru că se va arăta la urmă cum se găsesc soluţiile terminate cu zerori.

Se face acum în (1): $p=8$, $p'=3$, $q=6$, $q'=1$ şi se găseşte:

$$18^2 + 26^2 = 10^3.$$

Pentru $n = 4$ se face: $p = 26$, $p' = 3$, $q = 18$, $q' = 1$ şi se găseşte:

$$28^2 + 96^2 = 10^4.$$

Soluţia pentru $n = i + 1$ se găseşte, luând pentru p şi q valorile lui x şi y pentru $n = i$, iar pentru p şi q' numerele 3 şi 1.

Soluţiile multiple de 10 se află în modul următor:

Din soluţia pentru $n = i$, multiplă de zece, înmulţită cu 10, $10^2, \ldots 10^k$ se obţine soluţia multiplă de zece pentru

$$n = i + 2,\ i + 4, \ldots, i + 2k.$$

Conform părţii a doua a problemei ar trebui să avem:

$$x^3 + y^3 = 10^n .$$

Dacă $n = 3p$ avem soluţia: $x = 10^n$, $y = 0$.

In cazul general, dacă d este divizorul comun al numerelor x şi y, vom avea:

$$x'^3 + y'^3 = \frac{10^n}{d^3} \quad (x' \text{ şi } y' \text{ sunt prime între ele}).$$

d trebue să fie de forma $d = 2^\alpha . 5^\beta$ şi avem:

$$(x' + y')(x'^2 - x'y' + y'^2) = 2^{n-\alpha} . 5^{n-\beta}.$$

Numerele x' şi y' fiind prime între ele urmează că: $x' + y'$ şi $x'^2 - x'y' + y'^2 = (x' + y')^2 - 3x'y'$ nu pot avea ca divizor comun decât cel mult pe 3, deci avem:

$$x' + y' = 2^{n-3\alpha} \quad \text{şi} \quad x' + y' = 5^{n-3\beta}$$

$$x'^2 - x'y' + y'^2 = 5^{n-3\beta} \quad \text{şi} \quad x'^2 - x'y' + y'^2 = 2^{n-3\alpha}$$

Din primul sistem avem că:

$$x', y' = 2^{n-3\alpha-1} \pm \sqrt{\frac{5^{n-3\beta} - 2^{2n-6\alpha-2}}{3}}$$

x', y' fiind întregi trebue ca:

$$5^{n-3\beta} - 2^{2n-6\alpha-2} = 3u^2 .$$

Puterile pare ale lui 2 sunt totdeauna de forma $3m + 1$ şi ar trebui prin urmare ca:

$$5^{n-3\beta} = 3m' + 1 \quad \text{sau ca:} \quad n - 3\beta = 2q$$

căci numai puterile pare ale lui 5 sunt de forma $3m' + 1$. Punând acum: $2n - 6\alpha - 2 = 2p$ avem:

$$5^{2q} - 2^{2p} = 3u^2 \quad \text{sau} \quad (5^q - 2^p)(5^q + 2^p) = 3u^2.$$

Numerele 5 şi 2 fiind prime între ele, trebue ca:

$$\begin{cases} 5^q - 2^p = 3v^2 \\ 5^q + 2^p = w^2 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} 5^q - 2^p = v^2 \\ 5^q + 2^p = 3w^2. \end{cases}$$

Din ambele sisteme rezultă că: 5^q este de forma $\frac{1}{2}(3a^2 + b^2)$.

Dacă a şi b nu sunt de aceeaşi paritate $3a^2 + b^2$ nu se împarte cu 2 şi deci nu avem soluţii.

Dacă a şi b sunt ambii pari avem: $5^q = 2(3a'^2 + b'^2)$ relaţie imposibilă.

Dacă $a = 2a' + 1$ şi $b = 2b' + 1$ avem

$5^q = 2(3a'^2 + b'^2 + 3a' + b' + 1)$ iarăşi relaţie imposibilă.

Deci relaţia $x^3 + y^3 = 10^n$ nu poate exista.

In acest mod D-l Prof. GH. CONSTANTINESCU rezolvă partea a doua a problemei 3811.

INGINER O. ORĂNESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

EXAMENUL DE CAPACITATE

Pentru profesori secundari

MATERIE DE LICEU

I. Ce legătură trebue să existe între constantele a şi b, pentru ca valorile maximă y_1 şi maximă y_2 ale funcţiunii

$$y = \frac{x^2 + 2(a - b)x + b^2 - 2ab + 1}{x^2 + 1 - b^2}$$

să satisfacă la condiţia $y_1 + y_2 = 0$. Să se calculeze y_1 şi y_2 şi să se reprezinte variaţia lui y când $b = 5$.

Dacă PQ este o coardă paralelă cu Ox şi M mijlocul ei, între distanţele MM' şi OM' la Ox şi Oy avem

$$MM' = 1 + \frac{24}{5\,M'O}.$$

Ce curbă descrie M?

II. Să se afle relaţia care leagă pe $\cos\omega$ cu $\cos 5\omega$ şi să se compare rezultatul cu relaţia

$$x^5 + px^3 + qx + r = 0,$$

în care se va face, în prealabil, schimbarea $x = \lambda\cos\omega$.

Să se scrie condițiile pentru ca ambele relații să fie echivalente. Se va face aplicație la ecuația

$$32x^5 - 360x^4 + 810x - 243 = 0,$$

a cărei rădăcini se vor calcula cu ajutorul tabelei de logaritmi.

III. Să se găsească valorile lui t în funcție de α, pentru care dreptele

$$\begin{aligned} x + \alpha y + t &= 0 \\ \alpha x + ty + 1 &= 0 \\ tx + y + \alpha &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

sunt concurente. Pentru ce valori ale lui α, valorile lui t sunt toate reale și care sunt acele valori ale lui t? Care sunt dreptele (1) pentru aceste valori ale lui t? Să se arate că trei din ele formează un triunghiu. Să se calculeze laturile, unghiurile și aria triunghiului format de medianele acestui triunghiu.

MATERIE DE UNIVERSITATE

I. Știind că funcțiunea $y_1 = \dfrac{x}{1-x}$ este o soluție a ecuației diferențiale $y'' - \dfrac{2y}{x(1-x)^2} = 0$, să se găsească a doua soluție y_2 și integrala generală a ecuației $y'' - \dfrac{2y}{x(1-x)^2} = \dfrac{1-x}{x} e^{ax}$, unde a este o constantă. Să se arate că numai pentru o singură valoare a lui a integrală generală se exprimă fără nici o cuadratură. Pentru această valoare a constantei a să se determine integrala care se anulează pentru $x = 0$ și $x = 1$.

II. Se consideră curba $r = \dfrac{2a \sin^2\theta}{\cos\theta}$, A punctul unde asimptota ei taie pe Ox, M și M' punctele unde o rază vectoare taie curba și asimptota.

Să se arate că expresiile arc OM — coarda OM și aria curbilinie OAM' MO tind către valori pozitive determinate când M' tinde la infinit, care valori se vor calcula cu două zecimale.

Se cere ecuația cercului bitangent la curbă în punctele P (a, a) și Q $(a, -a)$ precum și aria triunghiului curbiliniu OPQ cu două zecimale.

III. Un punct M_1 descrie dreapta $y_1 = \dfrac{9}{\sqrt{2}}$ după legea $x_1 = -5\sqrt{2}\cos 3t$. Să se determine, în funcție de t, coordonatele x_2 și y_2 a unui punct M_2 de masă 5, din plan, atras către M, de forța $20\,\overline{M_2M_1}$, M_2 plecând din repaus în momentul inițial ($t = 0$), din punctul $\left(4\sqrt{2}, -\dfrac{9}{\sqrt{2}}\right)$. Să se dea ecuația carteziană a traectoriei și să se calculeze volumul născut de bucla închisă prin rotire în jurul lui Oy.

Un punct M' din spațiu se proiectează în fiecare moment în M_1, proiecția vitesei lui pe Oz fiind egală cu suma proiecțiilor acceleraței aceluiași punct M' pe cele trei axe de coordonate. Se cere traectoria lui M'.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina, director E. REBUELTO, Tom. CXXIII, Mai 1937, Fasc. V. Buenos Aires.

Buletinul Societăţii Politehnice din România. Anul LI. Nr. 2. Februarie 1937. Bucureşti.

Idem. Anul LI, Nr. 4. Aprilie 1937.

Buletinul „I. R. E." publicat de Institutul Român de Energie, Anul V, Nr. 1 Martie. 1937. Bucureşti.

Bulletin of the american mathematical society Volum. XLIII, Nr. 5. Mai 1937. Menasha Wisconsin.

Idem. Vol. XLIII. Nr. 6. Iunie 1937. Rolul algebrei întopologie de S. LEFSCHETZ. Cercuri în care | $F(x)$ | are o singularitate ori valori determinate de I. W. CELL. Funcţiuni convexe generalizate de E. F. BECKENBACH. Condiţii suficiente pentru neregularitate în calculul variaţiilor de G. M. EWISIG. Notă asupra noii integrale *Stieltjes* de F. G. DRESSEL. Punct multiplu de ramificaţie asociat cu un sistem linear de primale de T. R. HOLLCROFT. Notă asupra idealelor în Algebrele ciclice de RALPH HULL. Aproximaţie polinomială a unei curbe de gradul patru de D. JACKSON. Analiza generală tensorială de A. D. MICHAL. Teorema lui ENGEL de M. ZORN. Asupra unei integrale a lui BRINK pentru convergenţa seriilor de T. C. RAJAGOPAL. Asupra unei clase de şiruri recurente de H. E. ROBBINS. Notă asupra unei congruenţe ciclice de H. S. VANDIVER. O teoremă asupra unei suprafeţe riglate de M. FOSTER, Notă asupra relaţiei între aproximaţia integrală şi a lui TCHEBYCHEFF la polinomiale în domeniul complex de W. E. SEWELL. Echivalenţa extensiunilor algebrice de R. BAER. Un sistem complet pentru grupul simplu G_{60}^{6} de C. W. STROM.

Deutsche Mathematik, editat de THEODOR VAHLEN. Anul I, caietul 5, Noemvrie 1936. Leipzig. Desvoltarea istorică a teoremelor despre transformarea dreaptă sferă de E. U. WEISS. Teorema închiderii pentru calcularea integralelor de G. KOWALEWSKI. Asupra poligoanelor stelate magice de F. FITTING. Asupra geometriilor finite şi raportul lor cu axiomatică geometriei proiective de M. STECK. O geometrie finită completă a patrulaterelor complete de M. STECK. Asupra ordonării tetraedrale simetrice pe faţa exterioară a sferei ca fundament geometric posibil al complexului organic superior molecular de R. REINICKE. Studii asupra colaborării BOOLE-SCHRÖDER de F. KLEIN-BARMEN. Despre poziţia zerurilor unui polinom cu coeficienţi reali pozitivi de W. SCHULZ. Asupra unităţii construcţiior cu rigla şi cercul de W. WEBER. Teoremă de valoare limită pentru fenomenele înlănţuite din teoria probabilităţilor de G. SCHULZ.

Journal de Mathématiques élémentaires publicat de H. VUIBERT. Anul 61. Nr. 17. 1 Iunie 1937. Paris.

Idem. 15 Iunie 1937. Nr. 18. Asupra unor poligoane inscriptibile de V. THÉBAULT.

Mathesis. Vol. LI. Nr. 4. Aprilie 1937. Asupra unor clase de integrale abeliene de G. G. CONSTANTINESCU. Asupra integralelor eliptice de R. GODEAN. Asupra patrulaterului complet de V. THÉBAULT. Asupra noţiunii de diferenţială în spaţiile vectoriale normate de Y. PISCADOR. Asupra elipselor şi hiperbolelor înscrise unui triunghiu de R. DEAUX.

Pitagora. Anul II. Nr. 8—9. Iunie 1937. Craiova. Impărţirea unui polinom printr'un produs de *n* factori binomiali de primul grad de G. G. CONSTANTINESCU.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVII. Nr. 4. 15 Iunie 1937. Patrate sudate de GH. CONSTANTINESCU.

Revista Ştiinţifică. „V. ADAMACHI". Vol. XXIII. Nr. 1. Ianuarie — Martie. 1937.

Sphinx. Revue mensuelle des questions récréatives. Director M. KRAITCHIK. Anul 7. Nr. 7. Iulie 1937. Bruxelles.

Ştiinţă şi Progres. Anul IV. Nr. 3 — 4. Iunie 1937. Asupra unor proprietăţi ale seriilor cu termeni pozitivi de G. G. CONSTANTINESCU. O chestiune de examen de N. M. Enigma stelelor temporare de G. G. CONSTANTINESCU.

Éléments de géométrie infinitésimale de GASTON JULIA, a doua ediţie; editor GAUTHIER VILLARS. Paris 1936,

Five place tables — logaritmi zecimali. P. NOORDHOFF. Holland.

Problémes d'Agrégation de Y. DOLLON — probleme de matematice speciale, propuse la examenele de Agregaţie dela 1919 la 1936. — Librăria *Vuibert*. Paris 1937.

Tabele pentru calculul fundaţiilor de beton armat ale stâlpilor izolaţi de Ing. D. A. STAN şi Ing. A. TAUBER (extras din Buletinul Soc. Politehnice).

N. BOTEA. *Une relation entre nombres complexes et la généralisation d'un théorème de géométrie élémentaire.* (Extras din *Bulletin de mathématiques et de Physique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique Roi Carol II, de Bucarest*). Bucureşti, 1937.

G. G. CONSTANTINESCU: *Sur certaines classes d'intégrales abéliennes* (extras din Mathesis).

V. VÂLCOVICI. *Asupra caracterului involutiv al ecuaţiilor din mişcarea relativă.* (Extras din *«Omagiu lui Constantin Kiriţescu»*. Bucureşti, 1937.

V. VÂLCOVICI. *Ueber die Wiederstandswerte der Relativbewegung eines starren körpers in einer zähen Flüssigkeit.* Extras din *Zeirschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.*

CERERI

267. In *Buletinul Societății Regale Române de Geografie*, tomul LX, D-l N. ORGHIDAN spune că la Biserica din Dârjiu, clădită la 1622, este desemnat pe unul din turnuri un ceasornic de soare.

Am dori o descriere, cu un desemn, a acelui ceasornic.

I. I.

DIVERSE

Sporirea bibliotecii.

D. A. STAN şi A. TAUBER. Tabele pentru calculul fundaţiilor de beton armat ale stâlpilor izolaţi.

Donată de autori.

Sujets de concours pour l'admission à l'Ecole professionelle supérieure de Postes et Télégraphes. Paris.

Donată de D-l ION IONESCU, Inginer.

Mathematical Association. The Teaching of Algebra and Trigonometry. Raport of the Mathematical Association Comitee. 1910. Londra.

Donată de D-l ION IONESCU, Inginer.

IOSEPH NEUBERG. Cours d'Algèbre supérieure. Paris et Liège. 1907.

DR. PROMPT. Démonstration nouvelle des théorèmes de FERMAT et WILSON.

Donată de ION IONESCU, Inginer.

*

D-l Profesor P. SERGESCU ne aduce la cunoştinţă următoarele:

„Revista *Mathematica* a decis să publice, cu începere de la 1 Ianuarie 1937, la sfârşitul fiecărui volum, *două coale* de *Bibliografia matematică a autorilor români*, în genul lui ZENTRALBLATT sau JAHRBUCH. Sperăm astfel ca, cu timpul, *Mathematica* să joace şi rolul unui fel de archive a scrisului matematic românesc.

„Ne este însă imposibil să urmărim toate publicaţiile matematice ştiinţifice, ca să găsim în ele autorii români. De aceea, vă rugăm mult să ne ajutaţi în munca noastră, binevoind a ne trimite, imediat după apariţie câte un extras al lucrărilor matematice ale D-v., sau cel puţin o indicaţie unde putem găsi articolul. Dacă doriţi puteţi să ne trimiteţi direct şi autoreferatul care va apare fără modificări. Vă mulţumim dinainte.

„Articolele vor fi recensate de un grup, în care şi-au dat adeziunea de a face parte, până azi, D-nii: TH. ANGHELUŢĂ, G. BRATU, N. CIORĂNESCU, D. DRÂMBĂ, G. MIHOC, GR. MOISIL, O. ONICESCU, A. PANTAZI, ILIE POPA, TIB. POPOVICIU, P. SERGESCU, S. STOILOV, N. TEODORESCU, ŞERBAN ŢIŢEICA.

„Adresa Redacţiei Bibliografiei e:

Prof. P. SERGESCU, *Universitatea, Cluj.*

Rugăm a comunica la toţi cunoscuţii D-voastră matematicieni această adresă:".

Felicităm pe D-l P. SERGESCU, pentru această frumoasă iniţiativă de a inventaria producţiunea matematică română de azi înainte şi îi urăm să poată face mai târziu completarea inventarierii şi cu operele matematice de până azi.

I. IONESCU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4518. *Să se verifice identitatea:*

$$\begin{vmatrix} a^2 & ac & b^2 & bd & 0 & 0 \\ ac & c^2 & bd & d^2 & 0 & 0 \\ ab & ad & 0 & 0 & ab & bc \\ bc & cd & 0 & 0 & ad & cd \\ 0 & 0 & a^2 & ac & b^2 & bd \\ 0 & 0 & ac & c^2 & bd & d^2 \end{vmatrix} \equiv -(ad-bc)^6.$$

N. BOTEA.

Soluţie dată de D-l PAUL DOBRESCU. Să considerăm determinantul:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = (ad-bc)^3.$$

Schimbând ordinea coloanelor obţinem

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & d \end{vmatrix} = -(ad-bc)^3.$$

Făcând produsul acestor doi determinanţi, după regula cunoscută, obţinem tocmai determinantul D din enunţ:

$$D = D_1 D_2 = -(ad-bc)^6.$$

Au mai rezolvat problema pe diferite căi D-nii: IOAN BUZINCU, PETRE COJOCARU, AUREL CORNĂŢEANU, VICTOR FLORESCU, CONST. GAVRILESCU, MIRCEA GRUMĂZESCU, MARIN NĂSTASE, M. C. POSTELNICESCU, ALEXANDRU POPESCU ZORICA, AL. STOICA, TUDOR STOICESCU şi ILIE IOAN ŢIŢEICA.

N. B.

PROBLEMA 4554. *x_1 şi x_2 fiind rădăcinile ecuaţiei:*

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

să se formeze ecuaţiunea în y, *care are ca rădăcini*

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}, \quad y_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}.$$

Să se arate că rădăcinile ecuaţiunii formate sunt reale, când rădăcinile ecuaţiunii date sunt reale şi reciproc.

In ce caz avem $y_1 = y_2$?

Să se generalizeze pentru:

$$y_1 = x_1^p + \frac{1}{x_1^p}, \quad y_2 = x_2^p + \frac{1}{x_2^p},$$

rezolvindu-se complect când $p = 2$ şi $p = 3$.

O. N. ŢINO.

Să însemnăm ecuațiunea în y având ca rădăcini $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}$ și $y_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}$ cu:

$$y^2 + Py + Q = 0.$$

Observăm în primul rând că x_1 și x_2 fiind rădăcinile ecuațiunii date:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

numerele $\frac{1}{x_1}$ și $\frac{1}{x_2}$ sunt rădăcinile ecuațiunii transformate:

$$cx^2 + bx + a = 0. \tag{2}$$

Apoi având:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}, \quad x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2},$$

deducem imediat:

$$P = -(x_1 + x_2) - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = -\frac{b}{ac}(a + c) \tag{3}$$

și

$$Q = \left(x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 x_2}\right) + \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{a^2 + c^2}{ac} + \frac{b_2 - 2ac}{a^2} \cdot \frac{a}{c} = \frac{(a-c)^2 + b^2}{ac} \tag{4}.$$

Așa dar, ecuațiunea căutată în y poate fi scrisă sub forma:

$$acy^2 - b(a + c)\, y + [(a - c)^2 + b^2] = 0. \tag{I}$$

Coeficienții a, b, c ai ecuațiunii (1) fiind reali, pentru ca rădăcinile ecuațiunii în y să fie reale, este necesar și suficient să avem îndeplinită condițiunea:

$$P^2 - 4Q = b^2 (a + c)^2 - 4ac [(a - c)^2 + b^2] \geqq 0$$

sau încă sub forma:

$$(b^2 - 4ac)(a - c)^2 \geqq 0. \tag{5}$$

Dacă $a \neq c$, pentru ca rădăcinile ecuațiunii (I) să fie reale este *necesar* și *suficient* să avem $b^2 - 4ac \geqq 0$, adică rădăcinile ecuațiunii date (1) să fie reale. Reciproc, dacă rădăcinile ecuațiunii în y formată sunt reale, a fiind diferit de c, trebue neapărat să

avem $b^2 - 4ac \geqq 0$, adică rădăcinile ecuațiunii în x dată sunt asemenea reale.

In cazul când avem cazul particular $a = c$, adică rădăcinile ecuațiunii date una inversă celeilalte, rădăcinile ecuațiunii în y sunt reale și egale, fără ca să fie necesar ca rădăcinile ecuațiunii date să fie reale.

Prin urmare, *în toate cazurile în care coeficienții ecuațiunii date sunt reali și* $a \neq c$, *dacă rădăcinile ecuațiunii date* (1) *sunt reale rădăcinile ecuațiunii în y formate*, (I), *sunt deasemenea reale și reciproc.*

In cazul în care rădăcinile ecuațiunii date sunt egale, urmează deasemenea că rădăcinile ecuațiunii în y, sunt egale, având $b^2 - 4ac = 0$.

Deasemenea dacă rădăcinile ecuațiunii date sunt una inversa celeilalte, rădăcinile ecuațiunii (I) în y sunt egale. Invers, dacă rădăcinile ecuației (I) în y sunt egale, avem: $b^2 - 4ac = 0$ sau $a = c$, adică rădăcinile ecuației date (1) sunt sau egale, sau una inversa celeilalte. Se vede imediat că această ultimă proprietate ține de forma rădăcinilor y_1 și y_2. Egalitatea $y_1 = y_2$ conduce la ecuațiunea:

$$(x_1 x_2 - 1)(x_1 - x_2) = 0.$$

Pentru generalizarea problemii, observăm că problema se reduce la cazul tratat, dacă vom construi în primul rând ecuațiunea în x, care are ca rădăcină pe x_1^p și x_2^p. Să reprezentăm această ecuațiune prin:

$$x^2 + Sx + R = 0. \tag{6}$$

Avem să calculăm, folosindu-ne de expresiunile lui x_1 și x_2 în funcțiune de coeficienții ecuațiunii date (1) și de relațiunile

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ și } x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

coeficienții:

$$R = x_1^p x_2^p \; ; \; S = -(x_1^p + x_2^p).$$

Deducem imediat:

$$R = \frac{c^p}{a^p}. \tag{7}$$

Pentru calculul lui S, observăm că:

$$2ax_1 = -b + \sqrt{b^2 - 4ac}$$

şi asemenea

$$2ax_2 = -b - \sqrt{b^2 - 4ac};$$

deci vom avea:

$$2^p a^p S = (-1)^{p+1} \left[(b - \sqrt{b^2 - 4ac})^p + (b + \sqrt{b^2 - 4ac})^p\right],$$

sau încă

$$2^{p-1}\, a\, S = (-1)^{p+1}[b^p + C_p^2 b^{p-2}(b^2 - 4ac) + \ldots + C_p^{2i} b^{p-2i}\,(b^2 - 4ac)^i + \ldots].$$

Să presupunem în primul rând p impar, fie $p = 2n+1$, relaţiunea care dă pe S devine:

$$2^{2n} a^{2n+1} S = b^{2n+1} + C_{2n+1}^2 b^{2n-1}(b^2 - 4ac) + \ldots + C_{2n+1}^{2i} b^{2n-2i+1}(b^2 - 4ac)^i + \ldots + C_{2n+1}^{2n} b\,(b^2 - 4ac)^n. \quad (8)$$

Dacă presupunem acum p număr par, fie $p = 2n$, relaţiunea care dă pe S devine:

$$2^{2n-1} a^{2n} S = -[b^{2n} + C_{2n}^2 b^{2n-2}(b^2 - 4ac) + \ldots + C_{2n}^{2i} b^{2n-2i}(b^2 - 4ac)^i + \ldots + C_{2n}^{2n}(b^2 - 4ac)^n]. \quad (9)$$

In cazul când $p = 2$, avem $r = 1$,

deci:

$$2a^2 S = 2(b^2 - 2ac)$$

sau încă:

$$S = -\frac{b^2 - 2ac}{a^2}, \quad R = \frac{c^2}{a^2},$$

iar ecuaţiunea (6) devine:

$$a^2 x^2 - (b^2 - 2ac)\, x + c^2 = 0. \quad (10)$$

In cazul când $p = 3$, avem deasemenea:

$$R = \frac{c^3}{a^3}, \quad S = \frac{b^3 + 3b(b^2 - 4ac)}{2^2 a^3}$$

sau încă:

$$R = \frac{c^3}{a^3}, \quad S = \frac{b(b^2 - 3ac)}{a^3},$$

deci ecuaţiunea (6) devine:

$$a^3x^2 + b\,(b^2 - 3ac)\,x + c^3 = 0. \qquad (11)$$

Ecuaţiunea (I) în y, corespunzătoare ecuaţiunilor (10) şi (11) sunt respectiv:

$$a^2c^2y^2 + (b^2 - 2ac)\,(a^2 + c^2)\,y + [(a^2 - c^2)^2 + (b^2 - 2ac)^2] = 0 \quad (I_{10})$$

şi

$$a^3c^3y^2 - b\,(b^2 - 3ac)\,(a^3 + c^3)\,y + [(a^3 - c^3)^2 + b^2\,(b^2 - 3ac)^2] = 0 \quad (I_{11}).$$

In cazul ecuaţiunii (I_{10}) calculul lui $S^2 - 4R$ dă imediat:

$$S^2 - 4R = b^2\,(a^2 - c^2)^2\,(b^2 - 4ac). \qquad (12)$$

Dacă a, b, c sunt numere reale, $b \neq 0$ şi $a^2 \neq c^2$, rădăcinile ecuaţiunii (I_{10}) în y sunt reale dacă avem (necesar şi suficient) condiţiunea $b^2 - 4ac \geqq 0$, adică dacă rădăcinile ecuaţiunii (1) dată sunt reale. Reciproc, dacă rădăcinile ecuaţiunii (I_{10}) sunt reale, în acest caz, având

$$b^2\,(a^2 - c^2)^2\,(b^2 - 4ac) \geqq 0 \quad \text{şi} \quad b \neq 0,\ a^2 \neq c^2,$$

rezultă că $b^2 - 4ac \geqq 0$, adică că rădăcinile ecuaţiunii date sunt deasemenea reale.

Dacă $b = 0$, sau $a = \pm c$, sau în fine $b^2 - 4ac = 0$, rădăcinile ecuaţiunii (I_{10}) sunt egale, lucru care rezultă şi din $y_1 = y_2$, care conduce la ecuaţiunile:

$$x_1 + x_2 = 0\ (b = 0);\ x_1 - x_2 = 0\ (b_2 - 4ac = 0);\ x_1x_2 = \pm 1\ (a = \pm c).$$

Se deduce de aci că rădăcinile ecuaţiunii în y, considerată mai sus, pot fi reale şi egale şi în cazul când rădăcinile ecuaţiunii date (1) nu sunt nici egale, nici reale ($a = \pm c$; $b = 0$).

In cazul ecuaţiunii (I_{11}) calculând pe $S^2 - 4R$ găsim:

$$S^2 - 4R \equiv b^2\,(b^2 - 3ac)^2\,(a^3 + c^3)^2 - 4a^3c^3\,[(a^3 - c^3)^2 + b^2\,(b^2 - 3ac)^2]$$
$$= (a^3 - c^3)^2\,(b^2 - ac)^2\,(b^2 - 4ac).$$

Aşa dar, a, b, c fiind reali, $a \neq c$ şi $b^2 - ac \neq 0$, rădăcinile ecuaţiunii (I_{11}) în y sunt reale dacă $b^2 - 4ac \geqq 0$, adică dacă rădăcinile x_1 şi x_2 ale ecuaţiunii date sunt reale, şi *reciproc*.

In cazul când $a = c$, sau $b^2 = ac$, sau $b^2 - 4ac = 0$ rădăcinile ecuațiunii (I_{11}) sunt reale egale; ceeace se putea obține direct scriind că:

$$y_1 = y^2, \text{ sau } (x_1^3 x_2^3 - 1)(x_1^3 - x_2^3) = 0,$$

sau încă:

$$(c - a)(c^2 + ac + a^2)(b^2 - ac)\sqrt{b^2 - 4ac} = 0,$$

dar a și c sunt reali, deci $a^2 + ac + c^2 \neq 0$, deci avem $y_1 = y_2$ dacă:

$$(c - a)(b^2 - ac)(b^2 - 4ac) = 0,$$

adică:

$$c = a, \quad b^2 = ac \quad , b^2 = 4ac = 0,$$

adică pe lângă cazul în care ecuațiunea dată (1) are rădăcini egale; mai sunt cazurile $a = c$ adică o rădăcină este inversa celeilalte (nu necesar rădăcini reale, pot fi și imaginare bine înțeles de modul unu) și $b^2 = ac$, când rădăcinile ecuației date (1) sunt imaginare. Așa dar, *în cazul rădăcinilor egale ecuațiunea* (I_{11}) *în y poate avea rădăcini reale (egale), chiar dacă rădăcinile ecuațiunii date* (1) *în x sunt imaginare (pentru* $a = c$, *sau* $b^2 = ac$*).*

In cazul general al ecuațiunii în y, avem:

$$S^2 - 4R = 4a^2 (y_1 - y_2)^2 = 4a^2 \left[\left(x_1^p + \frac{1}{x^p}\right) - \left(x_2^p + \frac{1}{x_2^p}\right)\right]^2$$

$$= \frac{4a^2 (c^p - a^p)^2}{2^{2p} a^{2p} c^{2p}} \cdot 2^{2p} a^{2p} [x_1^p - x_2^p]^2;$$

iar

$$2^{2p} a^{2p} [x_1^p - x^p]^2 = [(b + \sqrt{b^2 - 4ac})^p - (b - \sqrt{b^2 - 4ac})^p]^2$$

sau încă:

$$2^{2p} a^{2p} [x_1^p - x_2^p]^2 = 4 (b^2 - 4ac) [C_p^1 b^{p-1} + C_p^3 C^{p-3} (b^2 - 4ac) + \ldots$$

$$+ C_p^{2i+1} b^{p-2i-1} (b^2 - 4ac)^i + \ldots]^2$$

Dacă $p = 2n + 1$, avem:

$$2^{4n} a^{4n+2} [x_1^{2n+1} - x_2^{2n+1}]^2 = [b^2 - 4ac]$$

$$[C_{2n+1}^1 b^{2n} + C_{2n+1}^3 b^{2n-} (b^2 - 4ac) + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1} (b^2 - 4ac)^n]^2.$$

Dacă $p = 2n$, avem:

$$2^{4n-2}a^{4n}\left[x_1^{2n} - x_2^{2n}\right]^2 = b^2 - 4ac)$$

$$\left[C_{2n}^1 b^{2n-1} + C_{2n}^3 b^{2n-3}(b^2 - 4ac) + \ldots + C_{2n}^{2n-1} b\,(b^2 - 4ac)^{n-1}\right]^2$$

$$= b^2(b^2 - 4ac)\left[C_{2n}^1 b^{2n-2} + C_{2n}^3 b^{2n-4}(b^2 - 4ac) + \ldots\right.$$

$$\left. + C_{2n}^{2n-1}(b^2 - 4ac)^{n-1}\right]^2.$$

In primul caz, realitatea rădăcinilor în y depinde de semnul lui:

$$\delta = (c^{2n+1} - a^{2n+1})^2 (b^2 - 4ac)\left[C_{2n+1}^1 b^{2n} + C_{2n+1}^3 b^{2n-2}(b^2 - 4ac) + \ldots\right.$$

$$\left. + C_{2n+1}^{2n+1}(b^2 - 4ac)^n\right]^2,$$

iar în al doilea caz, de semnul lui:

$$\delta = (c^{2n} - a^{2n})^2 b^2 (b^2 - 4ac)\left[C_{2n}^1 b^{2n-2} + C^3{}_n b^{2n-4}(b^2 - 4ac) + \ldots\right.$$

$$\left. = C_{2n}^{2n-1}(b^2 - 4ac)^{n-1}\right]^2;$$

prin urmare dacă δ nu este *nul*, adică dacă y_1 nu este egal cu y_2, rădăcinile ecuațiunii în y sunt reale dacă rădăcinile ecuațiunii date (1) în x sunt reale și reciproc.

Rădăcinile ecuațiunii în y sunt egale și în afară de cazul când $x_1 = x_2$ $(b^2 - 4ac = 0)$ și anume: Dacă $p = 2n + 1$, și pentru $a = c$, adică când rădăcinile ecuațiunii în x dată sunt *una* inversa celeilalte (nu necesar reale), sau încă când relațiuni reale între b^2 și ac, care fac factorul lui δ nul.

De exemplu, în cazul $p = 5$, avem încă $y_1 = y_2$, dacă avem relațiunile:

$$b^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} ac \text{ , sau } b^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} ac$$

(rădăcinile ecuațiunii în x fiind în ambele cazuri imaginare).

In cazul când $p = 2n$, rădăcinile ecuațiunii în y sunt egale și în afară de cazul $x_1 = x_2$ $(b^2 - 4ac = 0)$ și anume: dacă $a = \pm c$ (căci a și c fiind reali $a^{2n} - c^{2n} = 0$ nu dă pentru $\frac{c}{a}$ rădăcini reale în afară de ± 1), adică când o rădăcină a ecuației în x este una inversa celeilalte (nu necesar reale), sau când *una* este numărul contrar inversei celeilalte; sau în cazul când $b = 0$ (adică când patratele rădăcinilor ecuațiunii date în x sunt egale, deci rădăcinile

x_1 şi y_2 nu sunt necesar reale), şi în fine când între b^2 şi ac este o relaţie care face *nul* al treilea factor al lui δ. De exemplu, pentru $p = 4$, dacă $b^2 = 2ac$ avem $y_1 = y_2$, rădăcinile ecuaţiunii date în x fiind imaginare.

Observare. In cazul când $b = 0$ şi $a = 0$, cele două rădăcini ale ecuaţiunii date sunt infinite şi avem acelaş lucru pentru rădăcinile y_1 şi y_2. In cazul când b şi c devin *nuli*, ambele rădăcini ale ecuaţiunii în y sunt infinite. Cazuri în care problema nu prezintă interes. In cazul când c devine *nul*, a şi b rămânând diferiţi de zero, una din rădăcinile ecuaţiunii în y este infinită şi ecuaţiunea în y se reduce la ecuaţiunea $y - y_2 = 0$ de gradul I. Acelaş lucru se petrece dacă a devine nul, b şi c rămânând diferiţi de zero.

Au dat soluţiuni foarte bune Domnii: AURELIAN CĂLINESCU (Roşiori de Vede) şi DIMITRIE MAVRODIN (Student Bucureşti).

Au mai rezolvat problema şi Domnii: NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU, VICTOR L. FLORESCU (Lic. Mil. «N. Filipescu» Târgovişte); PARAPEANU C. I. (S-Lt. din Geniu).

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4555. *Să se rezolve ecuaţiunea:*

$$\sin x + \cos 2x - \cos x \operatorname{tg} 3x = 0.$$

IULIU DEAC.

Soluţie dată de D-nii: MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila), VILHELM CSEKE (student, Cluj) şi M. F. AMĂRĂŞTEANU (Lic. Fr. Buzeşti, Craiova).

Ţinând seamă de formulele:

$$\sin 3x = \sin x (3 - 4\sin^2 x) \quad \text{şi} \quad \cos 3x = \cos x (1 - 4\sin^2 x)$$

ecuaţia dată se poate scrie:

$$\sin x + 1 - 2\sin^2 x - \cos x \frac{\sin x (3 - 4\sin^2 x)}{\cos x (1 - 4\sin^2 x)} = 0$$

sau:

$$(\sin x + 1 - 2\sin^2 x)(1 - 4\sin^2 x) - \sin x (3 - 4\sin^2 x) = 0$$

căci rădăcinile numitorului $(1 - 4\sin^2 x)$ sunt străine ecuaţiei date.

Dacă punem $y = \sin x$ şi facem calculele găsim:

$$(1) \qquad 8y^4 - 6y^2 - 2y + 1 = 0$$

ecuaţie de gradul IV din care nu reţinem decât rădăcinile cuprinse între -1 şi $+1$.

Egalând derivata cu zero obţinem ecuaţia:

$$16y^3 - 6y - 1 = 0$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$y_1 = -\frac{1}{2}; \; y_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}; \; y_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}.$$

Formăm şirul lui ROLLE în intervalul $(-1, +1)$:

y	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1-\sqrt{3}}{4}$		$\frac{1+\sqrt{3}}{4}$		$+1$
$f(y)$		$+$		$+$		$+$		$-$		$+$

din care se observă că ecuaţia în y are două rădăcini reale cuprinse între $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4} \cong -0{,}18; \; \frac{1+\sqrt{3}}{4} \cong 0{,}68\right)$ şi $(0{,}68; \; 1)$.

Prin încercări putem restrânge intervalele de mai sus şi anume prima rădăcină este în intervalul $(0{,}2; \; 0{,}3)$, iar a doua în intervalul $(0{,}9; \; 1)$.

Pentru calculul lor aplicăm metoda părţilor proporţionale.

Avem:

$$f(0{,}2) = 0{,}3728 \; ; \; f(0{,}3) = -0{,}0752$$

$$\therefore \; h_1 = \frac{0{,}1 \times 0{,}3728}{0{,}448} = 0{,}08$$

$$f(0{,}28) = 0{,}01877248 \; ; \; f(0{,}29) = -0{,}02801752$$

$$\therefore \; h_2 = \frac{0{,}01 \times 0{,}01877248}{0{,}04679} = 0{,}004.$$

Deci o rădăcină este $y = 0{,}284$ având trei zecimale exacte. De aci găsim:

$$\log \sin x = \bar{1}, \, 45332 \; ; \; x = 16^\circ 29' 57''.$$

Arcele ce satisfac ecuaţia propusă sunt:

$$(2)\qquad \begin{cases} x = k \times 360^0 + 16^0 29' 57'' \\ x = (2k+1)\,180^0 - 16^0 29' 57''. \end{cases}$$

Pentru a doua rădăcină:

$$f(0{,}9) = -0{,}4112\ ;\ f(1) = 1$$

$$\therefore\ h_1 = \frac{0{,}1 \times 0{,}4112}{1{,}4112} = 0{,}03$$

$$f(0{,}93) = -0{,}06498392\ ;\ f(0{,}94) = 0{,}06439168$$

$$\therefore\ h_2 = \frac{0{,}01 \times 0{,}06498392}{0{,}1293756} = 0{,}005.$$

Rădăcina cu trei zecimale este $y = 0{,}935$. De aci:

$$\log \sin x = \bar{1}{,}97081\ ;\ x = 69^0\,13'\,36''.$$

Cele două serii de arce corespunzătoare sunt:

$$(3)\qquad \begin{cases} x = 2k \times 180^0 + 69^0 13'36'' \\ x = (2k+1)\,180^0 - 69^0 13'36''. \end{cases}$$

Rădăcinile ecuaţiei propuse sunt cele patru serii de arce date de (2) şi (3).

Observaţie. D-l M. NEGREA a calculat exact arcele date de (2); pentru a doua rădăcină nu a mai calculat pe h_2, de unde rezultă o diferenţă între arcele date de D-sa şi cele din (3). D-l V. CSEKE a calculat exact pe h_1 şi h_2 pentru ambele rădăcini, dar întrebuinţează tablele naturale ale liniilor trigonometrice, ceeace duce la arce puţin diferite de cele de mai sus. D-l M. AMĂRĂŞTEANU nu calculează decât pe h_1, din care cauză rezultatele sunt şi mai diferenţiate de cele din (2) şi (3).

G. D. S.

PROBLEMA 4719. a, b, c *şi* A, B, C *fiind laturile şi unghiurile unui triunghiu, iar* φ *un unghiu arbitrar, să se verifice relaţiile:*

$$a^2 \cos 2\varphi + b^2 \cos 2(C+\varphi) + c^2 \cos 2(B-\varphi) + 2bc \cos(B - C - 2\varphi)$$
$$- 2ab \cos(C + 2\varphi) - 2ca \cos(B - 2\varphi) = 0$$

$$a^2 \sin 2\varphi + b^2 \sin 2(C+\varphi) - c^2 \sin 2(B-\varphi) - 2bc \sin(B - C - 2\varphi)$$
$$- 2ab \sin(C + 2\varphi) + 2ca \sin(B - 2\varphi) = 0.$$

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţia 1° dată de D-nii: VIRGIL ECKSTEIN, VICTOR FLORESCU (cl. VI. liceul militar „N. Filipescu"), CONST. N. GAVRILESCU (Şc. preg. ofiţeri Bucureşti), SUB-LT MIRCEA GRUMĂZESCU, SUB-LT I. C. PAREPEANU şi TILICĂ C. ŞTEFAN (cl. VII-a, Liceul „Traian" Turnu-Severin).

Scriem relaţiile sub forma:

$$E_1 \cos 2\varphi + E_2 \sin 2\varphi = 0 \ , \ E_1 \sin 2\varphi - E_2 \cos 2\varphi = 0$$

cum determinantul sistemului omogen în E, este -1, deci diferit de zero, oricine ar fi φ, E_1 şi E_2 trebue să fie ambii nuli, pentru ca relaţiile să existe. Vom cerceta deci pe E_1 şi E_2 pe care îi vom transforma succesiv, ţinând seamă de relaţiile

$$a = b\ \cos C + c\ \cos B, \quad b\ \sin C = c\ \sin B$$

valabile într'un triunghiu. Anume:

$$E_1 = a^2 + b^2 \cos 2C + c^2 \cos 2B + 2bc \cos(B - C) - 2ab \cos C - 2ca \cos B$$

$$= a^2 - 2a(b \cos C + a \cos B) + \ldots = -a^2 + \ldots$$

$$= -b^2 - c^2 - 2bc \cos A + \ldots$$

$$= -b^2(1 - \cos 2C) - c^2(1 - \cos 2B) - 2bc[\cos A - \cos(B - C)] =$$

$$-2b^2 \sin^2 C - 2c^2 \sin^2 B + 4bc \sin B \sin C =$$

$$-2b^2 \sin^2 C - 2b^2 \sin^2 C + 4b^2 \sin^2 C = 0.$$

$$E_2 = -b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B + 2bc \sin(B - C) + 2ab \sin C - 2ca \sin B$$

$$= 2b \sin C\,(a - b \cos C) - 2c \sin B\,(a - c \cos B) + \ldots$$

$$= 2bc \cos B \sin C - 2bc \sin B \cos C + \ldots$$

$$= -2bc \sin(B - C) + 2bc \sin(B - C) = 0.$$

c. c. t. d.

Observaţie făcută de D-l ADOLF M. DEUTSCH:

$$E_1 = (a - b \cos C - c \cos B)^2 - (b \sin C - c \sin B)^2$$

$$E_2 = 2(a - b \cos C - c \cos B)(b \sin C - c \sin B)$$

deci E_1 şi E_2 sunt nuli.

Soluția 2° dată de D-l M. F. AMĂRĂȘTEANU (elev inginer, București). Plecăm dela relația

$$a\cos\varphi - b\cos(C+\varphi) - c\cos(B-\varphi) = 0$$

(adevărată căci se poate scrie și sub forma

$$\cos\varphi(a - b\cos C - c\cos B) + \sin\varphi(b\sin C - c\sin B) = 0),$$

pe care o ridicăm la patrat și obținem

$$a^2\cos^2\varphi + b^2\cos^2(C+\varphi) + c^2\cos^2(B-\varphi)$$
$$-2ab\cos\varphi\cos(C+\varphi) - 2ac\cos\varphi\cos(B-\varphi) + 2bc\cos(C+\varphi)\cos(B-\varphi) = 0$$

înmulțim cu 2 și înlocuim

$$2\cos^2\varphi = 1 + \cos 2\varphi,\quad 2\cos\varphi\cos(C-\varphi) = \cos(C+2\varphi) + \cos C$$
$$2\cos(C+\varphi)\cos(B-\varphi) = \cos(B+C) + \cos(B-C-2\varphi)$$
$$2\cos(B-\varphi)\cos\varphi = \cos B + \cos(B-2\varphi)$$

și observăm că

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos A - 2ca\cos B - 2ab\cos C$$
$$= a^2 + a^2 - 2a(b\cos C + c\cos B) = 2a^2 - 2a^2 = 0$$

și obținem prima relație.

Procedând analog cu relația

$$a\sin\varphi - b\sin(C+\varphi) + c\sin(B-\varphi) = 0$$

se obține și partea a doua a problemei.

Soluția 3° dată de D-l MIRCEA A. NEGREA (Brăila). In R. M. T. (XVI, pag. 31) se arată că dacă o dreaptă face cu laturile unui triunghiu ABC, unghiurile α, β, γ avem relația

$$ae^{i(\alpha+\varphi)} + be^{i(\beta+\varphi)} + ce^{i(\gamma+\varphi)} = 0, \qquad \varphi \text{ fiind arbitrar.}$$

Ridicând la patrat:

$$a^2e^{2i(\alpha+\varphi)} + \ldots + 2bce^{i(\beta+\gamma+2\varphi)} + \ldots = 0$$

și separând părțile reale și imaginare:

$$a^2\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}2(\alpha+\varphi) + \ldots + 2bc\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\beta+\gamma+2\varphi) + \ldots = 0.$$

In particular pentru $\alpha = \pi$, $\beta = C$, $\gamma = -B$ se obține tocmai relațiile de demonstrat.

Soluția 4° dată de D-nii: DORIN N. THEODORESCU (cl. V-a), RADU V. APOSTOL, BENONE PETRESCU și NICOLAE D. ȘTEFĂNESCU (cl. VII-a, liceul militar „N. Filipescu" Mănăstirea Dealu). Plecăm dela relațiile

(1) $a^2 \cos 2\varphi = b^2 \cos 2(C - \varphi) + c^2 \cos 2(B + \varphi) + 2bc \cos(B - C + 2\varphi)$

(2) $a^2 \sin 2\varphi = -b^2 \sin 2(C - \varphi) + c^2 \sin 2(B + \varphi) + 2bc \sin(B - C + 2\varphi)$

(3) $a \cos\varphi = b \cos(C - \varphi) + c \cos(B + \varphi)$

(4) $a \sin\varphi = -b \sin(C - \varphi) + c \sin(B + \varphi)$

[R. M. T. XVI: pag. 31 sau 89].

Schimbând φ cu $-\varphi$, multiplicând relația (3) cu $2a$ și adunând cu (1) se obține prima relație a problemei. Procedând analog cu (2) și (4) se obține relația a doua.

O a *5-a soluție* o dă D-l RADU I. CIURESCU (cl. VII. Colegiul Național Sf. Sava București) înlocuind în E_1 și E_2 din soluția 1°, liniile trigonometrice ale unghiurilor în funcție de laturi.

Observare: Din prima relație, se obține a doua, schimbând pe φ în $\frac{\pi}{4} - \varphi$ (M. AMĂRĂȘTEANU, R. APOSTOL, V. FLORESCU) sau prin derivare în raport cu φ. (R. CIURESCU, V. ECKSTEIN).

PROBLEMA 4721. 1°. *Se dă o conică* (C) *tangentă în origine la axa* Ox. *Se consideră pe conica* (C) *punctele variabile* M_1 *și* M_2 *astfel ca dreptele* OM_1 *și* OM_2 *să fie egal înclinate pe normala în* O *la conica* (C).

2°. *Să se arate că dreapta* M_1M_2 *taie tangenta în* O *într'un punct fix* T, *care este polul normalei în* O *în raport cu conica* (C).

3°. *Să se arate că, dacă* M_1 *și* M_2 *tind către* O, *dreapta ce unește* O *cu mijlocul lui* M_1M_2 *are o poziție determinată* (D) *și să se afle ecuația dreptei* (D).

4°. *Să se arate că mijlocul dreptei* M_1M_2 *descrie o conică* (C'), *care trece prin* T, *prin centrul* C *al conicei* (C), *care este tangentă la* (D) *în* O, *normală în* T *la* TO, *cu centrul* C' *în mijlocul lui* TC.

N. ABRAMESCU.

Soluție dată de D-nii: G. G. CONSTANTINESCU, AURELIAN CĂLINESCU, A. DEUTSCH, D. MAVRODIN, MIRCEA LEONTE NEGREA, C. SĂNDULACHE, EUGEN MARCOVICI și NICOLAE D. ȘTEFĂNESCU.

1°. Ecuaţia conicei (C) tangentă în origine la axa Ox este

(1) $$ax^2 + 2bxy + cy^2 - 2dy = 0,$$

normala în O fiind Oy. Ecuaţiile dreptelor OM_1 şi OM_2 sunt $y = tx$, $y = -tx$, iar coordonatele punctelor M_1 şi M_2 pe conica (C) sunt

$$M_1\left(\frac{2dt}{ct^2 + 2bt + a}, \frac{2dt^2}{ct^2 + 2bt + a}\right),$$

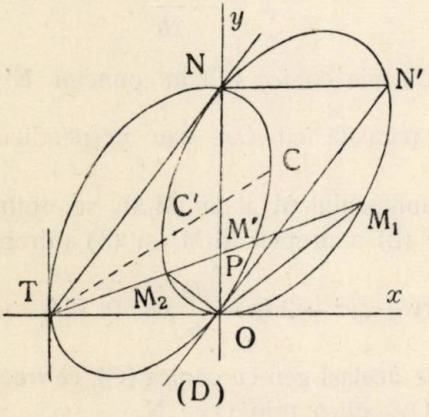
$$M_2\left(\frac{-2dt}{ct^2 - 2bt + a}, \frac{2dt^2}{ct^2 - 2bt + a}\right).$$

2°. Ecuaţia dreptei M_1M_2 este

(2) $$2bt^2x + (a + ct^2)y - 2dt^2 = 0, \quad ay + t^2(2bx + cy - 2d) = 0,$$

şi se vede că, dacă t^2 variază, M_1M_2 trece prin intersecţia dreptelor $y = 0$, $2bx + cy - 2d = 0$, adică prin punctul $T\left(\frac{d}{b}, 0\right)$. Deci M_1M_2 taie tangenta în O în punctul fix T, independent de OM_1 şi OM_2; Ecuaţia conicei (C) se poate scrie

$$y(2bx + cy - 2d) + ax^2 = 0,$$



deci conica (C) este bitangentă la conica formată de dreptele $y = 0$, $2bx + cy - 2d = 0$, în punctele de intersecţie cu dreapta $x = 0$. Dar T este punctul de intersecţie al dreptelor $y = 0$ şi $2bx + cy - 2d = 0$; deci T este polul axei Oy (normalei în O) în raport cu conica (C). Însemnând cu $N\left(0, \frac{2d}{c}\right)$ punctul unde

conica (C) taie pe Oy, se vede că $2bx + cy - 2d = 0$ este dreapta TN, tangentă în N la conică.

Se mai poate vedea că T este polul normalei ON, observând că fascicolul OM_1, ON, OM_2, OT este armonic, deoarece razele perpendiculare ON și OT sunt bisectoarele unghiului format de dreptele OM_1 și OM_2. Deci, dacă T este polul normalei în O la o conică, în raport cu conica, atunci orice dreaptă TM_2M_1 dusă prin T, taie conica în două puncte M_1 și M_2, astfel că dreptele OM_1 și OM_2 sunt egal înclinate pe normala în O.

3°. Coordonatele mijlocului M al segmentului M_1M_2 sunt

$$x = \frac{-4bdt^2}{(ct^2+a)^2 - 4b^2t^2},\quad y = \frac{2dt^2(ct^2+a)}{(ct^2+a)^2 - 4b^2t^2}.$$

Ecuația dreptei OM este

$$\frac{y}{x} = -\frac{ct^2+a}{2b}, \tag{3}$$

deci, când M_1 și M_2 tind către 0, adică $t \to 0$, atunci OM tinde către dreapta (D) a cărei ecuație este

$$y = -\frac{a}{2b}x. \tag{4}$$

Dreapta (D) taie conica (C) în punctul $N'\left(-\frac{4db}{ac}, \frac{2d}{c}\right)$. Deci NN' este paralelă cu Ox, sau perpendiculară pe Oy (pe normală).

4°. Locul mijlocului M al lui M_1M_2 se obține eliminând pe t^2 între ecuațiile (2) a dreptei M_1M_2 și (3) a dreptei OM. Obținem

$$(C') \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 - 2dy - \frac{da}{b}x = 0,\quad (C') \equiv (C) - \frac{da}{b}x = 0,$$

o conică (C') de același gen cu conica (C), ce trece prin intersecția conicei (C) cu Oy, adică prin O și N.

Ecuația conicei (C') se poate scrie

$$(ax+2by)x + cy^2 - \frac{d}{b}(ax+2by) = 0,$$

$$(ax+2by)\left(x - \frac{d}{b}\right) + cy^2 = 0.$$

Deci conica (C') este bitangentă la conica formată de dreptele $ax+2by=0$, dreapta (D), şi $x-\frac{d}{b}=0$ perpendiculara în T pe Ox, în punctele O şi T de intersecţie cu dreapta $y=0$, cu Ox. Deci (C') este tangentă în O la (D), şi normală în T la Ox.

De asemenea, ecuaţia conicei (C') se mai poate scrie [1]).

$$ax+by)\,x+(bx+cy-d)\,y-dy-\frac{dax}{b}=0,$$

$$(ax+by)\,x+(bx+cy-d)\,y-\frac{d}{b}(ax+by)=0,$$

$$(ax+by)\left(x-\frac{d}{b}\right)+(bx+cy-d)\,y=0,$$

deci (C') trece prin punctul de intersecţie al dreptelor $ax+by=0$, $bx+cy-d=0$, adică prin centrul $C\left(\frac{-db}{ac-b^2}\,,\ \frac{ad}{ac-b^2}\right)$ al conicei (C).

Centrul C' al conicei (C') este dat de ecuaţiile $ax+by-\frac{da}{2b}=0$ şi $bx+cy-d=0$ (dreapta TC). C' este pe TC şi are coordonatele $\left[\frac{d}{2b}\,,\ \frac{ad}{2(ac-b^2)}\right]$, deci C' este mijlocul lui TC.

Se mai observă că tangenta în N' la (C) taie pe Ox (tangenta în O) în N' simetricul lui N faţă de O.

PROBLEMA 4739. *Să se rezolve sistemul:*

$$\sqrt{x+y+2\sqrt{xy-x+y-1}}=a,$$

$$\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{y-1}+\sqrt[8]{(x+1)(y-1)}=b.$$

M. F. AMĂRĂŞTEANU.

---

1) Aşa i s'au găsit proprietăţile. Aceste rezultate au fost găsite studiind problema 1058 din *Gazeta Matematică*, propusă de D-l G. ŢIŢEICA, cu care ocazie a apărut: N. ABRAMESCU, *Sur l'étude de la forme d'une courbe ou d'une surface dans le voisinage de l'un de ses points et une nouvelle interpretation de la cubique donnant les tangentes de Darboux et Segre* (Mathematica, t. 12, 1936, p. 217 — 226).

Soluţiune dată de D-nii: MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila), DIMITRIE MAVRODIN (Student Bucureşti), G. POPOVICIU (Elev-inginer, Bucureşti), EMANOIL GH. TÂNJALĂ (Bacalaureat-Brăila), NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU (L. M. «N. F.»).

Să însemnăm cu: $x_1 = x + 1$ şi $y_1 = y - 1$. Cu aceste notaţiuni sistemul dat este cuprins în sistemul mai general:

$$\begin{cases} \sqrt{x_1 + y_1 + 2\sqrt{x_1 y_1}} = a \\ \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{y_1} + \sqrt[8]{x_1 y_1} = b \end{cases} \tag{1}$$

în care x_1 înseamnă un polinom în x_1, iar y_1 un polinom în y.

In cazul când x_1 şi y_1 sunt polinoame de gradul întâi, constitue extinderea directă a cazului propus.

Pentru a rezolva sistemul (1), vom observa în primul rând că:

$$x_1 + y_1 + 2\sqrt{x_1 y_1} = [\pm(\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1})]^2,$$

deci că rezolvarea sistemului (1) se reduce la rezolvarea sistemului:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = a \\ \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{y_1} + \sqrt[8]{x_1 y_1} = b \end{vmatrix} \tag{2}$$

sau

$$\begin{cases} \sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = -a \\ \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{y_1} + \sqrt[8]{x_1 y_1} = b. \end{cases} \tag{3}$$

Dar soluţiunile sistemului (3) se deduc din acelea găsite pentru (2) schimbând pe a în $-a$. Urmează deci, că este suficient să arătăm cum rezolvăm sistemul (2). Vom introduce două noui necunoscute, anume: $u = \sqrt[8]{x_1}$ şi $v = \sqrt[8]{y_1}$, după care sistemul (2) devine:

$$\begin{vmatrix} u^4 + v^4 = a \\ u^2 + v^2 + uv = b. \end{vmatrix} \tag{4}$$

Dar rezolvarea sistemului (4) poate fi imediat redusă la rezolvarea unui sistem elementar, punând:

$$\begin{vmatrix} u^2 + v^2 = z \\ uv = t, \end{vmatrix} \tag{5}$$

şi observând că având: $u^4 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2 = z^2 - 2t^2$, sistemul (4) devine următorul:

$$\begin{vmatrix} z^2 - 2t^2 = a \\ z + t = b, \end{vmatrix} \tag{6}$$

a cărui rezolvare este imediată prim metoda generală a substituţiei.

Având: $z = b - t$, rezultă că valorile lui t le dă ecuaţiunea:

$$t^2 + 2bt + a - b^2 = 0, \tag{7}$$

şi avem pentru sistemul (6) sistemele de soluţiuni următoare:

$$\begin{cases} t = -b + \sqrt{2b^2 - a} \\ z = 2b - \sqrt{2b^2 - a} \end{cases} \quad (8) \quad \text{şi} \quad \begin{cases} t = -b - \sqrt{2b^2 - a} \\ t = 2b + \sqrt{2b^2 - a} \end{cases} \tag{9}$$

Numerele z şi t fiind aflate, rezolvarea sistemului (5) revine la aceea a sistemului: $v = t/u$, $u^4 - zu^2 + t = 0$, care dă pentru u şi v sistemele de soluţiuni:

$$\left| \begin{array}{l} u = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(z \pm \sqrt{z^2 - 4t})} \\ v = \pm \sqrt{\frac{t}{2}(z \mp \sqrt{z^2 - 4t})} \end{array} \right. \tag{10}$$

semnele dela primul radical corespunzându-se $+cu+$ şi $-cu-$; iar în ce priveşte pe al doilea radical $+cu-$ şi $-cu+$, având în total patru sisteme de soluţiuni:

Dacă trecem acum la sistemul:

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt[8]{x_1} = u \\ \sqrt[8]{y_1} = v, \end{array} \right. \tag{11}$$

care ne dă valorile lui x_1 şi y_1, avem:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{16}[z \pm \sqrt{z^2 - 4t}]^2 \\ y_1 = \frac{t^4}{16}[z \mp \sqrt{z^2 - 4t}] \end{array} \right. \tag{12}$$

semnele corespunzându-se $+cu-$ şi $-cu+$, adică avem două sisteme de soluţiuni pentru x_1 şi y_1, cuprinse în (12).

Dacă presupunem că a şi b sunt numere reale, cele două sisteme de soluţiuni (12) sunt reale dacă a şi b sunt astfel în cât să avem: $2b^2 - a \geqq 0$ şi $z^2 - 4t \geqq 0$ (13). In cazul când $a = 2b^2$,

avem $t = -b$, $z = 2b$, deci cele două sisteme de soluțiuni (12) devin:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{8}\left[b + \sqrt{b(b+1)}\right]^4 \\ y_1 = \frac{b^4}{8}\left[b - \sqrt{b(b+1)}\right]^4 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{8}\left[b - \sqrt{b(b+1)}\right]^4 \\ y_1 = \frac{b^4}{8}\left[b + \sqrt{b(b+1)}\right]^4, \end{cases} \tag{14}$$

care sunt reale dacă b este pozitiv sau mai mic decât -1.

Dacă $b = 0$ sau $b = -1$ cele două necunoscute au valori egale.

Observare. I. Prin acelaș procedeu putem rezolva și sistemul următor:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = a \\ \sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y} + \sqrt[12]{xy} = b \end{cases} \tag{15}$$

reducând rezolvarea sistemului la o ecuațiune în z de gradul al treilea. Dacă $a = b^3$ rezolvarea ecuațiunii de gradul al treilea în z este reductibilă la rezolvarea unei ecuațiuni de gradul al doilea.

Dacă considerăm sistemul mai general:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = a \\ \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y} + \sqrt[2n]{xy} = b \end{cases}$$

rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} u^n + v^n = a \\ u^2 + v^2 + uv = b \end{cases}$$

se reduce la rezolvarea unei ecuațiuni în z de gradul n.

II. Au mai rezolvat problema pe alte căi: D-ra SONIA M. TUDORAN (Școala Centrală, București) și D-nii: ȘTEFAN C. TILICĂ (Lic. T. Severin), DUMITRU RIPEANU, S-Lt. M. GRUMĂZESCU, IOAN V. JAREGHIE (Liceul Militar Iași), BUCURENCIU I. VASILE, PARAPEANU C. ION (S-Lt. din Geniu).

O. N. Ț.

PROBLEMA 4752. *Dacă pe laturile* AB *şi* AC, *ale unui triunghiu oarecare* ABC, *luăm segmentele* BM *şi* CN *respectiv proporţionale cu acele laturi* AB *şi* AC *şi de sens opus faţă de* A, *segmentul* MN *este împărţit în părţi egale de a treia latură* BC.

O. N. ŢINO.

Fie P punctul unde segmentul MN este întâlnit de latura BC. Ducem prin M paralela MR la BC. Dreapta MR determină astfel pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC segmente respectiv proporţionale:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CR}}{\overline{CA}} . \tag{1}$$

Dar prin construcţiune avem:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CA}} . \tag{2}$$

Deducem, comparând egalităţile (1) şi (2), că

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CA}} , \text{ deci că } \overline{CR} = \overline{CN} . \tag{3}$$

De altă parte, în triunghiul MRN, dreapta CP trecând prin mijlocul C al laturei NR şi fiind paralelă cu latura RM împarte pe a treia latură în două părţi egale, $\overline{MP} = \overline{PN}$.

Reciproca acestei proprietăţi este adevărată şi se poate enunţa în modul următor:

Dacă un segment de dreaptă înscris în unghiul unui triunghiu este împărţit de a treia latură în părţi egale, el determină împreună cu latura a treia pe primele două laturi segmente respectiv proporţionale cu laturile întregi.

Fie triunghiul ABC şi segmentul MN înscris în unghiul A şi împărţit de latura BC în două părţi egale $\overline{MP} = \overline{PN}$. Ducând prin M paralela MR la BC în triunghiul BAC, avem relaţiunea:

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BA}} . \tag{4}$$

Dar în triunghiul MNR, paralela PC la MR, dusă prin mijlocul P al laturei MN, împarte pe NR în părţi egale, adică:

$$\overline{CR} = \overline{NC}\,. \qquad (5)$$

Comparând (4) cu (5), deducem:

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BA}}\,,$$

de unde rezultă proprietatea enunţată mai sus.

Observarea I. Astfel întregită, problema propusă serveşte la rezolvarea completă a problemii de construcţie următoare:

In unghiul unui triunghiu să se înscrie un segment de dreaptă având o extremitate dată şi astfel ca să fie împărţit de a treia latură a triunghiului în două părţi egale.

Observarea II. Au rezolvat problema fără a examina dacă reciproca este adevărată Domnişoarele: GICA BOTEZ (Notre Dame de Sion, Iaşi); CORNELIA COMLOŞAN (Cluj); ZOE FLORESCU (Principesa Elisabeta, Bucureşti) şi Domnii: MIRCEA NEGREA (Brăila); SUB-LT. MIRCEA GRUMĂZESCU; SUB-LT. MIHAI C. I. VLAD (Student Cluj); BAL LASCU, VICTOR HERMAN (Studenţi Cluj); MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU (Şc. Pol. Bucureşti); MIRCEA A. VASILESCU-STABU (Lic. Mihai Viteazu, Alba Iulia); RADU I. CIURESCU (Col. Naţional Sft. Sava, Bucureşti); PAUL DOBRESCU (Sem. Pedag. Bucureşti); DUMITRU CĂLIN ION (elev, Galaţi); CONSTANTIN COTESCU (Bacău); A. I. CORNĂŢEANU, PETRE V. ŞTEFĂNESCU, SANDU I. TURCU, ADOLF DEUTSCH, VICTOR FLORESCU, NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU şi DORIN N. TEODORESCU (Elevi Lic. mil. „N. Filipescu"); IOAN GR. BOGDAN, LIVIUS M. BIVOLARU, BUCUR N. VIRGIL, GHEORGHE D. CÂRDEIU, I. I. CRĂCIUN, PAUL FINI, IULIAN G. IONESCU, IOAN V. JAREGHIE, TRAIAN IGNAŢIU, PETRE T. MAMUT, CONSTANTIN V. PANTELIMON, ACHILLE V. PETRESCU, MIRCEA D. POPA, NICOLAE I. PUNGĂ, V. STĂNCULESCU, TRAIAN TRUFIN, NICOLAE G. VARTIC (Elevi Lic. mil. Iaşi); IOAN S. STOIAN (Lic. mil. Tg.-Mureş); IOAN ŞTREDER (Iaşi); ERNEST GH. BEIU-PALADI (Lic. Mihai Viteazul, Bucureşti); STELIAN CETĂŢEANU (Lic. „Gh. Şincai" Bucureşti); MIRCEA NICULESCU; IOAN I. PĂSCARU; ANDREI T. NADOLU; OCTAVIAN GH. RĂDULESCU; RADU V. APOSTOL; GHEORGHE CHERCIU: VASILE I. BUCURENCIU; DIMITRIE MAVRODIN; CONST N. GAVRILESCU; PETRU P. COJOCARU.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4787. *Pe înălțimea* AA' *a triunghiului* ABC *dreptunghic în* A, *se ia un punct* M. *Dacă* N *este punctul de întâlnire al perpendicularelor duse din* B *și* C *respectiv pe* CM *și* BM, *să se găsească locul punctului* N *când* M *se mișcă pe* AA'.

TH. M. COCEA.

Prin construcție se vede că M este ortocentrul triunghiului BNC în care BM și CN sunt înălțimi. Deci NM este perpendiculară pe BC și se confundă cu dreapta fixă AMA'. Locul lui N este deci înălțimea AA'.

După cum se vede unghiul A poate fi oricare.

Au dat soluții bune pentru cazul particular al enunțului D-ra TUDORAN M. SONIA și D-nii: ANDRIESCU R. M., BAL LASCU, CETĂȚEANU ȘT., CORNĂȚEANU I. A., CRĂCIUN I. I., IONESCU B. N. GH., JAREGHIE V. I., MARCOVICI E., PANTELIMON V. C., PAREPEANU C. I., PETRESCU ACHILE, POPA D. M., POPESCU-ZORICA N. A., ROȘCULEȚ N. M., STĂNCULESCU I., STĂNCULESCU M., STREDER I., TILICĂ C. ST., VASILESCU-STABU AL. M. și VLAD I. C. M.

Au dat foarte bune soluții pentru cazul triunghiului oarecare D-nii: APOSTOL R., BUCURENCIU I. V., DECIULESCU D. GH., DEUTSCH A., FLORESCU V., HERMAN V., IONESCU D. ȘT., PETRESCU P. B., RĂDULESCU GH. O., RUMICI A. GH., ȘTEFĂNESCU D. N. și TURCU R. S.

Bune soluții analitice de la D-nii: DEUTSCH A., GAVRILESCU N. C., GOTH L. M., MARCOVICI E., MATEI D. D., MILU I. N., POPOVICIU G., RIPIANU D. și STOIAN S. I.

PROBLEMA 4799. *Să se stabilească relația*

$$\sum_{0}^{n} k!\,(n-k)!\,(C_n^k)^3 = n!\,C_{2n}^n .$$

N. N. MIHĂILEANU.

Soluție dată de D-nii: V. FLORESCU, C. GAVRILESCU, R. MARTAC, D. RIPIANU, N. ȘTEFĂNESCU, D. THEDORESCU. Ținând seamă că

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{și} \quad \sum_{0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$$

avem

$$\sum_0^n k!\,(n-k)!\,(C_n^k)^3 = \sum k!\,(n-k)!\,C_n^k\,(C_n^k)^2 =$$

$$n!\,\sum (C_n^k)^2 = n!\,C_{2n}^n$$

Au mai trimis soluţii D-nii: I. BUZINCU, SUB-LT. M. GRUMĂZESCU şi TILICĂ ŞTEFAN.

PROBLEMA 4807. *Se dă o piramidă triunghiulară. Se consideră altă piramidă triunghiulară care are un vârf comun cu prima şi celelalte trei vârfuri la jumătatea a trei muchii ale primei. Care este volumul celei de a doua piramidă faţă de al celei d'întâiu?*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l POPA MIRCEA (Liceul militar, Iaşi).

Fie piramida IABC cu vârful I şi baza ABC; fie A', B', C' mijloacele muchiilor, IA, IB, IC, şi A", B", C" mijloacele muchiilor BC, CA, AB. Deosebim următoarele cazuri:

1. Vârful şi cele trei mijloace sunt în acelaşi plan, ca IA'B'C". In acest caz volumul piramidei a doua este zero.

2. Mijlocele se găsesc pe muchii pornind din acelaşi vârf, ca baza IA'B'C'. In acest caz baza A'B'C" a piramidei a doua este asemenea ca baza ABC a primei, raportul de asemănare fiind $\frac{1}{2}$. Ariile bazelor lor sunt dar în raportul $\frac{1}{4}$ iar înălţimile în raportul $\frac{1}{2}$. Deci volumele lor sunt în raportul $\frac{1}{8}$.

3. Baza piramidei a doua este în baza primei, ca IA"B"C". In acest caz baza piramidei a doua este asemenea cu a primei raportul de asemănare fiind $\frac{1}{2}$. Deci ariile bazelor sunt în raportul $\frac{1}{4}$. Cele două piramide fiind de aceeaşi înălţime, volumele lor vor fi în raportul $\frac{1}{4}$.

4. Două mijloace pe muchii plecând din vârful comun, şi al treilea pe bază necuprins în planul celorlalte trei, ca de exemplu IA'B'A". In acest caz aria IA'B' = $\frac{1}{4}$ ariaIAB, iar depărtarea lui C de planul IAB este îndoit de mare decât depărtarea lui A" de acelaşi plan. Deci raportul volumelor este $\frac{1}{8}$.

5. Două mijloace sunt pe laturile bazei şi al treilea pe o muchie plecând din vârf, în afară de aceea care merge la vârful bazei pe care concură laturile pe care s'au luat mijloace de laturi, ca de exemplu piramida IA'A"C". In acest caz baza BA"C" este $\frac{1}{4}$ din ABC, iar înălţimile ca $\frac{1}{2}$. Deci raportul volumelor este $\frac{1}{8}$.

6. Mijloacele laturilor sunt pe trei muchii care pleacă din acelaşi vârf al bazei, ca piramida IA'B"C". Piramidele sunt asemenea, cu raportul de asemănare $\frac{1}{2}$. Deci volumele sunt ca $\frac{1}{8}$.

Au examinat 4 cazuri D-l D. N. TEODORESCU, al doilea caz D-l G. D. DECIULESCU, cazurile 2 şi 3 D-l M. M. ANASTASIU, D-ra S. TUDORAN cazul 2, D-l G. A. RUMICI cazul 2.

EXERCIŢII

29. Să se demonstreze identitatea:

$$(x+y)(\alpha+\beta-\gamma)+(y+z)(\beta+\gamma-\alpha)+(z+x)(\gamma+\alpha-\beta)=2(x\alpha+y\beta+z\gamma).$$

(Generalizarea probl. 25 Cap. IV Culegere de Probleme Algebră Ed. III).

MIRCEA ADAM.

R. Notăm:

$$s=x+y+z$$
$$\sigma=\alpha+\beta+\gamma$$

şi avem:

$$(x+y)(\alpha+\beta-\gamma)=(s-z)(\sigma-2\gamma)=s\sigma-z\sigma-2\gamma s+2z\gamma$$

deci:

$$\Sigma(x+y)(\alpha+\beta-\gamma)=3s\sigma-\sigma s-2s\sigma+2\Sigma x\alpha=2(x\alpha+y\beta+z\gamma).$$

Dacă facem $x=\frac{1}{a^n}$ şi $\alpha=a^m$ etc. obţinem identitatea:

$$\sum\frac{a^n+b^n}{a^n b^n}(a^m+b^m-c^m)=2(a^{m-n}+b^{m-n}+c^{m-n})$$

care pentru $n=1$ şi $m=2$ devine:

$$\sum\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)=2(a+b+c).$$

30. Dacă $A+B+C=\pi$, o relaţiune între funcţii trigonometrice ale unghiurilor întregi A, B, C sau ale multiplilor lor, rămâne valabilă dacă mărim unghiurile de k ori, unde $k-1$ este multiplu de 6; iar pentru $k+1$ multiplu de 6 este suficient să schimbăm semnul unghiurilor ca relaţiunea să fie adevărată.

LT. C. IONESCU-ŢIU.

R. Se face transformarea $A_1 = \frac{1-k}{3}\pi + kA$, $B_1 = \frac{1-k}{3}\pi + kB$, $C_1 = \frac{1-k}{3}\pi + kC$. $A_1 + B_1 + C_1 = \pi$.

Pentru $k - 1 = mult.$ 2, rezultă $k - 1 = mult.$ 6.

In transformarea $A_2 = \frac{k+1}{3}\pi - kA$, $B_2 = \ldots, C_2 = \ldots$, $A_2 + B_2 + C_2 = \pi$.

Pentru $\frac{k+1}{3} = mult.$ 2, rezultă $k + 1 = mult.$ 6.

PROBLEME PROPUSE

4831. Fie numerele întregi m şi n. Când $(m^2 - n)$ se divide cu $(n^2 - m)$?

I. IONESCU.

4832. Să se găsească un număr de patru cifre al cărui cub să fie terminat prin doi întregi formaţi fiecare din câte patru cifre egale.

V. THÉBAULT.

4833. Prin I, centrul cercului înscris într'un triunghiu dreptunghiu ABC, se duc paralelele EE' şi FF' respectiv cu AB şi AC şi limitate la laturile triunghiului. Să se arate că avem:

$$\text{aria } ABC = \overline{EE'} \cdot \overline{FF'}.$$

ALEX. V. NICULESCU.

4834. Prin mijlocul laturei BC a triunghiului ABC se duc două drepte arbitrare D şi D'. Dreapta D taie laturile AB şi AC respectiv în punctele M şi N, iar paralela dusă prin N la BC taie latura AB în N'. Dreapta D' taie laturile AB şi AC respectiv în P şi Q, iar paralela dusă prin P la BC taie latura AC în P'. Să se arate că dreptele $\overline{N'P'}$ şi $\overline{MQ}$ se întâlnesc pe latura BC a triunghiului.

GH. D. SIMIONESCU.

4835. Se consideră în plan o dreaptă (Δ) şi un punct fix A. Fie A_1 proecţia lui A şi M un punct mobil, ambele pe (Δ), o dreaptă (D) trecând prin M şi făcând cu (Δ), un unghiu $DM\Delta$ egal cu de două ori unghiul MAA_1. Luăm pe D punctul P, astfel ca M_1 fiind proiecţia lui M pe $\overline{AP}$, $\overline{MM_1} = k \cdot \overline{MP}$. Locul lui P.

N. N. MIHĂILEANU.

4836. Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul tangenţial al triunghiului de referinţă ABC şi $A_2B_2C_2$ triunghiul anticomplimentar al triunghiului $A_1B_1C_1$.

$$a_1\ (BC,\ B_2C_2);\quad a_2\ (AB,\ B_2C_2);\quad a_3\ (AC,\ B_2C_2)$$

$$b_1\ (AC,\ A_2C_2);\quad b_2\ (BC,\ A_2C_2);\quad b_3\ (AB,\ A_2C_2)$$

$$c_1\ (AB,\ A_2B_2);\quad c_2\ (AC,\ A_2B_2);\quad c_3\ (BC,\ A_2B_2)$$

Să se arate că punctele a_1, b_1, c_1 sunt colineare, şi că grupele de puncte (a_2 şi a_3); (b_2 şi b_3); (c_2 şi c_3) sunt izotomice în triunghiul $A_2B_2C_2$.

THEODOR GH. COCEA.

4837. Se dau în spaţiu trei puncte A, B, C şi un plan P. Să se găsească un punct O, situat în planul P, astfel ca să fie vârful unui con de rotaţie cu axa perpendiculară pe plan şi care să treacă prin punctele A, B, C.

GH. D. SIMIONESCU.

4838. Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} \frac{u_i}{x^i} = 1\,,$$

U_n fiind termenul de rangul n în şirul lui FIBONACCI.

G-L CH. BUICLIU.

4839. Să se stabilească relaţia:

$$a_n = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{m-p+1} C_{n-1}^{p-1} C_{n-p-1}^{m-p+1} A_p ,$$

unde

$$a_i = A_0 i^m + A_1 i^{m-1} + \ldots + A_{m-1} i + A_m .$$

EUGEN VIŞA.

4840. Fie dată ecuaţia

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 ,$$

cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, să se formeze ecuaţia ale cărei rădăcini sunt toate monoamele de forma $x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$, în care $\alpha + \beta + \gamma = m$ (m fiind un număr întreg şi pozitiv dat, iar α, β, γ, sunt toate numerele întregi şi pozitive, unele putând fi chiar nule, verificând relaţia dată). Generalizare.

Dacă ecuaţiunea dată are două rădăcini imaginare, câte va avea noua ecuaţie?

M. GHERMĂNESCU.

4841. Intr'o conică (Γ) se înscrie un triunghiu oarecare ABC. Două drepte duse arbitrar prin punctul A întâlnesc conica (Γ) a doua oară în punctele A_1, A_2. Tangentele în A_1, A_2 la (Γ) taie latura BC în T_1, T_2, iar dreapta A_1A_2 taie latura BC în M. Să se demonstreze relaţia

$$\frac{\overline{MB^2}}{\overline{MC^2}} = \frac{\overline{T_1B}}{\overline{T_1C}} \cdot \frac{\overline{T_2B}}{\overline{T_2C}} .$$

CEZAR COŞNIŢĂ.

4842. In plan, fie O un punct situat pe dreapta Δ, M un punct pe o curbă (C); perpendiculara dusă pe OM din punctul în care tangenta în M taie Δ, întâlneşte paralela dusă prin O normalei în M într'un punct N.

Curbele (C) pentru care $\overline{NM} = k$ (constant) sunt cercuri având centrul pe perpendiculara ridicată în O pe Δ, la distanţa k de Δ.

C. IONESCU-BUJOR.

ERATĂ. La problema Nr. 4761 se vor şterge ultimele cinci cuvinte.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam Mircea (4731, 79, E, N, P); *Aldea N. N.* (P); *Amărăsteanu M.* (4792); *Anastasiu M. Mihail* (4813); *Andriescu M. Raul* (4786); *Andriescu Virgil* (4820); *Anicolaesi V. C.* (4418); *Apostol V. R.* (4692); *Bivolaru L.* (4418); *Buzincu I. Ioan* (4611, 22, 26, 91, 95, 766, 85, 99, 813); *Cardara Gh. Gh.* (4756, 66, 802, 16); *Cioc I. D-tru* (4786, 813, 16); *Ciurescu R.* (4792); *Cojocaru P.* (4792); *Constantinescu G. G.* (4482, 581, 654, 814, 17, 18, 20, 30); *Cornățeanu A.* (4776); *Dimitriu C. I.* (4552, 792); *Florescu L. V.* (4776); *Grumăzescu Mircea Subloc.* (4418, 595, 792, 99, 813); *Ianculescu S. Oct.* (4660); *Ilie A. I.* (E); *Jareghie V. I.* (4776); *Mamut T. P.* (4418); *Marcovici E.* (4644, 776, E); *Marian V.* (A); *Matei D. D-tru* (4757, 64, 87, 89); *Milu T. N.* (4792); *Negrea A. M. L.* (4792); *Pantelimon C.* (4552, 644, 776); *Parepeanu C. I.* (4552, 792); *Petrescu Achile* (4802); *Petrescu I. I.* (E); *Popa D. Mircea* (4552, 802, 13); *Popoviciu Gavril* (4802); *Postelnicescu C. M.* (4432); *Rădulescu O.* (4740, E); *Ripianu D-tru* (4741, 817); *Romașcan Georgeta* (4792); *Roșculeț N. Marcel* (4769, 92, 811); *Rumici A. G.* (4792, 820); *Săndulache Const.* (4746, 93); *Săndulache G.* (4819); *Ștefănescu D. N.* (4792); *Streder I.* (4776, 92); *Tilică C. Șt.* (4787, 89, 92, 99, 802, 16, 28); *Tudoran Sonia* (4808, 19, 20); *Vasilescu-Stabu A. M.* (4619, 44, 740); *Vlad C. M.* (4792); *Zamfiropol Gh. I. Locot.* (P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de* geometrie, *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

Manuscrisele se vor scrie pe **o singură parte a foii și nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu* 1926. (Epuizată).

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN**

C. 44817

C III R 2 1936/37

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLII

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1937

SUMARUL

1. Trigonometria lui Gooden; primul manual universitar de matematici din Ardeal . . *Victor Marian.*
2. Asupra omologiei simple şi multiple . . . *C. Ionescu-Bujor.*
3. Asupra punctului Lemoine . . . . . *N. N. Mihăileanu.*
4. Note Matematice: 47 — 50.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 268.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 4191, 4288, 4344, 4418, 4502, 4504, 4552, 4583, 4585, 4635, 4692, 4699, 4725, 4744, 4748, 4760, 4819.
10. Exerciţii: 31 — 38.
11. Probleme propuse: 4843 — 4854.
12. Tabla de Materii.

BIBLIOTECA CENTRALA „ASTRA" SIBIU

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1937

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer-Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **D. Stan**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1936 şi nerezolvate sunt enumărate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 4724, 26, 34, 42, 49, 70, 72, 83, 94, 98, 801, 04, 05, 06, 07, 09, 12, 21, 24, 25, 26, 27, 31, 32, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	220	260	80
5— 8 „	375	425	100
9—16 „	620	700	160
Coperta	120	160	80

TRIGONOMETRIA LUI GOODEN; PRIMUL MANUAL UNIVERSITAR DE MATEMATICI DIN ARDEAL

Acum 200 de ani — în 1737 — a apărut la Cluj, în limba latină, o Trigonometrie, care e desigur cea mai veche carte de acest fel din Ardeal. Cărticica are formatul 8⁰ mic, e legată artistic în piele aurită şi poartă următorul titlu: „*Trigonometria plana et sphaerica cum selectis ex Geometria et Astronomia Problematis, Sinuum Canonibus, et Propositionibus ex Euclide magis necessariis*... Promotore R. P. NICOLAO JANOSI, è S. J. AA. LL. et Philosoph. Doctore, ejusdemque Professore ordinario dicata. Anno M.D.CC.XXXVII. Mense Jul. Die. CLAUDIOPOLI, Typis Academicis S. J.".

Judecând după foia de titlu s'ar părea că autorul cărţii ar fi călugărul iezuit N. JANOSI (1701 — 1741), profesor de filosofie la „*Academia Claudiopolitana*", adică la Universitatea iezuită de pe atunci din Cluj. Dar în prefaţa adresată noilor bacalaureaţi în filozofie ai acelei Universităţi, JANOSI spune că dânsul nu a făcut altceva decât a retipărit tratatul de Trigonometrie al iezuitului JACOB GOODEN, fost profesor la colegiul englezesc din Liège. Tot în această prefaţă mai aminteşte JANOSI că această cărticică este „*primus in Dacia typis editus Liber Mathematicus*". Această afirmaţie e greşită, deoarece prima carte de matematici din Ardeal este *Aritmetica maghiară* tipărită la Cluj în 1591, dar pe care se vede că JANOSI nu a cunoscut-o.

TRIGONOMETRIA
PLANA ET SPHÆRICA
CUM SELECTIS
EX GEOMETRIA, ET ASTRONOMIA
PROBLEMATIS,
Sinuum Canonibus, & Propoſitionibus ex Euclide magis neceſſariis.
HONORIBUS
Perilluſtrium, Reverendorum, Præno-bilium, Nobilium, ac Eruditorum Dominorum Dominorum.
Dum
In Alma, ac Regio-Principali Societatis JESU Academia Claudiopolitana, Primâ AA. LL. & Philoſophiæ laureâ inſigniretur.
PROMOTORE
R. P. NICOLAO JANOSI, è S. J. AA. LL. & Philoſoph. Doctore, ejuſdémque Profeſſore ordinario
DICATA.
Annô M. D. CC. XXXVII. Menſe Jul. Die.
CLAUDIOPOLI, Typis Academicis S. J.

Foaia de titlu a Trigonometriei lui JANOSI.

Prefaţa lui JANOSI cuprinde 6 pagini, după care urmează pe 2 pagini prefaţa autorului — GOODEN — apoi, reprodusă textual, Trigonometria acestuia şi anume: Trigonometria plană şi sferică pe 108 pagini şi 3 planşe; tablele de sinus şi de tangentă, cari

cuprind 28 pagini şi în urmă părţi alese din elementele lui EUCLID pe 48 pagini şi 2 planşe.

* * *

J. GOODEN s'a născut la Denbingshire în 1670, a intrat în ordinul iezuiţilor în 1689 şi a fost mai mulţi ani profesor de filozofie şi matematici la Liège. A murit în 1730. Activitatea lui în domeniul matematicilor se reduce la Trigonometria apărută în Liège la 1704 sub următorul titlu: „*Trigonometria plana et sphaerica cum selectis ex Geometria et Astronomia problematis. Accedunt Sinuum Canones et ex Euclide Propositiones magis necessariae.* Auctore R. P. JACOBO GOODEN Societatis Iesu, in Collegio Anglorum Leodii Matheseos Professore. Leodii. Apud I. F. BRONCART, Anno 1704".

Pentru a ne da seama de materialul tratat în această cărticică precum şi felul cum a fost primită de lumea ştiinţifică şi didactică apariţia ei, redau mai jos recenzia apărută în „*Acta Eruditorum*" din 1706, p. 321.

„*Intre foloasele matematicei nu cel din urmă este, că cei cari o cultivă câştigă putere de judecată: în acest scop nu e suficient să ne însuşim practica matematică ci îndeosebi să înţelegem demonstraţiile. Pentru ca studenţii să poată medita mai uşor şi mai cu râvnă chestiunile abstracte, aplicaţiile trebue să fie cât mai puţin abstracte. Şi fiindcă până acum nu există o carte pentru folosul studenţilor, în care să se demonstreze legile ambelor trigonometrii şi să se aplice la rezolvarea problemelor folositoare, autorul crede că face o operă utilă explicând, dela primele fundamente, legile atât ale trigonometriei plane cât şi ale celei sferice, şi arătând multipla întrebuinţare a celor demonstrate.*

Prin urmare în întâia parte care tratează trigonometria plană, cap. 1 se ocupă cu fundamentele aceleia, explicând mai întâi natura sinusurilor şi arătând modul de întrebuinţare a tablelor sinusurilor şi tangentelor şi în sfârşit dând datele trigonometrice. Cap. 2 se ocupă cu analiza triunghiului dreptunghiu iar cap. 3 cu a celui oblicunghiu. Cap. 4 tratează analiza triunghiurilor cu ajutorul scalei geometrice şi a cadranului, iar cap. 5 dă aplicaţii la măsurarea lungimilor şi înălţimilor, adăugând şi metodele de măsură ale acelora, fără ajutorul trigonometriei şi în

cazuri bine determinate. Cap. 6 ne învaţă să determinăm cu ajutorul trigonometriei plane diametrul şi cercul Pământului, distanţa Soarelui şi a Lunei dela Pământ precum şi diametrul acelora.

In partea a doua, care se ocupă cu trigonometria sferică, în cap. 1 se dau cele necesare demonstraţiilor ce vor urma, arătându-se mai intâi proprietăţile cercurilor cari se strătae pe suprafaţa sferei şi cele ale triunghiurilor sferice. Urmează, în cap. 2, analiza triunghiului dreptunghic sferic şi în cap. 3 a celui oblic şi propune o soluţie uşoară a problemei foarte dificile, ca din trei laturi date să se afle unghiurile, cu ajutorul lemmei următoare: într'un triunghiu sferic **dreptunghiul construit sub sinusurile laturilor se raportă la patratul razei precum dreptunghiul construit sub sinusurile diferenţelor laturilor dela semisuma tuturor laturilor la patratul sinusului jumătăţii unghiului vertical.** *Cap. 4 cuprinde materialul foarte necesar, dar de mulţi neglijat, despre felul laturilor şi al unghiurilor. Anume, deoarece arcele şi unghiurile au sinusuri identice cu complementarele lor, aflăm prin câteva propoziţii demonstrative, care unghiu sau arc corespunde sinusului căutat. In cap. 5 se adaugă problemele sferice importante pentru astronomie şi geografie, de aflarea declinaţiei Soarelui, a locului, a ascensiunei drepte şi oblice, a apropierii de verticala primară, a amplitudinei răsăritului şi a apusului, a azimutului, a orei zilei, a arcelor orizontului cuprinse între meridian şi alte cercuri orare, a orei răsăritului sau apusului Soarelui, a duratei crepusculului; a declinaţiei, ascensiunei drepte, longitudinei, latitudinei, a arcului de zi şi de noapte al stelelor fixe, a orei nopţii şi a înălţimii Polului. Urmează tablele sinusurilor şi tangentelor, calculate din zece în zece minute împreună cu logaritmii acelora. In sfârşit pe ultimele trei coale se demonstrează elementele esenţiale ale geometriei plane alese din* EUCLID *şi se acomodează înţelegerii începătorilor. Cărticica e foarte uşoară şi folositoare, se poate cumpăra pe un preţ mic şi e de mare valoare. Ar fi de un real folos pentru studenţi dacă prea savantul autor ar scoate şi o astronomie generală explicată cu aceeaşi dexteritate".*

GOODEN nu a scos o altă ediţie a Trigonometriei sale, astfel că cea din Cluj este a doua. Dar mai există şi o a treia. Anume

călugărul iezuit ERASMUS FROELICH a scos la Viena, în 1746, un manual de matematici întitulat: *„Introductio facilis in Mathesin"*, în două volume. Volumul întâiu cuprinde aritmetica şi algebra, al doilea însă e aceeaşi Trigonometrie a lui GOODEN pe care o tipărise, înainte cu opt ani JANOSI, la Cluj. Mai adaug că manualul lui FROELICH era destinat studenţilor în filozofie dela Universităţile iezuite din Austria, prin urmare şi Universităţii din Cluj, deoarece, în organizarea ordinului iezuiţilor, Ardealul aparţinea provinciei austriace. Cartea lui FROELICH a înlocuit-o deci pe aceea a lui JANOSI.

* * *

In ce priveşte Universitatea iezuită din Cluj, ea a fost înfiinţată de principele Ardealului şi rege al Poloniei ŞTEFAN BATHORY, la 12 Mai 1581. Activitatea ei cuprinde două perioade: întâia e dela înfiinţare până la anul 1605, când iezuiţii sunt alungaţi din Cluj, iar a doua dela 1693, când aceştia au fost readuşi de Habsburgi, până la desfiinţarea ordinului, întâmplată în 1773. Această Universitate era organizată identic cu cele din apus; ea cuprindea trei facultăţi: teologie, filozofie şi drept şi conferea titlul de bacalaureat, magistru şi doctor. Programul de învăţământ al Universităţilor iezuite era identic, stabilit prin *„Ratio Studiorum"* dela 1599, profesorii erau transferaţi dela o Universitate la alta după necesităţi, iar manualele erau deobiceiu aceleaşi. Astfel se explică ediţia dela Cluj şi cea din Viena a manualului lui GOODEN.

Pe noi ne interesează Universitatea iezuită din Cluj prin faptul că, după unirea cu Roma, întâmplată la 1700, ea a avut nu numai o mulţime de elevi, dar chiar şi profesori români, ca: ANDREI ILLIA, ANTONIE MUSCA, GEORGE BUITIUL, VASILE DOBRA şi alţii.

* * *

Din cele de mai sus se vede că Trigonometria lui GOODEN, scoasă în a doua ediţie la Cluj, în 1737, de profesorul JANOSI în folosul elevilor săi dela Universitate, este nu numai prima trigonometrie, ci şi cel mai vechiu manual universitar de matematici din Ardeal.

VICTOR MARIAN.

ASUPRA OMOLOGIEI SIMPLE ŞI MULTIPLE

1°. Două triunghiuri ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt biomologice când ABC este omologic cu $A_1B_1C_1$ şi $B_1C_1A_1$, sunt triomologice când ABC este omologic cu $A_1B_1C_1$, $B_1C_1A_1$, $C_1A_1B_1$.

In *Gazeta Matematică*, D-l AL. PANTAZI a arătat că *două triunghiuri biomologice sunt şi triomologice* [1]). Teorema a fost reluată de D-l G. I. DUMITRESCU [2]); stabilind analitic condiţiile biomologiei, D-sa deduce că ele satisfac şi triomologiei. Recent D-l G. D. SIMIONESCU a obţinut pe o altă cale teorema D-lui AL. PANTAZI şi condiţia triomologiei [3]).

Ne propunem să aflăm pe cale geometrică, elementară, condiţiile biomologiei a două triunghiuri, să conchidem că ele sunt şi ale triomologiei, apoi să extindem aceste preocupări la poligoane oarecare.

Convenim să notăm $\alpha\beta\gamma$ aria triunghiului $\alpha\beta\gamma$, pe al cărui perimetru s'a ales un sens ce dă aria pozitivă. De aceea

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\gamma\beta = 0.$$

Deasemenea, dacă γ şi δ sunt de o parte şi de alta a dreptei $\alpha\beta$, raportul ariilor $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\delta$ este negativ; iar dacă sunt de aceeaşi parte, raportul este pozitiv.

2°. *Condiţia necesară şi suficientă pentruca triunghiurile* ABC, $A_1B_1C_1$ *să fie omologice este:*

$$\boxed{A_1AB \cdot B_1BC \cdot C_1CA = B_1AB \cdot C_1BC \cdot A_1CA} \cdot \qquad (1)$$

Fie α punctul de întâlnire al dreptelor AA_1, BC — β γ punctele analoage

$$\frac{A_1AB}{A_1AC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AA_1} \cdot \sin \widehat{\alpha AB}}{\overline{AC} \cdot \overline{AA_1} \cdot \sin \widehat{\alpha AC}} = \frac{\overline{AB} \cdot \sin \widehat{\alpha AB}}{\overline{AC} \cdot \sin \widehat{\alpha AC}} \qquad (2)$$

1) *Gazeta Matematică*. Vol. XXI, p. 206.

2) *Gazeta Matematică*. Vol. XXX, pag. 46.

3) *Bull. de Math. et de Physique pures et appliquées* de l'école Polytechnique Roi Carol II. Fasc. 16, 1935 — 36, p. 191.

şi cum AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente,

$$\frac{\sin \widehat{\alpha AB}}{\sin \widehat{\alpha AC}} \cdot \frac{\sin \widehat{\beta AC}}{\sin \widehat{\beta BA}} \cdot \frac{\sin \widehat{\gamma CA}}{\sin \widehat{\gamma CB}} = -1 \qquad (3)$$

urmează,

$$\frac{A_1AB}{A_1AC} \cdot \frac{B_1BC}{B_1BA} \cdot \frac{C_1CA}{C_1CB} = -1 \qquad (4)$$

de unde deducem relaţia enunţului.

Condiţia este suficientă, întrucât se mai poate scrie sub forma (4), iar cu (2) şi analoagele se obţine (3), condiţia de concurenţă a dreptelor AA_1, BB_1, CC_1.

3°. *Condiţiile necesare şi suficiente, pentruca triunghiurile* ABC, $A_1B_1C_1$, *să fie biomologice, sunt*

$$A_1AB.B_1BA.C_1CA = B_1AB.C_1BC.A_1CA = C_1AB.A_1BC.B_1CA \qquad (5)$$

Egalitatea primelor două produse caracterizează omologia triunghiurilor ABC, $A_1B_1C_1$; iar egalitatea ultimelor două produse este caracteristică omologiei triunghiurilor ABC, $B_1C_1A_1$.

Insă egalarea produselor extreme defineşte omologia triunghiurilor ABC, $C_1A_1B_1$. Şi astfel este dovedită elementar, teorema:

Două triunghiuri biomologice sunt şi triomologice.

Relaţiile (5) sunt deci condiţiile triomologiei.

* * *

4°. *a)* Spunem că două poligoane $A_1A_2 \ldots A_n$, $B_1B_2 \ldots B_n$ sunt *pseudoomologice* când dreptele A_iB_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ sunt concurente.

Fie dat un poligon $A_1A_2 \ldots A_n$; un pseudoomologic al său se obţine luând B_1, B_2 arbitrare. A_1B_1, A_2B_2 determină centrul de pseudoomologie O, iar $B_3 \ldots B_n$ trebue să se afle pe $OA_3, \ldots OA_n$ ceeace, analitic, înseamnă $n-2$ ecuaţii satisfăcute de cele $2n$ coordonate ale vârfurilor poligonului $B_1B_2 \ldots B_n$.

Condiţiile de pseudoomologie se află scriind condiţiile de omologie pentru cele $n-2$ perechi de triunghiuri corespunzătoare

obținute ducând diagonale din două puncte corespunzătoare ale poligoanelor și sunt:

$$B_1A_1A_i.B_iA_iA_{i+1}.B_{i+1}A_{i+1}A_1 = B_iA_1A_i.B_{i+1}A_iA_{i+1}.B_1A_{i+1}A_1 \quad (6)$$
$$i = 2, 3 \ldots, n-1$$

b) Poligoanele $A_1A_2 \ldots A_n$, $B_1B_2 \ldots B_n$ sunt dublu pseudoomologice când $A_1A_2 \ldots A_n$ este pseudoomologic cu $B_1B_2 \ldots B_n$ și $B_2B_3 \ldots B_n B_1$.

Un poligon dat $A_1A_2 \ldots A_n$ *admite o infinitate de poligoane bipseudoomologice* $B_1B_2 \ldots B_n$, *între coordonatele vârfurilor cărora sunt* $2n - 4$ *ecuații.*

c) $A_1A_2 \ldots A_n$ este tripseudoomologic cu $B_1B_2 \ldots B_n$ când este pseudoomologic cu $B_1B_2 \ldots B_n$, $B_2B_3 \ldots B_nB_1$, $B_3 \ldots B_nB_1B_2$. In acest caz, cele $2n$ coordonate ale vârfurilor poligonului B trebuind să satisfacă $3n - 6$ ecuații, sistemul este compatibil, în general, dacă

$$3n - 6 \leqslant 2n \quad , \quad n \leqslant 6.$$

Poligonul cu număr maxim de laturi care admite necondiționat cel puțin un poligon tripseudomologic este exagonul.

d) Pentru tetrapseudoomologie, patrulaterul este singurul care admite necondiționat cel puțin un poligon pseudoomologic. Vom arăta că admite o infinitate de asemenea poligoane.

5°. Cercetăm relațiile necesare și suficiente pentruca două patrulatere să fie pseudoomologice. Cum, în acest caz, triunghiurile ABC, BCD, CDA, DAB sunt respectiv omologice ca $A_1B_1C_1$, $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$, avem următoarele relații

$$\begin{cases} A_1AB.B_1BC.C_1CA = B_1AB.C_1BC.A_1CA \\ B_1BC.C_1CD.D_1DA = C_1BC.D_1CD.B_1DB \\ C_1CD.D_1DA.A_1AC = D_1CD.A_1DA.C_1AC \\ D_1DA.A_1AB.B_1BD = A_1DA.B_1AB.D_1DB. \end{cases} \quad (7)$$

Și, deoarece două patrulatere pseudoomologice cer două relații, numai două din relațiile (7) sunt distincte, celelalte rezultă din omologia obligată a perechilor de triunghiuri corespunzătoare.

Multiplicând prima şi a treia relaţie, obţinem egalitatea:

$$A_1AB \cdot B_1BC \cdot C_1CD \cdot D_1DA = B_1AB \cdot C_1BC \cdot D_1CD \cdot A_1DA \tag{8}$$

care prin permutări circulare se transformă în ea însăşi.

Impărţind primele două relaţii (7), apoi pe a doua cu a treia, avem:

$$\begin{aligned} \frac{A_1AB}{B_1AB} : \frac{C_1CD}{D_1CD} &= \frac{A_1AC}{C_1AC} : \frac{B_1BD}{D_1BD} \\ \frac{B_1BC}{C_1BC} : \frac{D_1DA}{A_1DA} &= \frac{B_1BD}{D_1BD} : \frac{C_1CA}{A_1CA} \end{aligned} \tag{9}$$

Aceste două relaţii pot fi privite drept condiţii necesare şi suficiente pentruca patrulaterele ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ să fie pseudo-omologice. Ele prezintă, comparate cu două din condiţiile grupului (7), avantajul formal de a se obţine una din alta prin permutări circulare.

6°. *a)* Să considerăm patrulaterele ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ tripseudoomologice. Există următoarele şase relaţii:

$$\begin{cases} A_1AB \cdot B_1BC \cdot C_1CA = B_1AB \cdot C_1BC \cdot A_1CA \\ B_1BC \cdot C_1CD \cdot D_1DB = C_1BC \cdot D_1CD \cdot B_1DB \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1AB \cdot C_1BC \cdot D_1CA = C_1AB \cdot D_1BC \cdot B_1CA \\ C_1BC \cdot D_1CD \cdot A_1DB = D_1BC \cdot A_1CD \cdot D_1DB \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} C_1AB \cdot D_1BC \cdot A_1CA = D_1AB \cdot A_1BC \cdot C_1CA \\ D_1BC \cdot A_1CD \cdot B_1DB = A_1BC \cdot B_1CD \cdot D_1DB. \end{cases}$$

Multiplicând relaţiile I, III, V, apoi II, IV, VI obţinem

$$\begin{cases} D_1AB \cdot A_1BC \cdot B_1CA = A_1AB \cdot B_1BC \cdot C_1CA \\ A_1BC \cdot B_1CD \cdot C_1DB = B_1BC \cdot C_1CD \cdot A_1DB. \end{cases}$$

Cum acestea reprezintă pseudoomologia patrulaterelor ABCD $D_1A_1B_1C_1$, putem enunţa:

Teoremă. *Două patrulatere tripseudomoologice sunt și tetrapseudoomologice.*

Și ca urmare, *un patrulater admite o infinitate de patrulatere tetrapseudoomologice.*

b) In două patrulatere ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ *tripseudomologice, deci tetrapseudoomologice există relațiile necesare:*

$$\begin{aligned} &A_1AB \,.\, B_1BC \,.\, C_1CD \,D_1DA = B_1AB \,.\, C_1BC \,.\, D_1CD \,.\, A_1DA \\ &= C_1AB \,.\, D_1BC \,.\, A_1CD \,.\, B_1DA = D_1AB \,.\, A_1BC \,.\, B_1CD \,.\, C_1DA \end{aligned} \tag{11}$$

deduse din (8).

7°. Dacă ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ sunt două patrulatere tripseudomologice, triunghiul ABC este omologic cu $A_1B_1C_1$, $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$; patrulaterele sunt și tetrapseudoomologice, deci ABC este omologic și cu $D_1A_1B_1$ și putem enunța proprietatea:

Dacă un triunghiu ABC *este omologic cu triunghiurile* $A_1B_1C_1$, $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, *este omologic și cu triunghiul* $D_1A_1B_1$.

8°. Această proprietate se poate extinde astfel:

Dacă un triunghiu ABC *este omologic cu triunghiurile* $A_{i-1}\,A_i\,A_{i+1}$ $(i = 2, 3 \ldots n) - A_{n+1} \equiv A_1 -$ ABC *este omologic și cu* $A_n\,A_1\,A_2$.

Din omologiile date avem:

$$A_1AB \,.\, A_2BC \,.\, A_3CA = A_2AB \,.\, A_3BC \,.\, A_1CA$$

$$A_2AB \,.\, A_3BC \,.\, A_4CA = A_3AB \,.\, A_4BC \,.\, A_2CA$$

$$A_3AB \,.\, A_4BC \,.\, A_5CA = A_4AB \,.\, A_5BC \,.\, A_3CA$$

. . . . . .

$$A_{n-1}AB \,.\, A_n\,BC \,.\, A_1\,CA = A_n\,AB \,.\, A_1\,BC \,.\, A_{n-1}\,CA.$$

Și multiplicându-le, urmează

$$A_1\,AB \,.\, A_2\,BC \,.\, A_n\,CA = A_n\,AB \,.\, A_1\,BC \,.\, A_2CA$$

care exprimă omologia triunghiurilor ABC, $A_n\,A_1\,A_2$.

9°. *a) Fie două poligoane* $A_1\,A_2 \ldots A_n$, $B_1\,B_2 \ldots B_n$. *Numind* $\alpha_j\,(A_j\,A_{j+2},\ A_{j+1}\,A_{j+3})$, $\beta_j\,(B_j\,B_{j+2},\ B_{j+1}\,B_{j+3})$ $j = 1, 2, \ldots n-3$ *dacă dreptele* $A_i\,B_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, $\alpha_j\,\beta_j$ $(j = 1, 2 \ldots n-3)$ *sunt concurente, poligoanele se numesc omologic .*

In acest caz triunghiurile $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ fiind omologice, punctele (A_1A_2, B_1B_2), (A_1A_3, B_1B_3), (A_2A_3, B_2B_3) sunt pe o dreaptă Δ. La fel, $A_1A_2\alpha_1$ omologic cu $B_1B_2\beta_1$ arată că (A_2A_4, B_2B_4) se află pe Δ. Din aproape în aproape, conchidem că laturile şi diagonalele corespunzătoare ale celor două poligoane se întâlnesc în puncte colineare. Avem astfel următoarea generalizare a teoremei lui DESARGUES:

Dacă două poligoane $A_1A_2\ldots A_n$, $B_1B_2\ldots B_n$, *în care numim* α_i $(A_iA_{i+2}, A_{i+1}A_{i+3})$, β_i $(B_iB_{i+2}, B_{i+1}B_{i+3})$ $i=1,2\ldots n-3$ *sunt astfel încât dreptele* A_iB_i $(i=1,2\ldots n)$ *şi* $\alpha_j\beta_j$ $(j=1,2\ldots n-3)$ *sunt concurente, dreptele* A_kA_l, B_kB_l $(k, l=1,2\ldots n)$ *se întâlnesc în puncte colineare.*

b) Fie dat un poligon $A_1A_2\ldots A_n$. Câte condiţii trebuesc satisfăcute de coordonatele vârfurilor omologicului său $B_1B_2\ldots B_n$?

Luând B_1, B_2 arbitrare, s'a determinat centrul de omologie ca intersecţie a dreptelor A_1B_1, A_2B_2; $B_3\ldots B_n$ trebue să se afle pe $OA_3\ldots OA_n$, iar $\beta_1,\ldots\beta_{n-3}$ pe $O\alpha_1,\ldots O\alpha_{n-3}$ — adică $2n-5$ condiţii sunt necesare şi suficiente pentru omologia a două poligoane cu n latuui. Aceste condiţii se obţin scriind omologia triunghiurilor $A_1A_iA_{i+1}$, $B_1B_iB_{i+1}$ $(i=2\ldots n-1)$, sunt deci condiţiile (6) de pseudoomologie a celor două poligoane, la care se adaugă relaţiile de omologie ale triunghiurilor $\alpha_jA_jA_{j+1}$, $\beta_jB_jB_{j+1}$ $(j=1,2\ldots n-3)$, anume:

$$\beta_j\alpha_jA_j\,.\,B_jA_jA_{j+1}\,.\,B_{j+1}A_{j+1}\alpha_j=B_j\alpha_jA_j\,.\,B_{j+1}A_jA_{j+1}\,.\,\beta_jA_{j+1}\alpha_j \qquad (j=1,2\ldots n-3) \tag{12}$$

c) Două poligoane $A_1A_2\ldots A_n$, $B_1B_2\ldots B_n$ sunt biomologice dacă primul este omologic cu al doilea şi cu $B_2B_3\ldots B_nB_1$.

Biomologia cere $4n-10$ condiţii, care sunt împlinite de cele $4n$ coordonate ale vârfurilor poligoanelor date.

In plan sunt o infinitate de perechi de poligoane cu n laturi biomologice.

Dacă poligonul $A_1A_2\ldots A_n$ este dat, va trebui să avem

$$4n-10\leqslant 2n \quad , \quad \text{deci} \quad n\leqslant 5.$$

Pentagonul este poligonul cu cel mai mare număr de laturi care, fiind dat, admite cu certitudine cel puţin un poligon biomologic.

Pentru triomologie, $n < 4$. Deci triunghiul este singurul poligon care, fiind dat, admite poligoane triomologice.

Dacă ambele poligoane sunt de construit, pentru a forma un sistem triomologic, putem modela $4n$ coordonate şi găsim $n < 8$, In particular, există perechi de patrulatere triomologice şi coordonatele vârfurilor lor satisfac nouă relaţii: cele 6 relaţii (10), la care adăugăm trei relaţii ce reprezintă omologia triunghiului AOB cu $A_1O_1B_1$, $B_1O_1C_1$, $C_1O_1D_1$—O şi O_1 fiind intersecţiile diagonalelor celor două patrulatere.

10^0. Vom cerceta dacă două patrulatere ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ triomologice sunt şi tetraomologice. Deoarece două patrulatere tripseudoomologice sunt şi tetrapseudoomologice, ar rămâne de cercetat dacă omologia triunghinlui AOB cu $A_1O_1B_1$, $B_1O_1C_1$. $C_1O_1D_1$ aduce şi omologia cu $D_1O_1A_1$. Adică dacă din relaţiile

$$A_1AB \cdot B_1BO \cdot O_1OA = B_1AB \cdot O_1BO \cdot A_1OA$$
$$B_1AB \cdot C_1BO \cdot O_1OA = C_1AB \cdot O_1BO \cdot B_1OA$$
$$C_1AB \cdot D_1BO \cdot O_1OA = D_1AB \cdot O_1BO \cdot C_1OA,$$

se şi deduce egalitatea

$$D_1AB \cdot A_1BO \cdot O_1OA = A_1AB \cdot O_1BO \cdot D_1OA.$$

Pentru aceasta ar trebui să avem:

$$\frac{(O_1OA)^4}{A_1OA \cdot B_1OA \cdot C_1OA \cdot D_1OA} = \frac{(O_1OB)^4}{A_1OB \cdot B_1OB \cdot C_1OC \cdot D_1OD}$$

relaţie, care în general, nu este o urmare a primelor trei. Deci:

a) *Dacă un triunghiu* ABC *este omologic cu* $A_1O_1B_1$, $B_1O_1C_1$, $C_1O_1D_1$—O_1 *fiind intersecţia diagonalelor patrulaterului* $A_1B_1C_1D_1$ *în general,* ABC *nu este omologic şi cu* D_1OA_1.

b) *Două patrulatere triomologice nu sunt, în general, şi tetraomologice.*

c) Dacă două patrulatere ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ sunt tetraomologice O şi O_1 reprezentând intersecţiile diagonalelor, sunt necesare relaţiile (11) şi

$$\frac{(O_1OA)^4}{A_1OA \cdot B_1OA \cdot C_1OA \cdot D_1OA} = \frac{(O_1OB)^4}{A_1OB \cdot B_1OB \cdot C_1OB \cdot D_1OB} = \frac{(O_1OC)^4}{A_1OC \cdot B_1OC \cdot C_1OC \cdot D_1OC} = \frac{(O_1OD)^4}{A_1OD \cdot B_1OD \cdot C_1OD \cdot D_1OD}.$$

C. IONESCU-BUJOR.

ASUPRA PUNCTULUI LEMOINE

Fie T şi T′ două triunghiuri isologice de centre C în sensul T — T′ şi M. Dacă G este centrul de gravitate în T, M este centrul de gravitate în T′. Toate triunghiurile T′ sunt asemenea între ele, deci cu triunghiul podar al punctului LEMOINE. Rezultă atunci anumite însuşiri comune: T′ având laturile isocline pe medianele triunghiului T, este asemenea cu triunghiul format de mediane; laturile triunghiului T′ sunt proporţionale cu medianele triunghiului T. Rezultă în baza reciprocităţii că medianele triunghiului T′ sunt proporţionale cu laturile triunghiului T. Cazuri particulare după poziţia lui M.

Se consideră un triunghiu $T \equiv ABC$ ca element de referinţă şi se proiectează un punct arbitrar, M al planului, sub acelaş sens şi unghiu φ pe laturi şi se poartă pe aceste proiectante, lungimi proporţionale cu laturile, în raport k. Fie $T' \equiv A'B'C'$, noul triunghiu.

Tripletul (MA′, MB′, MC′), având originea în M şi trecând prin vârfurile lui T′, este în echilibru fiindcă conturul care dă rezultanta este asemenea cu ABC′, deci închis. Rezultă că M este centrul de greutate al triunghiului T′.

Fie încă G şi A_1, B_1, C_1 centrul de greutate şi mijloacele laturilor triunghiului T. Triunghiurile MB′C′ şi B_1AA_1 sunt asemenea, având două din laturi isocline şi proporţionale în raport $2k$. Rezultă din acest fapt că proprietatea triunghiurilor T şi T′ este reciprocă:

Laturile triunghiului T *fiind isocline de unghiu* φ *şi proporţionale în raport* $\frac{2}{3k}$ *medianelor triunghiului* T′, *deasemenea laturile triunghiului* T′ *sunt isocline de unghiu* $-\varphi$ *şi proporţionale raport* $2k$, *medianelor triunghiului* T.

Aria $MB'C' = 4k^2$. aria B_1AA_1; dar aria S a triunghiului T face de 4 ori aria B_1AA_1, deci aria S′ a triunghiului T′, este dată de formula [1]) $S' = 3k^2S$.

Aria triunghiului T′ este deci independentă de unghiul de proiecţie φ. Notând a, b, c şi a', b', c' laturele celor două triunghiuri, avem şi relaţiile:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 3\,(MA'^2 + MB'^2 + MC'^2) = 3k^2\,(a^2 + b^2 + c^2).$$

---

1) Pentru această ultimă relaţie se poate încă întrebuinţa formula $S = \frac{4}{3}\sqrt{m\,(m - m_a)\,(m - m_b)\,(m - m_c)}$, care dă aria în funcţie de mediane $(2m = m_a + m_b + m_c)$; avem $S' = \sqrt{p'\,(p' - a')\,(p' - b')\,(p' - c')}$ unde $a' = 2km_a \ldots$

In particular: *dacă din ortocentrul* H *al unui triunghiu, se poartă pe înălțimi segmente egale cu laturile triunghiului, dirijate toate spre laturi sau toate spre vârfuri, se obține un triunghiu* T′ *al cărui centru de greutate este punctul* H, *ale cărui laturi sunt perpendiculare și duble medianelor triunghiului de referință.* [Problema D-lui N. BOTEA din G. M., 4254, XL—417, care a și fost punctul de plecare pentru acest studiu].

Deasemenea, din vârful A al triunghiului ABC se poartă în exterior — pentru a fixa ideile — perpendiculare AB′, AC′ pe laturile AC, AB și egale cu ele; A′ fiind un punct pe înălțimea din A, spre BC la o distanță AA′ = BC, A′B′C′ este încă un triunghiu T′. *Centrul lui de greutate este vârful* A; *înălțimea* AA′ *este deci mediana* AA″ *a triunghiului* AB′C′, *deci* AA″ *este egal cu jumătate din* AA′ *sau* BC, punctul A împărțind mediana A′A″ în raportul 1 : 2; *deasemenea latura* B′C′ *este perpendiculară și egală cu dublul medianei* AA_1. [Această chestiune cunoscută: Culegerea de probleme de Geometrie, 33 I, a fost reamintită de D-l General G. BUICLIU, G. M. nota 39, XL, 401].

Pe aceiași figură, se proiectează B′, C′ în B″, C″ pe AB, AC. Perpendicularele din B″, C″ pe BC, taie pe AC′, AB′ în B‴, C‴. Din triunghiurile egale BCC_h, B‴B″A — AB″ egalează înălțimea CC_h și unghiul C = unghiul B″, — se deduce B″B‴ = BC = C″C‴. Pe de altă parte, distanța centrului cercului circumscris O la latura BC este egală cu jumătatea segmentului unind vârful A și ortocentrul H. Dacă B″B‴ taie CC_h în β, β este ortocentrul triunghiului BB″C și B″B‴ = B″β — AH; deci B″B‴ = C″C‴ și valorează dublul distanței centrelor cercurilor ABC′ și B″C″BC, fie O, O_a; rezultă că $OO_a = \frac{1}{2}$ BC . O_b și O_c fiind puncte analoage $O_a\ O_b\ O_c$ este un triunghiu T′, pentru M = 0, $k = \frac{1}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Deci *triunghiul* $O_a\ O_b\ O_c$ *are centrul de greutate în* O, *centrul cercului circumscris triunghiului; laturile sale sunt perpendiculare și egale medianelor. Aria sa face trei sferturi din aceea a triunghiului* ABC. [Chestiunea 2734 a D-lui V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1935—239].

Pe laturile triunghiului ABC se construesc patrate BCA′A″,... Fie G_a, G_b, G_c centrele de greutate ale triunghiurilor AA′A″,... A‴ fiind mijlocul lui A′A″ și A_1 al lui BC, dreapta GG_a care unește centrele de greutate ale triunghiurllor ABC și AA′A″ este

paralelă cu $A_1 A'''$ şi egală cu 2/3 din lungimea ei. Se poate deci obţine punctele G_a, G_b, G_c, purtând pe perpendicularele din G pe laturi, segmente proporţionale în raport $k = 2/3$. $G_a G_b G_c$ este deci un triunghiu T'.

Rezultă că *triunghiurile* ABC, $G_a G_b G_c$ *au acelaşi centru de greutate; laturile triunghiului* $G_a G_b G_c$ *sunt proporţionale în raport* $2k = \frac{4}{3}$, *cu medianele. Raportul ariilor celor două triunghiuri este* $3k^2 = \frac{4}{3}$S. [Problema 4364 a D-lui V. THÉBAULT, G. M. XL—421 [1]), este astfel din nou rezolvată].

* * *

Fie M, confundat în K, punctul LEMOINE al triunghiului, adică punctul ale cărui proiecţii de unghiu oarecare φ, pe laturi, sunt proporţionale pe acestea, în raport k,

$$k = \frac{2S \sin\varphi}{a^2+b^2+c^2} = \frac{\operatorname{tg}\omega}{2} \sin\varphi$$

ω fiind unghiul lui BROCARD: ($\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C$). Se regăsesc astfel proprietăţile punctului K:

Punctul LEMOINE *este centrul de greutate al triunghiului său copodar* T' (înscris în T); *laturile triunghiului* T' *sunt înclinate de acelaşi unghiu* φ, *pe mediane, în sens invers, şi proporţionale cu acestea de raport* $\operatorname{tg}\omega \cdot \sin\varphi$. *Aria triunghiului* T' *este egală cu* $3k^2S$,

$$S' = \frac{12\, S^3 \sin^2\varphi}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Avem încă

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = \frac{12\, S^2 \sin^2\varphi}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

---

1) Este interesant de a menţiona în numărul din Mai 1935 din G. M. trei chestiuni, ce se pot deduce din aceeaşi însuşire.

Relaţiile se simplifică pentru $\varphi = \frac{\pi}{2}$; T' este atunci triunghiul podar al punctului K.

* * *

Proprietăţile punctului LEMOINE, care se întâlnesc disparat, sunt astfel concentrate într'o singură particularizare.

N. N. MIHĂILEANU.

NOTE MATEMATICE

47. *Acum o sută de ani în lumea matematică. Date culese în biblioteca Seminarului Matematic din Iaşi din publicaţiile timpului.*

Cităm din prefaţa cărţii lui M. CHASLES „*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, suivi d'un mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science; la dualité et l'homographie*", Gauthier-Villars, Paris, 1837 (ed. a 2-a, 1875; ed. a 3-a, 1889), care consacră renaşterea metodelor sintetice în geometrie.

„Ne propunem să dăm în această „Dare de seamă" o analiză rapidă a descoperirilor principale, care au adus geometria pură la gradul de desvoltare pe care îl are astăzi. Am insistat, în particular, asupra descoperirilor care au condus la metodele recente... După „Darea de seamă" urmează mai multe note. Ele nu se puteau înlătura deoarece n'am urmărit numai scopul istoric în alcătuirea lucrării noastre. Schiţând desvoltarea geometriei şi istoricul descoperirilor şi doctrinelor sale, am dorit să arăt, mai ales, uşurări nouă aduse de ele în toate ramurile ştiinţii întinderii şi să subliniez mijloacele moderne spre a ajunge la o generalizare, până astăzi necunoscută, a tuturor adevărurilor geometrice. Până acum numai Analiza juca acest rol prin aplicaţiile ei la geometrie... Din „Darea de seamă" a noastră reese limpede că metodele puternice cu care s'a îmbogăţit geometria în ultimii treizeci de ani se pot compara şi întrece, într'un domeniu foarte larg de chestiuni, cu

metodele analitice... Să nu înţelegem însă greşit scopul şi sentimentele noastre faţă de aceste două metode ale ştiinţelor matematice Admiraţia ce o avem pentru metoda analitică, aşa de puternică astăzi, e fără margini. Nu-i opunem metoda geometrică în orice chestiune din matematică. Convinşi însă de utilitatea oricărei metode nouă pentru căutarea adevărurilor matematice,..., am arătat, cât mi-a fost cu putinţă,..., că doctrinele geometriei pure oferă dese ori o cale simplă şi naturală pentru pătrunderea până'n originile adevărurilor şi pun în evidenţă lanţul misterios care le uneşte, dându-ne posibilitatea să le cunoaştem, fiecare în parte, în chipul cel mai luminos şi cel mai complect posibil".

48. *Propoziţie de aritmetică. Dacă un număr de* $2n$ *cifre, scris în sistemul de bază* B, *este multiplul unui divizor al lui* $B^n - 1$, *numerele de* $2n$ *cifre obţinute prin permutaţii circulare ale cifrelor primului număr sunt de asemeni multipli ai unui divizor al lui* $B^n - 1$.

Fie N un număr de $2n$ cifre începând cu $a \neq 0$, celelalte $2n-1$ cifre formând un număr M. Avem

$$N = a \cdot B^{2n-1} + M. \tag{1}$$

Numărul N' obţinut din N prin trecerea lui a la sfârşit este

$$N' = B \cdot M + a.$$

Fie

$$N = kp$$

unde p este un divizor al lui $B^n - 1$. Vom avea din (1)

$$M = kp - a\,B^{2n-1}$$

şi deci succesiv

$$N' = B \cdot kp - a\,B^{2n} + a = Bkp - a\,(B^{2n} - 1) = Bkp - a(B^n - 1)(B^n + 1).$$

Cum p divide pe $B^n - 1$ prin ipoteză, rezultă că şi N' se divide prin p.

Se ajunge la un rezultat analog făcând celelalte permutaţii circulare posibile cu cele $2n$ cifre ale lui N.

Iată un raţionament mai concis.

Să considerăm numerele

$$N = a\,a_1\,a_2 \ldots a_{2n}, \qquad N' = a_{2n}\,a\,a_1 \ldots a_{2n-1}$$

Se vede că

$$B \times (a_{2n}\,a\,a_1 \ldots a_{2n-1}) - a\,a_1\,a_2 \ldots a_{2n}) = (B^{2n} - 1)\,a_{2n}$$
$$= (B^n - 1)(B^n + 1)\,a_{2n}.$$

Deci dacă $B^n - 1$ divide pe N, va divide şi pe

$$B \times (a_{2n}\, a\, a_1\, a_2 \ldots a_{2n})$$

şi cum este prim cu B, va divide pe $a_{2n}\, a\, a_1 \ldots a_{2n-1}$.

V. THÉBAULT
(Le Mans, Franţa).

49. *Numere interesante de 10 cifre diferite*[1]). Pentru $p = 3$ am găsit următoarele 248 soluţiuni din soluţiunile ecuaţiunei

$$N = p \times N_p$$

în care atât N_p cât şi N încep cu cifra zero.

N_3	N	N_3	N
041 579 862	0 124 739 586	047 651 289	0 142 953 867
041 652 789	0 124 958 367	047 652 891	0 142 958 673
041 652 879	0 124 958 637	048 597 612	0 145 792 836
041 796 582	0 125 389 746	048 597 621	0 145 792 863
041 978 256	0 125 934 768	048 765 129	0 146 295 387
042 157 986	0 126 473 958	048 765 291	0 146 295 873
042 159 786	0 126 479 358	048 927 651	0 146 782 953
042 179 658	0 126 538 174	048 975 126	0 146 925 378
042 196 578	0 126 589 634	048 976 125	0 146 928 375
042 561 798	0 127 685 394	048 976 251	0 146 938 753
042 561 978	0 127 685 934	049 128 765	0 147 386 295
045 761 982	0 137 285 946	049 287 651	0 147 862 953
045 762 198	0 137 286 594	049 758 612	0 149 275 836
045 819 762	0 137 459 286	049 857 612	0 149 572 836
045 821 976	0 137 465 928	049 857 621	0 149 572 863
045 976 182	0 137 928 546	049 875 126	0 149 625 378
045 976 218	0 137 928 654	049 876 125	0 149 628 375
045 981 762	0 137 945 286	049 876 251	0 149 628 753
045 982 176	0 137 946 528	051 248 976	0 153 746 928
046 175 982	0 138 527 946	051 249 876	0 153 749 628
046 197 582	0 138 592 746	051 276 489	0 153 829 467
046 217 598	0 138 652 794	051 287 649	0 153 862 947
046 219 758	0 138 659 274	051 642 789	0 154 928 367
047 598 612	0 142 795 836	051 642 879	0 154 928 637

1) Urmare la nota dela pag. 414.

N_3	N	N_3	N
052 764 891	0 158 294 673	062 159 784	0 186 479 352
052 789 164	0 158 367 492	062 174 598	0 186 523 794
052 879 164	0 158 637 492	062 197 458	0 186 592 374
054 179 826	0 162 539 478	062 489 751	0 187 469 253
054 197 826	0 162 593 478	062 498 751	0 187 496 253
054 861 978	0 162 785 934	062 541 978	0 187 625 934
056 241 978	0 168 725 934	064 152 789	0 192 458 367
056 417 829	0 169 253 487	064 152 879	0 192 458 637
056 417 928	0 169 253 784	064 195 782	0 192 597 346
056 427 819	0 169 283 457	064 219 578	0 192 659 734
056 427 918	0 169 283 754	064 278 915	0 192 836 745
057 461 982	0 172 385 946	064 287 915	0 192 863 745
057 462 198	0 172 386 594	064 751 289	0 194 253 867
057 498 612	0 172 495 836	064 752 891	0 194 258 673
057 819 642	0 173 458 926	064 875 129	0 194 625 387
057 964 218	0 173 892 654	064 875 291	0 194 625 873
057 984 162	0 173 952 486	064 891 275	0 194 673 825
057 984 216	0 173 952 648	064 892 751	0 194 678 253
057 986 142	0 173 958 426	064 928 751	0 194 786 253
058 217 964	0 174 653 892	065 127 489	0 195 382 467
058 219 746	0 174 659 238	065 128 749	0 195 386 247
058 497 612	0 175 492 836	065 142 789	0 195 428 367
058 497 621	0 175 492 863	065 274 891	0 195 824 673
059 746 218	0 179 238 654	065 287 914	0 195 863 742
059 746 182	0 179 238 546	065 417 829	0 196 253 487
059 748 612	0 179 245 836	065 417 928	0 196 253 784
059 784 162	0 179 352 486	065 418 279	0 196 254 837
059 784 216	0 179 352 648	065 427 819	0 196 283 457
059 786 142	0 179 358 426	065 427 918	0 196 283 754
059 817 462	0 179 452 386	065 794 182	0 197 382 546
059 847 612	0 179 542 836	065 794 218	0 197 382 654
059 821 746	0 179 465 238	065 817 942	0 197 453 826
061 579 842	0 184 739 526	071 248 965	0 213 746 895
061 745 982	0 185 237 946	071 249 856	0 213 749 568
061 974 582	0 185 923 746	071 254 986	0 213 764 958

N_3	N	N_3	N
071 285 649	0 213 856 947	085 964 712	0 257 894 136
071 459 862	0 214 379 586	085 964 721	0 257 894 163
071 465 289	0 214 395 867	085 971 462	0 257 914 386
071 598 462	0 214 795 386	086 145 972	0 258 437 916
071 946 582	0 215 839 746	086 254 971	0 258 764 913
071 964 582	0 215 893 746	086 495 712	0 259 487 136
071 982 456	0 215 947 386	086 495 721	0 259 487 163
072 159 846	0 216 479 538	086 547 129	0 259 641 387
072 196 458	0 216 589 374	086 547 291	0 259 641 873
072 546 198	0 217 638 594	086 549 127	0 259 647 381
072 549 861	0 217 649 583	086 549 271	0 259 647 813
072 865 491	0 217 596 473	086 594 712	0 259 784 136
072 891 465	0 218 674 395	086 594 721	0 259 784 163
072 891 465	0 218 674 395	087 127 965	0 261 374 895
072 891 645	0 218 674 935	087 146 529	0 261 439 587
081 946 572	0 245 938 716	087 164 529	0 261 493 587
081 972 456	0 245 917 368	087 249 651	0 261 748 953
082 194 657	0 246 593 871	087 264 951	0 261 794 853
082 196 457	0 246 589 371	087 291 465	0 261 874 395
082 456 197	0 247 368 591	087 291 645	0 261 874 935
082 546 197	0 247 638 591	089 146 527	0 267 439 581
084 597 162	0 253 791 486	089 164 527	0 267 493 581
084 597 216	0 253 791 648	089 271 465	0 267 814 395
084 615 972	0 253 847 916	089 271 645	0 267 814 935
084 621 597	0 253 864 791	089 471 265	0 268 413 795
084 965 712	0 254 897 136	089 472 651	0 268 417 953
084 971 256	0 254 913 768	089 526 471	0 268 579 413
084 972 561	0 254 917 683	089 647 125	0 268 941 375
085 497 126	0 256 491 378	089 651 247	0 268 953 741
085 612 497	0 256 837 491	089 652 471	0 268 957 413
085 624 971	0 256 874 913	089 716 245	0 269 148 735
085 647 129	0 256 941 387	089 724 516	0 269 173 548
085 647 291	0 256 941 873	089 724 615	0 269 173 845
085 649 127	0 256 947 381	089 725 146	0 269 175 438
085 649 271	0 256 947 813	089 726 145	0 269 178 435

N_3	N	N_3	N
091 285 647	0 273 856 941	097 124 856	0 291 374 568
091 286 547	0 273 859 641	097 145 862	0 291 437 568
091 465 287	0 274 395 861	097 158 462	0 291 475 386
091 645 287	0 274 935 861	097 182 456	0 291 547 368
092 856 471	0 278 569 413	097 245 318	0 291 736 854
092 865 471	0 278 596 413	097 348 581	0 291 745 683
092 871 465	0 278 614 395	097 254 618	0 291 763 854
092 871 645	0 278 614 935	097 254 861	0 291 764 583
094 657 182	0 283 971 546	098 172 456	0 294 517 368
094 657 218	0 283 971 654	098 254 617	0 294 763 851
094 658 172	0 283 974 516	098 457 162	0 295 371 486
094 658 271	0 283 974 813	098 457 216	0 295 371 648
094 865 712	0 284 597 136	098 461 572	0 295 384 716
094 865 721	0 284 597 163	098 462 157	0 295 386 671
094 871 265	0 284 613 795	098 471 256	0 295 413 768
094 872 651	0 284 617 953	098 472 561	0 295 417 683
095 126 487	0 285 379 461	098 547 126	0 295 641 372
095 264 871	0 285 794 613	098 547 261	0 295 641 783
095 864 712	0 287 594 136	098 561 247	0 295 683 741
095 864 721	0 287 594 163	098 562 471	0 295 687 413
096 457 182	0 289 371 546	098 571 462	0 295 714 386
096 457 218	0 289 371 654	098 612 547	0 295 837 641
096 458 172	0 289 372 516	098 614 572	0 295 843 716
096 458 217	0 289 374 651	098 621 457	0 295 864 371
096 485 712	0 289 457 136	098 625 471	0 295 876 413
096 485 721	0 289 457 163	098 716 245	0 296 148 735
096 487 125	0 289 461 375	098 724 516	0 296 173 548
096 524 871	0 289 574 613	098 724 615	0 296 173 845
096 584 712	0 289 754 136	098 725 146	0 296 175 438
096 584 721	0 289 754 163	098 726 145	0 296 178 435

Numerele din acest tabel sunt soluţiuni ale problemei de care m'am ocupat în *Revista Matematică* din *Timişoara* Vol. XVI în notele de la paginele 80, 92, 117, 129 şi 140 şi anume:

Luând o singură dată cifrele semnificative, să se formeze un număr care divizat prin 3, să dea un cât format din cele 8 cifre diferite de 3.

G-L GH. BUICLIU.

50. *Asupra problemei 4716.* Când am propus această problemă am crezut că nu este cunoscută. Ulterior, răsfoind colecţia „Revistei Matematice din Timişoara" am găsit că chestiunea a mai fost propusă de D-l D. V. IONESCU în această revistă şi anume în Vol. III (Anul 1923) pag. 94, problema 274.

G. D. S.

CHESTIUNI DE EXAMEN

EXAMENUL DE CAPACITATE

Pentru profesoare

PROBLEME DE LICENŢĂ

I. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$9y'' - 6y' + y = 0$$

şi apoi,

1°. Să se determine soluţiile care pentru $x = 0$ iau valoarea $y = 2$.

2°. In soluţia generală mai rămânând o constantă arbitrară, se va pune $\frac{y'}{y} = u$ şi se va forma ecuaţia lui RICCATI la care satisface funcţiunea $u(x)$.

II. 1°. Să se determine liniile asimptotice ale suprafeţei S a cărei ecuaţie în coordonate carteziene dreptunghiulare este

$$z = a\frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

2°. Să se determine traiectoriile ortogonale ale proecţiilor acestor linii pe planul xOy.

III. Un punct material M de masă egală cu 1, care se mişcă în planul xOy, este supus la acţiunea unei forţe perpendiculare pe Oy, egală cu $\frac{k^2}{MP^3}$ şi de sens contrar lui MP, P fiind proecţia lui M pe Oy, iar k o constantă. La momentul iniţial $t = 0$, punctul material este pe axa Ox în punctul M_0 de abscisă a, şi are o vitesă v_0 care face cu Ox un unghiu α cuprins între 0 şi π.

1°. Să se arate că traiectoria punctului material este o iperbolă (l). Să se găsească centrul şi axele ei. 2° Poziţia iniţială M_0 $(a, 0)$ şi vitesa iniţială fiind date, să se determine α astfel ca traiectoria să treacă prin punctul dat

Q (x_1, y_1). Se va arăta că, pentru ca problema să fie posibilă, Q trebue să fie în interiorul unei iperbole (Δ). 3° Fie A punctul unde iperbola (Δ) taie axa Ox şi F focarul iperbolei (I) care corespunde la $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Să se arate că locul geometric al focarelor iperbolelor (I) din regiunea $x \geqslant 0$, este cercul descris pe AF ca diametru. Să se arate că F este centrul de curbură al iperbolei Δ în A.

PROBLEME DE LICEU

I. Să se studieze rădăcinile ecuaţiei

$$(1 + m)\, x^2 - 2mx + m - 3 = 0,$$

când parametrul m parcurge toate valorile dela $-\infty$ la $+\infty$. Se vor semnala rădăcinile pentru valori particulare ale lui m, între care şi $m = \infty$.

II. Se consideră un trapez ABCD, baza mică fiind $AB = a$, iar laturile neparalele fiind BC şi AD. Pe laturile neparalele se construesc în afara trapezului pătratele BB'C'C, AA'D'D. Se notează cu G înălţimea trapezului şi $\lambda = \operatorname{cotg} ADC$, $\mu = \operatorname{cotg} BCD$. Perpendiculara în mijlocul M al lui AB pe AB întâlneşte pe A'B' în N. 1°. Să se demonstreze că N este mijlocul lui A'B'. 2°. Să se demonstreze că

$$MN = \frac{DC - AB}{2}, \qquad \overline{A'B'}^2 = a^2 + 4ah + h^2[4 + (\lambda - \mu)^2],$$

şi că

$$\text{aria } ABB'A' = \frac{h(a + h)(\lambda + \mu)}{2}.$$

III. Se consideră funcţiunea (1) $y = x\sqrt{\frac{a}{4x - a}}$ unde a este constantă.

1°. Să se studieze variaţia funcţiunii y şi a derivatei y' şi să se construiască curbele reprezentative. 2° Din reprezentarea grafică a derivatei, să se deducă numărul de tangente la curba (1) paralele cu o dreaptă dată de coeficient unghiular m, după diferitele valori ale lui m.

BIBLIOGRAFIE

Anales dela Sociedad Cientifica Argentina. Octomvrie 1934. Grupa IV. Tom. CXVIII. Buenos Aires.

Idem. Septemvrie 1936. Grupa III. Tom. CXXII.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXIII. No. 2. Aprilie — Iunie 1937. Iaşi.

Journal de mathématiques élémentaires, publicat de H. VUIBERT. Anul 61. No. 19. 1 Iulie 1937. Paris.

Idem. No. 20. 15 Iulie 1937.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVII, No. 5. Iulie 1937. Sisteme de ecuaţiuni rezolvate cu ajutorul formulelor lui NEWTON, de IOAN C. SAVIN.

Sphinx. Revue mensuelle des questions récréatives. Director M. KRAÏTCHIK. Anul VII. No. 8. August 1937. Bruxel.

The mathematical Gazette. Vol. XXI. No. 244. Iulie 1937. Londra. Logaritmii în interpolare de N. M. GIBBINS. Soluția ecuațiilor cu ajutorul diferențelor proporționale de F. C. BOON. Teoreme asupra tetraedrului de R. T. ROBINSON. O simplă teoremă geometrică și câteva aplicații de W. I. DOBBS. Asupra reprezentării cercurilor cu ajutorul punctelor în spațiul cu trei dimensiuni de D. PEDOE. Calcul fracțional de G. TEMPLE.

VICTOR MARIAN. *Aritmetica lui* G. ȘINCAI. (Extras din «*Țara Bârsei*»). Brașov 1937.

CESAR D. ORĂȘANU. *Proecțiunea Colonelului* BONNE *în România.* (Extras din «*Buletinul Cadastral*». Vol. I. No. 2). București 1937.

Natura. Anul XXVI. No. 7. Iulie 1937. București. Linia și compasul în Geometria vechilor greci, de M. HAIMOVICI.

CERERI

268. Care sunt inginerii fără studii universitare care au profesat la Universitățile noastre ?

In vechea lege a Instrucțiunii publice nu se cerea pentru catedrele universitare de cât Bacalaureatul, astfel că inginerii care aveau acest titlu puteau fi profesori universitari.

I. I.

DIVERSE

Sporirea bibliotecii.

EMILE VIGARIÉ. Esquise historique sur la marche du développement de la géométrie du triangle. Paris 1899.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

THÉODORE CRIVETZ. Essai sur le postulat d'EUCLIDE. București 1895.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4191. *Să se găsească un patrat de opt cifre așa ca numărul format de cele patru cifre din mijloc și rădăcina sa să fie două numere consecutive.*

V. THÉBAULT.

Soluţia. Condiţiile enunţului impun examinarea următoarelor 2 cazuri.

(I) $N^2 = ab \times 10^6 + (N+1) \times 10^2 + cd$

(II) $N^2 = ab \times 10^6 + (N-1) \times 10^2 + cd$

unde N este un număr de 4 cifre, iar *ab*, *cd* sunt numere de câte 2 cifre.

Cazul I. Din (I) se scoate

$$N = 50 \pm \sqrt{2500 + ab \times 10^6 + cd + 100}.$$

Sau luând numai semnul + pentru ca N să aibă mai mult de 2 cifre şi făcând operaţiunile de sub radical, se găseşte

(I) $N = 50 + \sqrt{ab\ 0026\ cd}.$

Numărul $ab\,0026\,cd$ trebuie să fie patrat perfect.

Problema ce se pune acum este deci de a *găsi numerele ale căror patrate de 8 cifre sunt de forma* **ab 0026 cd.**

Această problemă se rezolvă în felul următor:

Se iau pe rând terminaţiunile *cd* ale patratelor perfecte şi se caută forma rădăcinelor care corespund acestor terminaţiuni. De exemplu se găseşte că numerile ale căror patrate se termină în 24 sunt de forma

(2) $M_1 = 50n \pm 18.$

Plecând de la M_1 se determină valoarea lui n pentru ca M_1^2 să se termine în 624 şi se găseşte

(3) $M_1 = 500n \pm 68$

după metoda dată în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVII, pag. 366 în articolul *„Asupra ultimului grup de p cifre ale patratelor perfecte“*.

Plecând de la (3) se caută forma lui M_1 pentru care M_1^2 se termină cu 2624 şi se găseşte

(4) $M_1 = 2500n \pm 568.$

Dând lui n valorile 0, 1, 2, 3, 4 se găseşte că M_1 ar putea fi între numerele

568, 1932, 3068, 4432, 5568, 6932, 8068, 9432.

Procedând pe această cale cu toate valorile pe care le poate avea *cd* se găsesc toate valorile pe care le-ar putea avea M_1, la care adăugând 50 se găsesc toate valorile pe care le-ar putea avea N. Rezultatele sunt înscrise în tabelul ce urmează:

Ultimele 4 cifre ale lui M_1	Forma generală a lui M_1	Valori posibile pentru M_1	Valori posibile pentru N
2601	$5000\,n \pm 51$ . . . . . . $5000\,n \pm 1301$	51 ; 4949 ; 5051, 9949 . . . . . . 1301, 3699, 6301, 8699	101 ; 4999, 5101, 9999 . . . . . . 1351, 3749, 6351, 8749
2609	$5000\,n \pm 2103$ . . . . . . $5000\,n \pm 1647$	2103, 2897, 7103, 7897 . . . . . . 1647, 3353, 6647, 8353	2153, 2947, 7153, 7947 . . . . . . 1697, 3403, 6697, 8403
2624	$2500\,n \pm 568$	1932, 3068, 4432, 5568, 6932, 8068, 9432	1982, 3118, 4482, 5618, 6982, 8118, 9482
2644	$2500\,n \pm 1238$	1238, 1262, 3738, 3762, 6238, 6262, 8738, 8762	1418, 1312, 3788, 3812, 6288, 6312, 8788, 8812
2649	$5000\,n \pm 907$ . . . . . . $5000\,n \pm 2843$	907, 4093, 5907, 9093 . . . . . . 2157, 2843, 7157, 7843	957, 4143, 5957, 9143 . . . . . . 2207, 2893, 7207, 7893
2656	$2500\,n \pm 716$	716, 1784, 3216, 4284, 5716, 6784, 8216, 9284	766, 1834, 3266, 4334, 5766, 6834, 8266, 9334
2676	$2500\,n \pm 1026$	1026, 1474, 3526, 3974, 6026, 6474, 8526, 8974	1076, 1524, 3576, 4024, 6076, 6524, 8576, 9024
2681	$5000\,n \pm 541$ . . . . . . $5000\,n \pm 709$	541, 4459, 5541, 9459 . . . . . . 700, 4291, 5709, 9291	591, 4509, 5591, 9509 . . . . . . 759, 4341, 5759, 9341
2689	$5000\,n \pm 1383$ . . . . . . $5000\,n \pm 2367$	1383, 3617, 6383, 8617 . . . . . . 2367, 2633, 7367, 7633	1433, 3667, 6433, 8667, ... 2417, 2683, 7417, 7683

Ridicând la patrat toate numerele din coloana lui N se găseşte unica soluţie

$$\mathbf{5618} = 31 . \mathbf{5619} . 24$$

şi soluţia de formă

$$\mathbf{0101} = 00 . \mathbf{0102} . 01.$$

Cazul II. Din (II) se scoate:

$$N = 50 \pm \sqrt{ab\,0024\,cd}.$$

Luând numai semnul + şi patratele terminate în 24 *cd* se construeşte, ca şi la I, următorul tabel:

Ultimele 4 cifre ale lui M_1	Forma generală a lui M_1	Valorile posibile pentru M_1	Valorile posibile pentru N
2400	$500\,n \pm 320$	320, 820, 1320, 1820, 2320, 2820, 3320, 3820, 4320, 4820, 5320, 5820, 6320, 6820, 7320, 7820, 8320, 8820, 9320, 9820; 180, 680, 1180, 1680, 2180, 2680, 3180, 3680, 4180, 4680, 5180, 5680, 6180, 6680, 7180, 7680, 8180, 8680, 9180, 9680	370, 870, 1370, 1870, 2370, 2870, 3370, 3870, 4370, 4870, 5370, 5870, 6370, 6870, 7370, 7870, 8370, 8870, 9370, 9870, 230, 730, 1230, 1730, 2230, 2730, 3230, 3730, 4230, 4730, 5230, 5730, 6230, 6730, 7230, 7730, 8230, 8730, 9230, 9730
2401	$5000\,n \pm 49$ . . . . . . $5000\,n \pm 1201$	49, 4951, 5049, 9951 . . . . . . 1201, 3799, 6201, 8799	99, 5001, 5099, ... 1251, 3849, 5251, 8849
2404	$2500\,n \pm 602$	602, 1898, 3102, 4398, 5602, 6102, 6898, 8602, 9398	652, 1948, 3152, 4448, 5652, 6152, 6948, 8652, 9448
2409	$5000\,n \pm 403$ . . . . . . $5000\,n \pm 1653$	403, 4597, 5403, 9597 . . . . . . 1653, 3347, 6653, 8347	453, 4647, 5453, 9647 . . . . . . 1703, 3397, 6703, 8397

Ultimele 4 cifre ale lui M_1	Forma generală a lui M_1	Valorile posibile pentru M_1	Valorile posibile pentru N
2416	$2500\,n \pm 2196$	304, 2196, 2804, 4696, 5304, 7196, 7804, 9696	354, 2246, 2854, 4746, 5354, 7246, 7854, 9746
2436	$2500\,n \pm 206$	206, 2294, 2706, 4794, 5206, 7294, 7706, 9794	256, 2344, 2756, 4844, 5256, 7344, 7756, 9844
2449	$5000\,n \pm 521$ . . . . . . $5000\,n \pm 229$	521, 4479, 5521, 9479 . . . . . . 229, 4771, 5229, 9771	571, 4529, 5571, 9529 . . . . . . 279, 4521, 5279, 9821
2464	$2500\,n \pm 1092$	1092, 1408, 3592, 3908, 6092, 6408, 8592, 8908	1142, 1458, 3442, 3958, 6142, 6458, 8642, 8948
2481	$5000\,n \pm 559$ . . . . . . $5000\,n \pm 1809$	559, 4441, 5559, 9441 . . . . . . 1809, 3191, 6809, 8191	609, 4491, 5609, 9491 . . . . . . 1859, 3241, 6859, 8241
2484	$2500\,n \pm 522$	522, 1978, 3022, 4478, 5522, 6978, 8022, 9478	572, 2028, 3072, 4528, 5572, 7028, 8072, 9528
2489	$5000\,n \pm 1683$ . . . . . . $5000\,n \pm 2067$	1683, 3317, 6683, 8317 . . . . . . 2067, 2933, 7067, 7933	1733, 3367, 6733, 8367 . . . . . . 2117, 2983, 7117, 7983
2496	$2500\,n \pm 2126$	364, 2136, 2864, 4636, 5364, 7136, 7864, 9636	414, 2186, 2914, 4686, 5414, 7186, 7914, 9686

Ridicând la patrat numerele din coloana lui N se găseşte soluţia $\mathbf{3367}^2 = 11\,\mathbf{3366}\,89$
şi soluţia de formă
$$\mathbf{0099}^2 = 00\,\mathbf{0098}\,01.$$

S'a primit o soluţie necompletă şi neriguroasă de la un rezolvitor anunţat la timp pe copertă.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4288. *Se consideră determinantul circular de ordinul* n:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \ldots x_n \\ x_n & x_1 & x_2 \ldots x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_n & x_1 \ldots x_{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_2 & x_3 & x_4 \ldots x_1 \end{vmatrix}.$$

Să se arate că dacă n *este par, în desvoltarea acestui determinant nu se află termenul* $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_n$.

N. BOTEA.

Soluție dată de D-l O. SACTER. Fie D valoarea determinantului; se știe că dacă însemnăm rădăcinile ecuației $x^n - 1 = 0$ prin $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ atunci:

$$D = (x_1\omega_1 + x_2\omega_1^2 + \ldots + x_n\omega_1^n)(x_1\omega_2 + x_2\omega_2^2 + \ldots + x_n\omega_2^n)\ldots$$
$$\ldots(x_1\omega_n + x_2\omega_n^2 + \ldots + x_n\omega_n^n)$$

deci coeficientul termenului $x_1x_2\ldots x_n$ din desvoltarea de mai sus va fi:

(1) $\Sigma\, \omega_1^{i_1}\omega_2^{i_2}\ldots\omega_n^{i_n}$, indicii de sus fiind numerile $1, 2, \ldots n$ supuse la toate permutările posibile.

Expresia (1) se află calculată în „Culegerea de probleme de D-l IOACHIMESCU pag. 160"; ea este egală cu 0 sau $(-1)^{n-1}(n-1)!\, n$ după cum suma

$$i_1+i_2+\ldots+i_n = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

nu este sau este un multiplu de n.

Fie $n = 2p$; în acest caz $\frac{n(n+1)}{2} = pn + p$ care nu este multiplu de n, deci Σ este 0, prin urmare în determinant va lipsi termenul $x_1x_2\ldots x_n$, ceeace trebuia demonstrat. In cazul când n este impar atunci

$$\frac{n(n+1)}{2} = \mathcal{M}n, \text{ deci } \Sigma\, \omega_1^{i_1}\ldots\omega_n^{i_n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\, n.$$

Și prin urmare în acest caz coeficientul lui $x_1x_2\ldots x_n$ va fi $(-1)^{n-1}(n-1)!\, n$.

PROBLEMA 4344. *In triunghiul* ABC, AM *şi* AN *fiind două ceviene izogonale variabile, se cer locurile geometrice ale centrelor cercurilor lui* EULER *şi* TAYLOR *ale triunghiului* AMN.

C. IONESCU-BUJOR.

Soluţie dată de D-l I. I. ŢIŢEICA (elev Lic. Mânăstirea Dealu).

Fie H proecţia lui A pe BC — M', N' proecţiile lui H respectiv pe AM, AN — B_1, C_1, M_1, N_1 mijloacele segmentelor AB, AC, AM, AN.

Când izogonalele AM, AN variază, punctele M_1, N_1 descriu dreapta B_1C_1, astfel ca HM_1, HN_1 să fie izogonale în unghiul B_1HC_1 (rezultă din cauza simetriei).

Locul centrului cercului lui EULER este locul centrului cercului circumscris triunghiului HM_1N_1, adică izogonala înălţimei HA, faţă de unghiul M_1HN_1 sau B_1HC_1, evident fixă.

AM şi AN variind, dreapta M'N' păstrează o direcţie fixă perpendiculară pe izogonala înălţimei AH faţă de $\sphericalangle$ BAC. Centrul cercului lui TAYLOR al triunghiului AMN se găseşte pe dreapta fixă, perpendiculară din mijlocul lui AH pe M'N'.

C. I. B.

PROBLEMA 4418. *Intre ariile* S_1, S_2, S_3 *a trei cercuri ortogonale două câte două şi aria* S *a cercului determinat de centrele lor, există relaţia.*

$$\frac{(S_1+S_2)(S_2+S_3)(S_3+S_1)}{S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1}=4S.$$

C. IONESCU-BUJOR.

Fie O_1, O_2, O_3 centrele celor trei cercuri ortogonale considerate — r_1, r_2, r_3 razele lor, R raza cercului circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$. Se ştie că

$$r_1^2+r_2^2=\overline{O_1O_2}^2 \text{ etc., deci}$$

$$(r_1^2+r_2^2)(r_2^2+r_3^2)(r_3^2+r_1^2)=\overline{O_1O_2}^2\cdot\overline{O_2O_3}^2\cdot\overline{O_3O_1}^2=16R^2S^2 \qquad (1)$$

Considerăm şi relaţia [1])

$$r_2^2r_2^2+r_2^2r_3^2+r_3^2r_1^2=4S^2 \qquad (2)$$

---

1) C. IONESCU-BUJOR. Asupra cercurilor ortogonale G. M. pag. 455. Vol. XLII.

Divizând relaţiile (1) şi (2) obţinem

$$\frac{(r_1^2+r^2)(r_2^2+r_3^2)(r_3^2+r_1^2)}{r_1^2r_2^2+r_2^2r_3^2+r_3^2r_1^2}=4R^2.$$

Multiplicând numărătorul şi numitorul primului membru cu π^2 şi ambii membri cu π, obţinem relaţia enunţului.

Au soluţionat problema: Domnişoara DACIA S. MUSCELEANU (studentă, Bucureşti) şi D-nii: M. F. AMĂRĂŞTEANU (Colegiul naţional Carol I. Craiova), R. V. APOSTOL (Lic. Mânăstirea Dealu), E. BEIU-PALADI (Lic. Mihai Viteazul Bucureşti), V. CEAUŞESCU (Lic. militar Tg. Mureş), A. DOBRESCU (R. Sărat), I. C. DUMITRU (Acadânlar-Durostor), V. CSEKE (student, Cluj), V. FLORESCU (Lic. Mânăstirea Dealu), C. I. GHIŞOIU (student, Bucureşti), S-LT M. GRUMĂZESCU, D. I. LEBĂDĂ (Guranda), D. MAVRODIN, P. C. MAZILU (Şcoala Politechnică Bucureşti), M. NĂSTASE (Lic. militar Mânăstirea Dealu), MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila), M. I. PREDOESCU (Şcoala Politechnică Timişoara), M. C. POSTELNICESCU (Lic. militar Mânăstirea Dealu), I. N. SAGER, F. SAVOVICI (Şcoala ofiţeri Geniu), N. D. ŞTEFĂNESCU (Lic. militar «N. Filipescu»), I. ŞABAC.

C. I. B.

PROBLEMA 4502. *Fie dat tetraedrul* ABCD *având muchiile opuse perpendiculare;* A', B', C' *mijloacele muchiilor* BC, CA, AB; A_1, B_1, C_1 *proecţiunile punctului* D *pe aceste muchii. Planul paralel cu* B_1C_1 *dus prin* AD *taie planul* DB'C' *după dreapta* α. *Analog se obţin dreptele* β, γ *ducând prin* BC, CD *plane paralele respectiv cu* C_1A_1, A_1B_1 *şi intersectându-le cu* DC'A', DA'B'.

Să se arate că dreptele α, β, γ *sunt în acelaş plan perpendicular pe dreapta ce trece prin centrele sferelor* ABCD, A'B'C'D.

C. IONESCU-BUJOR.

Soluţie dată de D-nii: I. ŢIŢEICA (Liceul Mânăstirea Dealu) şi SERGIU TARASIUC.

Punctele A, B, C fiind proecţiile lui D pe muchiile BC, CA, AB, iar muchiile opuse ale tetraedrului fiind perpendiculare, rezultă că AA_1, BB_1, CC_1 sunt înălţimi ale triunghiului ABC — deci tetraedrul este ortocentric.

Planul dus prin AD, paralel la B_1C_1 taie planul ABC după dreapta AT, tangenta la cercul ABC.

Dreapta α uneşte deci punctul D cu D_a (AT, B'C').

Cum punctul D_a aparţine axului radical al cercurilor ABC, A'B'C' deoarece

$$\overline{AD_a^2} = \overline{B'D_a} \cdot \overline{C'D_a},$$

cum punctul D aparţine evident planului radical P al sferelor ABCD, A'B'C'D, rezultă că α este conţinută în planul P.

Analog se arată că dreptele β, γ aparţin planului P.

C. I. B.

PROBLEMA 4504. *Dacă* a *este pozitiv,* n *întreg şi* $b > 1$ *avem:*

$$1 < \sqrt[n]{a + b\sqrt[n]{a + b\sqrt[n]{a + \ldots\ldots}}} < 1 + a$$

când $a > b$, *şi*

$$1 < \sqrt[n]{a + b\sqrt[n]{a + b\sqrt[n]{a + \ldots\ldots}}} < 1 + b$$

când $b > a$.

N. BOTEA.

Şirul de numere pozitive:

$$u_1 = \sqrt[n]{a}$$

$$u_2 = \sqrt[n]{a + b\sqrt[n]{a}}$$

$$u_3 = \sqrt[n]{a + b\sqrt[n]{a + b\sqrt[n]{a}}}$$

. . . . . .

$$u_n = \sqrt[n]{a + b\sqrt[n]{a + b\sqrt[n]{a + \ldots\ldots}}} \quad (n \text{ radicali})$$

este crescător. Doi termeni consecutivi sunt legaţi prin relaţia

$$u_n^n - bu_{n-1} - a = 0 \qquad (1)$$

şi cum

$$u_n > u_{n-1}\,,\ b > 0$$

vom avea:

$$u_n^n - b\,u_n - a < 0\,. \tag{2}$$

Considerând ecuaţia:

$$f(x) = x^n - bx - a = 0 \tag{3}$$

teorema lui DESCARTES arată că admite o singură rădăcină r, reală şi pozitivă.

Rezultă că pentru:

$$0 < x < r$$

avem

$$x^n - bx - a < 0$$

iar pentru

$$x > r$$

$$x^n - bx - a > 0\,.$$

Deducem din (2) că oricare ar fi u_n avem:

$$u_n < r\,.$$

Termenii şirului:

$$u_1,\ u_2 \ldots u_n\,, \ldots$$

cresc deci cu n, dar rămân întotdeauna mai mici ca numărul fix r. Şirul admite astfel o limită l, mai mică sau egală cu r. Vom avea:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_{n-1} = l$$

şi din relaţia (1) deducem:

$$l^n - bl - a = 0\,.$$

Deci $l = r$

$$f(1) = 1 - b - a < 0\,.$$

Rezultă

$$r > 1$$

şi cum dela un rang destul de depărtat avem

$$|\,u_n - l\,| < \varepsilon$$

ε fiind arbitrar de mic, rezultă că pentru o valoare a lui n suficient de mare, avem

$$u_n > 1 .$$

Dacă $a > b$

$$f(1+a)=(1+a)^n-b(1+a)-a=(1+a)[(1+a)^{n-1}-b-1]+1>0 .$$

Rezultă $r < 1 + a$ şi cu atât mai mult $u_n < 1 + a$.

Dacă $a < b$

$$f(1+b)=(1+b)^n-b(1+b)-a=(1+b)[(1+b)^{n-1}-b]-a>0$$

şi $r < 1 + b$, iar $u_n \leqslant r < 1 + b$.

Au rezolvat problema D-nii: MARCEL AMĂRĂŞTEANU, GRIG. MARTEŞ, DIMITRIE MAVRODIN, PANAIT MAZILU şi TUDOR STOICESCU.

N. B.

PROBLEMA 4552. *Intr'un tetraedru* VABC, *a cărui faţă* ABC *este egal înclinată pe celelalte feţe, există relaţia*

$$\overline{VB}^2 + \overline{BC} \cdot \overline{CA} = \overline{VC}^2 + \overline{CB} \cdot \overline{BA}$$

şi alte două relaţii obţinute din aceasta, permutând circular literele A, B, C.

C. IONESCU-BUJOR.

1°. Inălţimea tetraedrului, corespunzătoare vârfului V, trece prin centrul cercului înscris triunghiului ABC.

In adevăr, VA' fiind înălţime a triunghiului VBC, după reciproca teoremei celor trei perpendiculare, IA' este perdendiculură pe BC, deci unghiul VA'I este unghiul plan corespunzător diedrului (VBCA). Analog, B' fiind proiecţia lui V pe AC, unghiul VB'I reprezintă unghiul plan corespunzător diedrului (VACB).

Unghiurile VA'I, VB'I fiind egale, urmează egalitatea triunghiurilor dreptunghiuri VA'I, VB'I, deci

$$\overline{IA'} = \overline{IB'} \quad \text{la fel} \quad \overline{IA'} = \overline{IC'}.$$

Fie M mijlocul muchiei BC. Din triunghiul VBC,

$$\overline{VB}^2 - \overline{VC}^2 = 2\overline{BC} \cdot \overline{A'M}.$$

Dar

$$\overline{A'M} = CM - \overline{CA'}$$

şi cu notaţiile obişnuite în triunghiul ABC

$$CA' = p - c \text{ [1]}$$

$$\overline{A'M} = \frac{a}{2} - (p - c) = \frac{c - b}{2}$$

$\overline{VB}^2 - \overline{VC}^2 = \overline{BC}\,(c - b)$, de unde se deduce relaţia cerută.

2°. Vârful V proectându-se pe faţa opusă în centrul cercului înscris triunghiului ABC, muchiile tetraedrului satisfac relaţiile problemei [2]).

3°. Au rezolvat problema D-nii: R. V. APOSTOL, I. CORNĂŢEANU, V. L. FLORESCU (Lic. N. Filipescu), V. CEAUŞESCU (Lic. militar Tg. Mureş), D. MAVRODIN (student), M. A. NEGREA (Brăila), I. S. NICOLESCU, M. C. POSTELNICESCU (Lic. Mânăstirea Dealu), C. V. PANTELIMON şi M. D. POPA (Lic. militar Iaşi), S-LT I. C. PAREPEANU, N. D. ŞTEFĂNESCU (Lic. militar N. Filipescu), I. I. ŢIŢEICA (Lic. militar N. Filipescu).

C. I. B.

PROBLEMA 4583. *Dacă vârful* V *al tetraedrului* VABC *se proiectează pe planul* ABC *în primul punct al lui* BROCARD *al triunghiului* ABC, *există relaţia*

$$\overline{VA}^2 \cdot \overline{BC}^2\,(\overline{BC}^2 \cdot \overline{CA}^2 - \overline{AB}^4) + \overline{VB}^2 \cdot \overline{CA}^2\,(\overline{CA}^2 \cdot \overline{AB}^2 - \overline{BC}^4)$$
$$+ \overline{VC}^4 \cdot \overline{AB}^2\,(\overline{AB}^2 \cdot \overline{BC}^2 - \overline{CA}^4) = 0.$$

C. IONESCU-BUJOR.

Ω fiind primul punct al lui BROCARD al triunghiului ABC, să notăm Ω_a proecţia punctului Ω pe BC şi A' mijlocul laturii BC.

---

1) T. LALESCO. La Géométrie du triangle (3. 7).

2) C. IONESCU-BUJOR. Asupra unor tetraedre. G. M. XLI, p. 77.

Cum $V\Omega_a$ este înălțime a triunghiului VBC,

$$\overline{VB}^2 - \overline{VC}^2 = 2\,\overline{BC}.\overline{\Omega_a A'}$$

$$\overline{\Omega B}^2 - \overline{\Omega C}^2 = 2\,\overline{BC}.\overline{\Omega_a A'}$$

și cum [1])

$$\Omega A = \frac{b\sin\omega}{\sin A},\ \omega \text{ fiind unghiul lui BROCARD, sau}$$

$$\Omega A = 2R\frac{b}{a}\sin\omega,$$

deducem

$$\overline{VB}^2 - \overline{VC}^2 = \overline{\Omega B}^2 - \overline{\Omega C}^2 = 4R^2\sin^2\omega\left(\frac{c^2}{b^2} - \frac{a^2}{c^2}\right) = 4R^2\sin^2\omega\left(\frac{c^4 - a^2b^2}{b^2c^2}\right).$$

Deci

$$\frac{(\overline{VB}^2 - \overline{VC}^2)\,b^2c^2}{c^4 - a^2b^2} = \frac{(\overline{VC}^2 - \overline{VA}^2)\,c^2b^2}{a^4 - b^2c^2} = 4R^2\sin^2\omega,$$

urmează

$$(\overline{VB}^2 - \overline{VC}^2)(a^4b^2 - b^4c^2) = (\overline{VC}^2 - \overline{VA}^2)(a^2c^4 - a^4b^2)$$

sau

$$a^2.\overline{VA}^2.(a^2b^2 - c^4) + b^2.\overline{VB}^2.(b^2c^2 - a^4) + c^2.\overline{VC}^2(c^2a^2 - b^4) = 0.$$

Au soluționat problema D-nii: MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila) și VICTOR L. FLORESCU (Liceul militar „N. Filipescu", Mânăstirea Dealu).

C. I. B.

PROBLEMA 4585. *Să se verifice identitățile:*

$$(xy + yz + zx)^2\ (x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx) - xyz\,(x + y + z)^3$$

$$\equiv (x+y+z)^2(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 + xyz^2 + yzx^2 + zxy^2) - (xy + yz + zx)^3$$

$$\equiv (x^2 + y^2 + xy)\,(y^2 + z^2 + yz)\,(z^2 + x^2 + xz).$$

N. BOTEA.

---

1) T. LALESCO. La Géométrie du triangle (17, 19).

1°. *Soluție* dată de D-nii: MARCEL AMĂRĂȘTEANU, IACOB COTIGHER, D. MAVRODIN, GAVRIL POPOVICIU, O. SACTER. Notăm:

$$x+y+z=a,\quad xy+yz+zx=b,\quad xyz=c\,.$$

Rezultă

$$y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+xyz^2+yzx^2+zxy^2=b^2-ac$$

$$x^2+y^2+xy=a\,(a-z)-b\,,\ \text{etc.}$$

$$(x^2+y^2+xy)\,(y^2+z^2+yz)\,(z^2+x^2+xz)=[a\,(a-z)-b]$$

$$[a\,(a-x)-b]\,[a\,(a-y)-b]=a^3\,(ab-c)-a^2b\,(a^2+b)+2a^2b^2-b^3\,.$$

Identitățile din enunț se vor scrie:

$$b^2\,(a^2-b)-ca^3\equiv a^2\,(b^2-ac)-b^3\equiv a^3\,(ab-c)-a^2b\,(a^2+b)$$
$$+2a^2b^2-b^3$$

formă sub care se verifică ușor.

2°. *Soluție* dată de D-nii: LIVIU BIVOLARU, IOAN BUZINCU, VASILE CARAMAN, PETRU COJOCARU, VICTOR FLORESCU, CONST. GAVRILESCU, MIRCEA GRUMĂZESCU, HAR. IOACHIM, ALEXANDRU JIPA, PETRE MAMUT, EUGEN MARCOVICI, GRIG. MARTEȘ, DUMITRU MIHALCEA, MIRCEA LEONTE NEGREA, MIRCEA POPA, LIVIU RADU POPOVICI, NICOLAE PUNGĂ, VIRGIL STĂNCULESCU, NICOLAE ȘTEFĂNESCU. Plecând dela prima parte se poate scrie:

$$(xy+yz+zx)^2\,(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)-xyz\,(x+y+z)^3$$
$$=(xy+yz+zx)^2\,[(x+y+z)^2-(xy+yz+zx)]$$
$$-xyz\,(x+y+z)^3=(x+y+z)^2\,[(xy+yz+zx)^2-xyz\,(x+y+z)]$$
$$-(xy+yz+zx)^3=(x+y+z)^2\,(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$$
$$+xyz^2+yzx^2+zxy^2)-(xy+yz+zx)^3.$$

Am ajuns astfel la partea a doua. Deasemenea pornind tot dela prima parte se poate scrie:

$$(xy+yz+zx)^2\,(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)-xyz\,(x+y+z)^3$$
$$=(xy+yz+zx)^2\,(x^2+y^2+xy)+z\,(xy+yz+zx)^2\,(x+y+z)$$
$$-xyz\,(x+y+z)^3=(xy+yz+zx)^2\,(x^2+y^2+xy)$$
$$+z\,(x+y+z)\,[(xy+yz+zx)^2-xy\,(x+y+z)^2]$$

$= (xy+yz+zx)^2 (x^2+y^2+xy)+z(x+y+z)[z^2(x^2+y^2)-xy(x^2+y^2)$
$- xy(xy - z^2)] = (xy + yz + zx)^2 (x^2 + y^2 + xy) + z(x + y + z)$
$(z^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy) = (x^2+y^2 + xy)[(xy+yz+zx)^2+z(x+y+z)$
$(z^2 - xy)] = (x^2 + y^2 + xy)[x^2(y^2 + z^2 + yx) + xz(y^2 + z^2 + yz)$
$+ z^2(y^2 + z^2 + yz)] = (x^2 + y^2 + xy)(y^2 + z^2 yz)(z^2 + x^2 + zx)$

care e tocmai ultima parte.

3°. *Soluție* dată de D-nii: IOSIF MERBL (student) și M. VASILESCU-ȘTABU (cl. V, Alba Iulia). Cele trei polinoame sunt omogene de gradul șase, și numai de gradul patru în raport cu fiecare variabilă și sunt simetrice în raport cu x, y, z. Ele se vor putea pune sub forma:

$$a\Sigma x^4y^2 + b\Sigma x^4yz + c\Sigma x^3y^3 + d\Sigma x^3y^2z + ex^2y^2z^2 .$$

Rămâne să arătăm că coeficienții a, b, c, d, e au aceleași valori pentru toate trei polinoamele. Vom face aceasta dând valori particulare variabilelor.

Pentru $z = 0$, $y = 1$, cele trei polinoame devin:

$$x^2(x^2 + x + 1); \quad x^2(x + 1)^2 - x^3; \quad x^2(x^2 + x + 1)$$

și rezultă că pentru toate polinoamele avem:

$$a = c = 1 .$$

Pentru $y = 1$, $z = 1$, polinoamele devin:

$$(2x + 1)^2(x^2 + 2x + 3) - x(x + 2)^3;$$

$$(x + 2)^2(3x^2+2x + 1) - (2x + 1)^3$$

$$3(x^2 + x + 1)^2$$

și deci pentru toate trei avem: $b = 1$, $d = 2$, $e = 3$.

Observațiuni: 1°. D-l RADU APOSTOL verifică identitățile notând $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 + z^2 = b$ și procedând ca la prima soluție.

2°. D-nii: EMANUEL BLAGA, IOAN BOGDAN, IANCU DRĂGHICESCU, CĂLIN IOAN DIMITRIU, I. D. ENACHE, IOAN PASCARU, ALEXANDRU POPESCU-ZORICA, GAVRIL POPOVICIU au verificat identitățile, desfăcând până la capăt toate parantezele.

N. B.

PROBLEMA 4635. *Intre laturile* a, b, c, *ale unui triunghiu* ABC *avem relațiile:*

$$a > b > c .$$

Să se demonstreze inegalitățile:

$$b^2 + 2ac\left[\cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right) - 1\right] < a^2 < b^2 + 2ac\left[\cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right) + 1\right]$$

$$c^2 + 2ab\left[\cos\left(C + \frac{\pi}{3}\right) - 1\right] < a^2 < c^2 + 2ab\left[\cos\left(C + \frac{\pi}{3}\right) + 1\right].$$

N. BOTEA.

Soluție dată de D-nii: MARCEL AMĂRĂȘTEANU (Bacalaureat Craiova) și PETRE COJOCARU (Cl. 8-a Lic. Militar Iași).

1°. Inegalitatea:

$$b^2 + 2ac\left[\cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right) - 1\right] < a^2$$

se scrie succesiv sub formele următoare:

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos B + ac\cos B - \sqrt{3}\,ac\sin B - 2ac < a^2$$

$$c^2 < ac\cos C + \sqrt{3}\,ac\sin B + 2ac$$

$$c < 2a\left[\frac{1}{2}\cos B + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B + 1\right]$$

$$c < 2a\left[\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) + 1\right]$$

și această inegalitate este adevărată căci:

$$\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) + 1 > 1$$

deoarece $B < \frac{\pi}{4}$, iar $c < a$.

2°. In mod analog inegalitatea:

$$b^2 + 2ac\left[\cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right) + 1\right] > a^2$$

se transformă pe rând în următoarele:

$$a^2 + c^2 - 2ac\ \cos B + ac\ \cos B - \sqrt{3}\ ac\ \sin B + 2ac > a^2$$

$$c > 2a\left[\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) - 1\right]$$

și partea a doua e întotdeauna negativă, căci:

$$\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) < 1\ .$$

3°. Schimbând vârfurile B și C între ele, din inegalitățile de mai sus, căpătăm ultimele două.

Observațiuni. Pe latura BC a triunghiului ABC să construim în exterior triunghiul BMC echilateral. După o teoremă a D-lui POMPEIU (Bull. de Math. et de Phys. de l'Ecole Polytechnique Roi Carol II. Tome VI, pag. 6) dreptele: AB, AM, AC care unesc punctul A cu vârfurile triunghiului echilateral BMC, sunt deasemenea laturile unui triunghiu. Dar:

$$\overline{AM}^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right) = b^2 + a^2 - 2ab\cos\left(C + \frac{\pi}{3}\right).$$

Relațiile între laturile triunghiului format de dreptele AB, AM, AC se vor scrie deci:

$$(b - c)^2 < \overline{AM}^2 < (b + c)^2$$

sau

$$(1)\quad \begin{cases} b^2 - 2bc < a^2 - 2ac\cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right) < b^2 + 2bc \\ c^2 - 2bc < a^2 - 2ab\cos\left(C + \frac{\pi}{3}\right) < c^2 + 2bc\ . \end{cases}$$

Cu atât mai mult vor fi adevărate inegalitățile din enunț.

Reciproc demonstrarea relațiilor (1) poate constitui o soluție nouă pentru teorema D-lui POMPEIU.

N. B.

PROBLEMA 4692. *Fie* A'B'C' *triunghiul complimentar al triunghiului de referință* ABC, H *ortocentrul lui și* M, N, P *punctele unde cercurile descrise pe* AH, BH, CH *ca diametre intersectează a doua oară cercul circumscris.*

Să se arate că triunghiurile A'B'C' *şi* MNP *sunt omologice şi că picioarele cevienelor* AM, BN, CP *sunt trei puncte colineare.*

THEODOR GH. COCEA.

1°. *Soluţie* dată de D-nii: M. C. POSTELNICESCU şi R. APOSTOL.

$A_h\ B_h\ C_h$ fiind triunghiul ortic, fie O_a centrul cercului AB_hC_h. Deoarece dreptele OO_a şi A'H sunt paralele, împart în acelaş raport razele unui fascicol de drepte. Cum OO_a trece prin mijloacele segmentelor AH, AM, A'H trece prin M. La fel se arată că B'N, C'P trec prin H, deci triunghiurile A'B'C', MNP sunt omologice cu centrul de omologie H.

Axele radicale ale cercului AC_hB_h cu ABC şi C_hB_hCB sunt dreptele AM şi $C_h\ B_h$, iar ultimele două cercuri au ca ax radical dreapta BC. Deci α este centrul radical al celor 3 cercuri, prin α trece $B_h\ C_h$. Conchidem că $\alpha\beta\gamma$ este axa ortică a triunghiului ABC.

2°. *Soluţie* dată de D-l I. I. ŢIŢEICA.

Fie $A'' \equiv (AH, BC)$ etc.... Considerăm ortocentrul H ca pol al inversiunei de modul

$$\overline{HA} \cdot \overline{HA''} = \overline{HB} \cdot \overline{HB''} = \overline{HC} \cdot \overline{HC''},$$

care transformă cercului ABC în cercul lui EULER. Cercului AB"HC" îi corespunde dreapta BC. Punctul M, fiind pe cercurile ABC, AB"HC" are ca omolog punctul A', intersecţie a cercului lui EULER cu BC. Rezultă că dreapta A'M trece prin H. Analog se arată că B'N, C'P trec deasemenea prin H.

Analog se arată că B'N', C'P trec deasemenea prin H.

Dacă $\alpha' \equiv (AA', H\alpha)$ etc. deducem, din cauză că H este ortocentru şi în triunghiul $AA'\alpha$

$$\overline{H\alpha} \cdot \overline{H\alpha'} = \overline{HA} \cdot \overline{HA''} \text{ etc.}$$

In inversiunea definită mai sus se corespund respectiv (α, α'), (β, β'), (γ, γ'). Ori α', β', γ' sunt pe cercul ortocentroidal al triunghiului ABC, de diametru GH, deci α, β, γ sunt pe o dreaptă perpendiculară pe GH.

3°. D-l I. I. ŢIŢEICA observă că partea II-a a problemei se află în *Culegerea de probleme de Geometrie.* G. ŢIŢEICA. (XII, 74).

A mai soluţionat problema D-l V. ECKSTEIN.

C. I. B.

PROBLEMA 4699. *Dacă s'ar scrie în ordinea mărimii lor toate permutările făcute cu cifrele 1, 3, 6, 6, 8, 9, a câtea ar corespunde datei zilei în care a avut loc prăbuşirea a două tribune în tabăra dela Cotroceni, de lângă Bucureşti?*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: V. L. FLORESCU (Liceul Militar, Mânăstirea Dealului) şi E. MARCOVICI (Iaşi).

Nenorocirea s'a întâmplat la 8/VI 1936. E chestiunea dar de a stabili rangul permutării 861936 în şirul natural al permutărilor făcute cu cifrele 1, 3, 6, 6, 8, 9. Permutările scrise cu numere mai mici sunt:

Începând cu	1	în	număr	de	5!/2!	= 60.
„ „	3	„	„	„	5!/2!	= 60.
„ „	6	„	„	„	5!	= 120.
„ „	81	„	„	„	4!/2!	= 12.
„ „	83	„	„	„	4!/2!	= 12.
„ „	8613	„	„	„	2!	= 2.
„ „	8616	„	„	„	2!	= 2.
					Total . . .	268.

Permutarea cerută are dar rangul *269.*

D-l M. A. VASILESCU-STABU (Liceul Alba Iulia) şi A. CĂLINESCU (Liceul Militar, Târgul Mureş) au considerat permutările în ordinea descrescândă şi au găsit că permutarea căutată are rangul 92. Cum toate permutările sunt în număr de 6!/2! = 360, reese că în ordinea crescândă ea are rangul (360 — 92 + 1) = 269.

PROBLEMA 4725. *Două cercuri arbitrare duse prin mijlocul* A_1 *al unui segment* BC, *se retaie în* G *şi taie încă, unul din ele, pe* CG *şi* BC *în* M *şi* N, *iar cel'lalt pe* BG *şi* BC *în* P *şi* Q; MN *şi* PQ *intersectează în* R. *Simetrica în raport cu* BC, *a dreptei ce uneşte pe* R *cu mijlocul segmentului* NQ *de pe* BC, *este paralelă cu* A_1G.

N. N. MIHĂILEANU.

1°. *Soluție* dată de D-l CONSTANTIN N. GAVRILESCU (Șc. P. O. București). Fie I mijlocul segmentului NQ și D al patrulea vârf al paralelogramului BGC de centru A_1. Triunghiurile DBG și NRQ sunt asemenea, fiindcă $\sphericalangle BGD = \sphericalangle NQR$ și $\sphericalangle BDG = \sphericalangle DGC = \sphericalangle QNR$. Dreptele RI și BA_1 fiind mediane în aceste triunghiuri, $\sphericalangle QIR = \sphericalangle BA_1G$, căci unghiurile făcute de perechi de drepte omoloage în triunghiuri asemenea, sunt egale.

2°. D-l S-lt. I. C. PAREPEANU (din Geniu), duce prin I și A_1 paralele respectiv cu RN și GC care trec prin mijloacele U și S ale lui QR și BG și observă că triunghiurile QUI și SA_1G sunt asemenea; și din proporționalitatea laturelor $QU = UR$, $SG = SB$, UI, A_1S, trece la asemănarea triunghiurilor RUI și SBA_1, deci unghiurile QIR, QA_1G sunt egale.

3°. D-l I. STĂNCULESCU (cl. VII-a, lic. Sp. Haret, București), rotește triunghiurile BA_1G și CA_1G în jurul lui A_1, în sens invers până le aduce în $A_1G'V = A_1GB$ și $A_1G''V = A_1GC$ — G' și G'' pe NQ — și observă că triunghiurile NRQ, G'VG'' sunt asemenea, deci QI, A_1G, RQ, BG proporționale și deci și triunghiurile RQI, BGA_1 asemenea și unghiurile (RI, BC), (A_1G, BC) sunt egale.

4°. D-l ALEXANDRU POPESCU ZORICA (cl. VII-a lic. Sf. Iosif București), ia intersecțiile E, F ale dreptei A_1G cu IR și perpendiculara în I pe NQ, demonstrează că $A_1E = EF$, apoi observă că fascicolul IR, IB, IR_1, IF (IR_1 fiind simetrica IR), având ca raze bisectoarele IB, IF ale unghiului RIR_1, este armonic și cum $A_1E = EF$, rezultă că A_1G este paralelă cu raza a treia IR_1.

5°. O altă soluție o dă † RADU I. CIURESCU (cl. VII-a, lic. Sf. Iosif, București).

6°. Dacă B variază pe NQ, iar C rămâne simetricul lui, față de A_1, razele QP și NM sunt în corespondență omografică, cu raza QN autoomoloagă, deci intersecția R descrie o dreaptă; luând $QP' \parallel NR$, P' este la intersecția cercului (GQ) cu GC și R' corespunzător este al patrulea vârf al paralelogramului în care RR' trece prin mijlocul celeilalte diagonale NQ. In plus pentru $GP'' \parallel NQ$, QP'' și NM'' sunt antiparalelele cu GA_1, deci paralele între ele și dau un punct la infinit, în această direcție, pe RR'.

PROBLEMA 4744. *Să se găsească distanța centrelor a două sfere egale știind că partea dintr'o sferă care intră în cealaltă este egală cu partea ce rămâne afară.*

ULPIU FLORESCU.

Soluție dată de D-nii: ADOLF DEUTSCH, OCTAVIAN S. IANCULESCU (Timișoara), MIRCEA LEONTE A. NEGREA (Brăila), TILICĂ

C. ȘTEFAN (cl VII R Lic. Traian, T.-Severin), NICOLAE D. ȘTEFĂNESCU (cl. VII Lic. Mil. „N. Filipescu").

Fie O_1, O_2 centrele celor două sfere, R raza lor și x semidistanța centrelor.

Din enunț rezultă că, sferele fiind egale, volumul comun este jumătate din volumul unei sfere; acest volum este însă format din două calote egale, de înălțime $R-x$ și având ca bază cercul comun celor două sfere.

Vom scrie deci că volumul calotei este *un sfert* (jumătate din jumătate) din volumul sferei, deci:

$$\left(R-\frac{R-x}{3}\right)(R-x)^2\times\pi=\frac{1}{4}\times\frac{4\pi R^3}{3}\cdot \tag{1}$$

Din (1) obținem ecuația în x:

$$x^3-3R^2x+R^3=0,$$

care cu ajutorul notației $x=Ry$, devine:

$$y^3-3y+1=0. \tag{2}$$

Realisantul D al acestei ecuațiuni este

$$D=-\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}>0. \tag{3}$$

Ecuația (2) are în acest caz toate rădăcinile reale.

Este preferabilă rezolvarea pe cale trigonometrică, deoarece prin aplicarea metodei lui CARDAN rădăcinile apar sub formă complexă, deși sunt reale *(cazul ireductibil)*. Se știe din algebră că în acest caz, soluțiile ecuației

$$y^3+py+q=0$$

sunt date de

$$\begin{cases} y_1=2\sqrt[3]{\rho}\cos\dfrac{\varphi}{3} \\ y_2=2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\dfrac{\varphi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}\right) \\ y_3=2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\dfrac{\varphi}{3}-\dfrac{2\pi}{3}\right) \end{cases} \quad \text{unde} \quad \begin{cases} \rho=\sqrt{-\left(\dfrac{p}{3}\right)^3} \\ \cos\varphi=\dfrac{-\frac{1}{2}q}{\rho},\ \sin\varphi=\dfrac{\sqrt{D}}{\rho} \\ 0<\varphi<2\pi \end{cases}$$

In cazul nostru, ($p = -3$, $q = +1$) aceste formule devin:

$$\rho = +1\,,\ \varphi = 120^0 \quad \text{căci } \cos\varphi = -\frac{1}{2}\,,\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

deci

$$\begin{cases} y_1 = 2\cos 40^0 \\ y_2 = 2\cos 160^0 = -2\cos 20^0 \\ y_3 = 2\cos(-80^0) = 2\cos 80^0 = 2\sin 10^0 \end{cases} \tag{4}$$

Insă $O < x < R$ şi, cum $\frac{x}{R} = y$, rezultă $O < y < 1$; deci problema are o singură soluţie, anume y_3 din (4), deoarece

$$y_1 > 1 \text{ şi } y_2 < 0.$$

Soluţia este deci

$$y_3 = 2\sin 10^0,$$

iar distanţa centrelor celor două sfere:

$$\overline{O_1O_2} = 2x = 2Ry_3 = 4R\sin 10^0 = 4R \times 0{,}173648$$

$$\overline{O_1O_2} = 0{,}69459\,R.$$

Observaţiuni. 1°. D-l OCTAVIAN S. IANCULESCU a rezolvat problema analoagă, pentru cazul când volumul comun este a m^a parte din volumul ce rămâne în exterior, însoţind-o de o frumoasă discuţiune.

2°. S'au primit 6 soluţiuni greşite; greşelile provin în majoritatea cazurilor din necunoaşterea volumului calotei.

Unul din corespondenţi consideră *volumul* calotei (probabil prin analogie cu *suprafaţa* calotei), egal cu *produsul între suprafaţa unui cerc mare şi înălţimea calotei:*

Alt corespondent găseşte distanţa centrelor

$$\overline{O_1O_2} = 2R\sqrt{3}$$

mai mare decât suma razelor şi o declară „acceptabilă", deşi volumul comun e inexistent!.

3°. Cu aceasta se consideră rezolvat şi exerciţiul Nr. 258 pt. cl. VI publicat în „Suplimentul cu Exerciţii al G. M.", la care nu am primit nici o soluţie.

U. M. F.

PROBLEMA 4748. *Se formează tabloul*

a	b	c
d	e	f
g	h	i

în care numerele **a, b, c, d, e, ... h, i** *sunt întregi consecutive şi în ordine crescândă. Să se găsească cea mai mică valoare a lui* **a,** *astfel încât suma produselor numerelor din fiecare linie şi din fiecare coloană să fie un patrat perfect.*

V. THÉBAULT.

Dacă notez cu n numărul dela mijlocul tabloului, atunci

$$a = n - 4; \quad b = n - 3; \quad \ldots; \quad i = n + 4$$

şi suma definită în enunţ va fi

$$S = \Sigma[(n-4)(n-3)(n-2) + (n-4)(n-1)(n+2)] = 6n(n^2+5).$$

Presupunând, conform enunţului,

$$(1) \qquad S = 6n(n^2+5) = x^2$$

urmează că $x = 6y$, şi suntem conduşi, la a găsi cea mai mică soluţie întreagă a ecuaţiei

$$n(n^2+5) = 6y^2.$$

De oarece n^2+5 şi $6y^2$ sunt pozitivi, urmează că n este pozitiv. Incercăm deocamdată cea mai mică valoare pozitivă pentru n şi anume

$$n = 1 \quad \therefore \quad y = 1$$

care este soluţia căutată căci, pentru aceste valori, (1) dă

$$S = 36 = 6^2$$

şi atunci tabloul cerut este

$$(I). \qquad \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Dacă se admite că 0 este cea mai mică valoare pozitivă a numerelor întregi, atunci (1), (2) dau

$$n = 0; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad S = 0$$

şi cum formal 0 este patratul lui 0, avem soluţia de formă

(II). $$\begin{vmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} .$$

Notă. 1°. In enunţul publicat aşa cum a fost trimis de propunător, nu se face nici o restricţie asupra semnului numerelor *a, b, ... i.* Dacă se presupune sau se cere ca aceste numere să fie toate pozitive, atunci soluţia problemei este

$$n = 5, \quad S = 900 = 30^2$$

(III). $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} .$$

Aceasta a fost soluţia cu care propunătorul şi-a însoţit enunţul de propus.

2°. Au interpetat enunţul în senzul că *a, b, ... i* sunt numere pozitive şi au dat soluţia (III) D-nii: AMĂRĂŞTEANU F. M., BIVOLARU M. L., DEUTSCH A., GRUMĂZESCU M., IOACHIM L. H., IONESCU G. IULIAN, JIPA C. AL., MAMUT T. P., NICULESCU GH. M., PASCARU I., PANTELIMON V. C., POPA D. M., PUNGĂ I. N., RĂDULESCU GH. O., RIPIANU D., ROSCIESCU F. M., ROŞCULEŢ N. M., STĂNCULESCU V., STREDER I. şi TANASICIUC V. CL.

3°. D-l CORNĂŢEANU I. A. a dat ambele interpretări şi a găsit atât soluţia (I) cât şi soluţia (II).

4°. Au găsit soluţia (I) D-ra TUDORAN SONIA şi D-nii: GAVRILESCU N. C., POPOVICIU GAV. şi TILICĂ C. ST.

5°. Doi dintre corespondenţii anunţaţi pe copertele numerelor anterioare au dat rezultate greşite găsind unul $e = 10$ şi altul $e = -5$.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4760. *Să se găsească un număr de două cifre diferite între ele şi diferite de zero, egal cu suma a şapte cifre toate diferite între ele şi diferite de cifrele numărului căutat.*

G-L GH. BUICLIU.

Fie

$$S = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

şi S_i suma ce se obţine din S eliminând cifra i. Vom avea

$$S_0 = 45;\ S_1 = 44;\ S_2 = 43;..,;\ S_8 = 37;\ S_9 = 36.$$

Fie ab numărul căutat având cifrele diferite între ele şi diferite de i egal cu suma a 7 cifre diferite între ele şi diferite de a, b şi i. După enunţ avem

$$10a + b = S_i - a - b$$

$$\therefore \quad 11a + 2b = S_i\ . \qquad (1)$$

Problema revine la a rezolva în numere întregi cele 10 ecuaţiuni în a, b ce se obţin din (1) înlocuind pe S_i pe rând prin 45, 44,... 37, 36.

Pentru $S_0 = 45$ avem

$$11a + 2b = 45 \quad \therefore \quad 11a + 2b - 1 = 44.$$

Trebue ca $2b - 1$ să se dividă prin 11. Cum $0 \leqslant b \leqslant 8$ nu se poate avea de cât

$$2b - 1 = 11 \quad \therefore \quad b = 6$$

de unde $a = 3$ şi avem soluţia.

1°. $\qquad 36 = 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9.$

Pentru $S_1 = 44$ avem

$$11a + 2b = 44$$

care este imposibilă în numere întregi căci $2b$ nu se divide prin 11 pentru $0 \leqslant b \leqslant 9$.

Continuând pe această cale se mai găsesc următoarele 4 soluţiuni în afară de soluţiunea 1°:

2°. $35 = 0 + 1 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9$ pentru $S_2 = 43$

2°. $28 = 0 + 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 9$ » $S_7 = 38$

4°. $32 = 0 + 1 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9$ » $S_8 = 37$

5°. $27 = 0 + 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8$ « $S_9 = 36.$

Au rezolvat foarte bine problema găsind numai soluţia 1° pentru toate cifrele semnificative, ceeace nu se cere în enunţ D-şoarele: COMLOŞAN CORNELIA, TUDORAN CORNELIA şi D-nii: AMĂRĂŞTEANU F. M., ANICOLĂESEI V. CL., BIVOLARU L., BODNĂRESCU M. H., BUCURENCIU I. V., CÂRDEIU D. GH., CHERCIU GH., CIURESCU I. R., CORNĂŢEANU I. A., COTIGHER I., CRĂCIUN I. I., FLORESCU V., GAVRILESCU N. C., GHEORGHIU P. P., GRUMĂZESCU M. S-LT., IONESCU M. C., JAREGHIE V. I., JIPA C. AL., MAMUT P., LT.-COL. MANOIL E., NEGREA A. M. L., NICULESCU GH. M., S-LT. PANĂ AL, PANTELIMON V. C., S-LT. PAREPEANU I., PASCARU I. I., PETRESCU ACHILE, POPA D. M., POPOVICIU GAV., PUNGĂ I. N., RIPIANU D., ROŞCULEŢ N. M., SEGAL J., ŞTEFĂNESCU D. N., STREDER I., THEODORESCU N. DORIN, ŞTEFAN C. T., TRUFIN C. TR., TURCU R. S., VASILESCU-STABU M. şi S-LT. VLAD I. C. M.

D-l PASCARU I. I. a pus în evidenţă incidental soluţia 2°, iar D-l CIURESCU I. R. soluţia 5°, fără a trata problema în cadrul general.

PROBLEMA 4819. *Se cer numerele de patru cifre* mszu *divizibile prin numerele de două cifre* ms, sz, zu.

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l G. SĂNDULACHE (Băseşti-Bacău).

Se vede imediat că *mszu* se va divide cu *ms* dacă *zu* se divide cu *ms*; că se va divide cu *sz* dacă *m00u* se divide cu *sz* şi se va divide cu *zu* dacă *100ms* se divide cu *zu*. Putem dar scrie:

$$(1)\qquad \begin{cases} 10z+u=p(10m+s), \\ 1000m+u=q(10s+z), \\ 100(10m+s)=r(10z+u). \end{cases}$$

Observăm că prima şi ultima relaţie se pot satisface dacă $ms=zu$ luând $p=1$ şi $r=100$. Rămâne să vedem în ce caz se satisface a doua egalitate. In acest caz numărul căutat e de forma $msms=101ms$. Cum 101 este prim, numărul de două cifre sz nu poate divide produsul $101ms$ decât dacă ms se divide cu zu, câtul putând fi cel mult 9. Deci trebuie să avem:

$$10m+s=k(10s+m),$$

$$\therefore\quad m/s=(10k-1)/(k-1).$$

Pentru $k = 1; 2; 3; 4; 5$ găsim $m/s = 1;\ 19/8;\ 29/7;\ 39/6 = 13/2;\ 49/5$. Şirul este evident crescător şi nu mai trebuie continuat căci a depăşit deja pe 9.

Dintre valorile lui m/s numai 1 este admisibilă, căci celelalte cer ca numărul m să depăşească pe 10, ceeace nu se poate m fiind o cifră. Rezultă dar $m = s$ şi cum $ms = zu$ reese că numărul căutat poate avea toate cifrele egale. De aci soluţiunile **1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999,** în număr de 9.

Soluţia dată mai sus presupune că s nu poate fi nul. Cazul $s = 0$ se poate trata direct. In acest caz prima din relaţiile (1) ne dă $10z + u = 10pm$, care cere $u = 0$ şi deci $z = pm$. De aci rees soluţiile *1010, 2020, 3030, 4040, 5050, 6060, 7070, 8080, 9090* în număr de 9. Ele însă sunt soluţiuni formale de oarece enunţul cere ca numărul ms să fie de două cifre.

Să considerăm acum cazul $p \neq 1$. Dacă înmulţim prima cu ultima din relaţiile (1), rezultă $pr = 100$. Cum $p \leqslant 9$, căci el este câtul a două numere zu şi ms de câte două cifre, şi cum el trebue să împartă pe 100, reese că nu mai putem lua decât $p = 2$, 4, sau 5.

Cazul $p = 2$. In acest caz $zu = 2ms$. Facem numerele $mszu$ în această ipoteză; ele sunt următoarele:

1020, 1122, 1224, 1326, **1428,** 1530, 1632, 1734, 1836, 1938,

2040, **2142,** 2244, **2346,** 2448, 2550, 2652, 2754, 2856, 2958,

3060, 3162, 3264, 3366, 3468, 3570, 3672, 3774, 3876, 3978,

4080, 4182, **4284,** 4386, 4488, 4590, **4692,** 4794, 9896, 4998.

Dintre acestea numai cele grase sunt soluţiuni căci se divid cu sz respectiv. Cele cursive sunt formale.

Cazul $p = 4$. In acest caz $zu = 4ms$. Numerele ce satisfac această condiţiune sunt:

1040, 1144, **1248,** 1352, 1456, 1560, 1664, 1768, 1872, 1976,

2080, 2184, 2288, 2392.

Numerele grase sunt soluţii, cele cursive sunt formale.

Cazul $p = 5$. In acest caz $zu = 5ms$. Numerele $mszu$ sunt atunci:

1050, **1155,** 1260, 1365, 1470, 1575, 1680, 1785, 1890, 1995.

Numerele grase sunt soluții, cele cursive soluții formale. Problema admite dar soluțiile în număr de 16.

1111, 1155, 1248, 1428, 2142, 2346, 3333, 4284, 4692, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999.

Ea mai admite 16 soluții formale:

1010, 1020, 1030, 1040, 1050, 2020, 2040, 2080, 3030, 3060, 4040, 5050, 6060, 7070, 8080, 9090.

D-ra SONIA TUDORAN (Școala centrală, București) a dat 15 soluțiuni bune, nu a dat pe cele formale indicate mai sus, însă printre soluțiile de tipul *mmmm* a admis și soluția formală *0000*.

EXERCIȚII

31. Presupunând:

$$a + b + c = \pi$$

să se demonstreze identitatea:

$$\operatorname{tg} na + \operatorname{tg} nb + \operatorname{tg} nc + \frac{\sin 2na + \sin 2nb + \sin 2nc}{1 + \cos 2na + \cos 2nb + \cos 2nc} = 0$$

n fiind un număr întreg oarecare.

(Rectificarea și generalizarea probl. 15, Cap. X. Culegere de probleme de Trigonometrie Ed. II).

MIRCEA ADAM.

R. In Culegerea de probleme de Trigonometrie găsim:

$$\Sigma \sin 2na = 4(-1)^{n+1} \sin na \sin nb \sin nc \qquad \text{(X probl. 1)}$$

$$1 + \Sigma \cos 2na = 4(-1)^{n} \cos na \cos nb \cos nc \qquad \text{(X probl. 2)}$$

cari împărțite între ele:

$$\frac{\Sigma \sin 2na}{1 + \Sigma \cos 2na} = -\operatorname{tg} na \operatorname{tg} nb \operatorname{tg} nc$$

astfel că identitatea propusă devine:

$$\operatorname{tg} na + \operatorname{tg} nb + \operatorname{tg} nc = \operatorname{tg} na \operatorname{tg} nb \operatorname{tg} nc \qquad \text{(X probl. 10).}$$

32. Să se demonstreze că în orice triunghiu avem:

$$\frac{1}{a^2 s_a} + \frac{1}{b^2 s_b} + \frac{1}{c^2 s_c} + \frac{1}{s_a s_b s_c} = 0$$

în care a, b, c, s_a, s_b, s_c sunt laturile şi simedianele exterioare.

MIRCEA ADAM.

R. Ţinem seama de relaţiile:

$$S_a = \frac{2R \sin B \sin C}{\sin (B - C)}, \text{ etc.}$$

$$a = 2R \sin A \qquad \text{etc.}$$

astfel că relaţia propusă devine:

$$\Sigma \sin B \sin C \sin (B - C) + \sin (A - B) \sin (B - C) \sin (C - A) = 0$$

(probl. 18 — IX — Culegere de Probleme Trigonometrie Ed. II).

33. Să se demonstreze că între laturile unui triunghiu oarecare avem inegalitatea:

$$a^2 + b^2 + c^2 > \sqrt{2(a^4 + b^4 + c^4)}$$

TUDOR STOICESCU.

R. Ridicăm ambii membri la patrat şi voi avea:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4) > 0;$$

se poate însă demonstra uşor că:

$$(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4) \equiv (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c);$$

cum într'un triunghiu suma a 2 dintre laturi este mai mare decât latura a treia, factorii $-a+b+c$; $a-b+c$; $a+b-c$ sunt pozitivi, deci inegalitatea satisfăcută.

34. Să se stabilească relaţia:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & rr_a \operatorname{cotg} \dfrac{A}{2} \\ 1 & b & r_a r_c \operatorname{tg} \dfrac{B}{2} \\ 1 & c & \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4 \operatorname{tg} \dfrac{A+B+C}{2}} \end{vmatrix} = 0.$$

MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU.

R. Avem $rr_a \operatorname{cotg}\frac{A}{2} = r_a r_c \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{a^2+b^2-c^2}{4\operatorname{tg}\frac{A+B-C}{2}} = \Phi.$

Relations entre les elem. d'un triangle (Vuibert pag. 25 şi 27).

35. Dacă într'un triunghiu avem una din relaţiile:

$$\Pi \cos A = (1/2)^3 \; ; \; \Sigma a^2 = 9R^2$$

triunghiul este echilateral.

IOAN A. ILIE.

R. Exercices de Géométrie par F. G. M. pag. 670:

$$\overline{OH}^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C) = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2).$$

Ambele relaţii din enunţ conduc la:

$$\overline{OH}^2 = 0 \text{ deci şi } \overline{GH} = 0.$$

Confundându-se centrul de greutate cu ortocentrul, triunghiul este echilateral.

36. Dacă într'un triunghiu avem relaţia:

$$a^2+b^2+c^2 = 8R^2$$

triunghiul este dreptunghic.

IOAN A. ILIE.

R. Exercices de Géométrie par. F. G. M. pag. 670:

$$R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C) = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$$

sau:

$$-8R^2\cos A\cos B\cos C = 8R^2 - (a^2+b^2+c^2)$$

$$\therefore \cos A\cos B\cos C = 0$$

de unde

$$\text{ori } \cos A = 0 \quad A = 90^0$$
$$\text{ori } \cos B = 0 \quad B = 90^0$$
$$\text{ori } \cos C = 0 \quad C = 90^0.$$

37. Să se integreze ecuaţia diferenţială:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)} \cdot \frac{\cos^2 y}{\sin^2 x} e^{-(x+y)}.$$

SUBLOCOT. SAVIN C. ION.

R. Se observă că:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}=\frac{\sin x+\cos x}{\sin y+\cos y}.$$

Ecuația din enunț devine:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x+\cos x}{\sin y+\cos y}\cdot\frac{\cos^2 y}{\sin^2 x}\cdot\frac{e^{-x}}{e^y}.$$

Separând variabilele se găsește:

$$\frac{\sin y+\cos y}{\cos^2 y}e^y\,dy-\frac{\sin x+\cos x}{\sin^2 x}e^{-x}=0$$

De unde se integrează imediat:

$$\frac{e^y}{\cos y}+\frac{e^{-x}}{\sin x}=C.$$

38. Să se integreze ecuația:

$$x^2dy-(y^2+yx+x^2)\,dx=0.$$

SUBLOCOT. SAVIN C. IOAN.

R. Se vede ușor că ecuația se poate scrie:

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2+yx+x^2}{x^2}=\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}+1.$$

Făcând substituția $\frac{y}{x}=u$ (1) devine:

$$u+x\frac{du}{dx}=u^2+u+1 \quad \text{sau} \quad x\frac{du}{dx}=1+u^2.$$

Separând variabilele găsesc:

$$\frac{dx}{x}\equiv\frac{du}{1+u^2} \qquad L(x)=\operatorname{arctg}u+C.$$

Sau încă

$$x=C\,e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

PROBLEME PROPUSE

4843. Să se construiască un triunghiu cunoscând mijloacele a două din laturi şi piciorul înălţimei pe a treia latură.

I. IONESCU.

4844. Se cere un patrat perfect de cinci cifre astfel ca numerele formate de primele două cifre ca şi cel format de ultima cifră să fie pătrate perfecte, ale căror rădăcini multiplicate să ne dea numărul format de cifra a treia urmată de cifra a patra din patratul cerut.

GH. VASILIU.

4845. Fie r raza cercului înscris într'un triunghiu dreptunghic ABC. Să se arate că dacă una din laturi este funcţiune numai de r şi celelalte sunt funcţiuni numai de r. Caz particular $\overline{AB} = 3r$; să se arate că $\overline{AC} = 4r$, $\overline{BC} = 5r$.

ALEXANDRU V. NICULESCU.

4846. Fie $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ triunghiul ortic şi triunghiul median al triunghiului ABC. Perpendiculara dusă prin A_1 pe A_1B_2 intersectează perpendicularele duse prin A şi C pe AC respectiv în punctele B_a şi B_c, iar perpendiculara dusă tot prin A_1 pe A_1C_2 intersectează perpendicularele duse prin A şi B pe AB respectiv în C'_a şi C'_b. Fie $M(AB_c, CB_a)$ şi $Q(AC'_b, BC'_a)$.

Dacă N şi P sunt analoagele lui M, iar R şi S analoagele lui Q relativ la B şi C, să se arate că triunghiul format de dreptele MQ, NR şi PS este *ortologic* cu triunghiul ABC.

THEODOR G. COCEA.

4847. Să se găsească condiţiunile la care trebue să satisfacă numerele reale α şi β pentru ca ecuaţiunea

$$\alpha x^8 + \beta x^7 + 7\alpha x^6 + 4\beta x^5 + 13\alpha x^4 + 4\beta x^3 + 7\alpha x^2 + \beta x + \alpha = 0$$

să aibă şi rădăcini reale.

Există valori de α şi β astfel ca ecuaţiunea să aibă toate rădăcinile reale?

O. N. ŢINO.

4848. Să se găsească condiţia ca o ecuaţie de gradul al treilea, cu coeficienţi reali, să aibă toate rădăcinile de modul egal cu 1.

GH. TH. GHEORGHIU.

4849. Ştiind că

$$\sin x \,.\, \sin y = \sin^2 (x + y)$$

se cere să se găsească relaţia de condiţie între x şi y.

G-L GH. BUICLIU.

4850. Să se arate că

$$\operatorname{arctg} \frac{u_{2n+1}}{2u_{2n+1} + u_{2n}} - \operatorname{arctg} \frac{u_{2n}}{u_{2n} + u_{2n+1}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2u_{2n+1}^2 + 4u_{2n}\, u_{2n+1} + u_{2n}^2} = 0$$

u_{2n} fiind un termen de rang par din şirul lui FIBONACCI.

C. IONESCU-ŢIU.

4851. Să se găsească locul geometric al punctelor de contact ale tangentelor, duse din două puncte fixe A şi B, la un cerc mobil cu centrul pe cercul descris pe AB ca diametru şi tangent la dreapta AB.

AL. ŞCODRANU.

4852. Se dă o elipsă E a cărei axă mare este AB. Intr'un punct C al axei AB cuprins între A şi B, se ridică o perpendiculară Δ pe AB care taie elipsa E în punctele M şi N. Prin A se duce o secantă mobilă care taie pe Δ în P şi elipsa E în Q. Să se găsească locul geometric al punctului R de pe dreapta AQ, care să satisfacă relaţiunea:

$$\overline{AR}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}.$$

M. NICOLAU.

4853. Fie N şi T punctele în care normala şi tangenta unei spirale logaritmice taie perpendiculara dusă în origină pe raza vectoare, N' şi T' respectiv proiecţiile originei şi mijlocului segmentului NT pe normală şi tangentă.

Să se arate că locul geometric al intersecţiei dreptelor NT', N'T este de asemenea o spirală logaritmică.

C. IONESCU-BUJOR.

4854. Să se construiască curba

$$x = \operatorname{sh}\theta \cos\theta + \operatorname{ch}\theta \sin\theta$$

$$y = \operatorname{sh}\theta \sin\theta - \operatorname{ch}\theta \cos\theta$$

şi desfăşuratele ei succesive.

ADRIAN GHEORGHIU.

ERATĂ. In enunţul problemei 4838 propusă la pag. 615 se înlocueşte $n \to \infty$ prin $x \to \infty$.

La problema 4839, se înlocueşte A_p cu a_p.

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE

1. Aritmetica şi Teoria numerelor

Pag.

V. Thébault . . . . . Probleme asupra patratelor 61
V. Thébault . . . . . Asupra unor numere pitagorice 283

2. Geometria

E. Abason . . . . . Articol despre triunghiul echilateral . . . 352, 393
I. Alexiu . . . . . Proprietăţi ale pseudorombului 70
R. Goormaghtigh . . . Relaţiuni între suprafeţe de triunghiuri . . . 511
C. Ionescu-Bujor . . . . Asupra cercurilor ortogonale 455
C. Ionescu-Bujor . . . . Asupra omologiei simple şi multiple 621
N. N. Mihăileanu . . . . Asupra punctului LEMOINE 628
G-l Gh. I. Popescu . . Din geometria triunghiului 513
Gh. D. Simionescu . . . Triunghiuri triomologice cu centrele de omologie colineare 286
V. Thébault . . . . . Cercuri asociate unui triunghiu 452
Alexandra A. Vasilescu Observaţiuni asupra problemei 4563 461

3. Algebra

Th. Angheluţă . . . . Determinarea transformărilor omografice care lasă neschimbată o ecuaţie de gradul al doilea . 561
Leonescu *) . . . . . Asupra unei descompuneri a puterilor neperechi 18
Lt. C-dor Gh. Niculescu Câteva simple observaţiuni în legătură cu teorema lui VAN VLECK 123
Tib. Popoviciu . . . . Despre rădăcinile comune la mai multe ecuaţii multinome 569

*) Este acelaşi cu *Leonida Penenjchevici*, autorul articolului dela pag. 443, Vol. XXXII

4. Geometria analitică şi infinitezimală

Pag.

E. Caraman . . . . . Parametrul parabolei circumscrise unui trapez . 406
Lt. M. I. Focşeneanu . . In jurul problemelor 1386—2889 576
R. Goormaghtigh . . . Asupra razelor de curbură ale unor curbe plane . 281
C. Ionescu-Bujor . . . Asupra curbelor plane 183

5. Mecanica

Maior I. Linteş . . . . Eforturi suferite de avion pe timpul resursei . . 235
E. Vişa . . . . . Noţiuni de geometrie cinematică 288, 391

6. Istoria Matematicelor

Fl. Campan . . . . . Despre origina teoremei lui PITAGORA . . . 410
M. Gh. Dumitrescu . . . Geometria Neeuclidiană 64
I. Ionescu . . . . . Cărţi vechi de matematici 234
V. Marian . . . . . O ediţie clujană a compendiului lui CHR. WOLFF 120, 179
V. Marian . . . . . Aritmetica lui G. OBRADOVICI 337
V. Marian . . . . . Două aritmetici vechi anonime 449, 508
V. Marian . . . . . Trigonometria lui GOODEN; primul manual universitar de matematici din Ardeal 617
Ilie Popa . . . . . GH. ASACHI şi postulatul lui EUCLID 522

7. Diverse

I. Bratu . . . . . Circulară adresată de Ministerul Educaţiei Naţionale tuturor şcolilor secundare 362
G-l Gh. Buicliu . . . Tipografia *Gazeta Matematică* 59
Maior I. Linteş . . . Dare de seamă asupra sărbătorirei D-lui Prof. ION IONESCU 115
G. Ţiţeica . . . . . Congresul internaţional al Matematicianilor . . 57
* * * . . . . . Cuvântarea D-lui I. IONESCU la sărbătorirea sa dela 1 Noemvrie 1936 . . . . . 169, 225

8. Necrologuri

* * * . . . . . † Inginerul ION POPESCU 113

B. CHESTIUNI ÎN LEGĂTURĂ CU REDACŢIA ŞI SOCIETATEA „GAZETA MATEMATICĂ“

1. Diverse

* * * . . . . . Lista membrilor Societăţei «*Gazeta Matematică*» 5
* * * . . . . . Membrii decedaţi 17

2. Premii şi concursuri

		Pag.
Delegaţia Societăţei	Concursul *Gazeta Matematică* din 1937	20
D. V. Stoica, D. Stan	Premii, donaţii şi alte dispoziţii ale fondurilor Societăţei *«Gazeta Matematică»*	22
G-l Gh. Buicliu, Al. Bunescu, Col. Gh. I. Liteanu	Raportul comisiunei pentru acordarea premiului General Sc. PANAITESCU	75
* * *	Programa analitică hotărîtă pentru concursul *Gazeta Matematică* din anul 1937	130
Gh. Iliescu, O. Onicescu, Gh. Zapan	Raport asupra premiului V. CONTA pentru anul 1936	132
Gh. Th. Gheorghiu, Gh. Iliescu, Al. A. Roşu	Premiul Ing. AL. ROŞU	186
I. Buşilă, Al. Pantazi O. N. Ţino	Raport pentru premiul H. CAPRIEL	187
Delegaţia Societăţei	Concursul *«Gazeta Matematică»*	297
* * *	Regulamentul fondului bursei Profesor ION IONESCU	361
Al. A. Roşu, Gh. D. Simionescu, D. A. Stan	Premiul „Inginer AL. ROŞU“	413
Gh. Ţiţeica	Rezultatul concursului *«Gazeta Matematică»*	505
Al. Bunescu, I. Ionescu, Al. V. Niculescu	Raport pentru decernarea premiului V. CRISTESCU pe 1935—36	525
G-l Gh. Buicliu, Gh. Iliescu, D. Stoica	Premiul „Inginer H. CAPRIEL“	581

C. NOTE MATEMATICE

1. Aritmetica şi Teoria numerelor

7 [1])	*G-l Gh. Buicliu*	Soluţiile întregi ale problemei 2701	80
24.	*G-l Gh. Buicliu*	Numere interesante cu 10 cifre diferite	247
33.	*G-l Gh. Buicliu*	O proprietate a numerelor 2 şi 5	364
37.	*G-l Gh. Buicliu*	Numere interesante cu 10 cifre diferite	414
49.	*G-l Gh. Buicliu*	Numere interesante cu 10 cifre diferite	633
30.	*A. Călinescu*	Asupra problemei 4579	300
16.	*Prof. Gh. Constantinescu*	Asupra problemei 4523	190
8.	*M. Ghermănescu*	Asupra problemei 4579	81
29.	*M. Ghermănescu*	Asupra problemei 3134	300
23.	*A. Gloden*	Câteva egalităţi multiple de ordin superior	244
3.	*H. P. Ionescu*	Un sistem diofantian	26
34.	*Maior I. Linieş*	Asupra problemei 4700	365
46.	*O. Orănescu*	Asupra problemei 3811	581
1.	*V. Thébault*	O problemă de aritmetică	25
10.	*V. Thébault*	Asupra problemei 4537	132
22.	*V. Thébault*	Asupra unei ecuaţiuni în numere întregi	243
48.	*V. Thébault*	Propoziţie de aritmetică	632

1) Numărúl din această coloană indică nnmărul de ordine al notei în Vol. XLII.

2. Geometria

		Pag.
13. *N. N. Aldea*	Asupra pseudorombului	133
17. *N. N. Aldea*	Asupra problemei 4223	191
15. *G-l Gh. Buicliu*	Exercițiu de topologie elementară	187
9. *M. I. Crăciunescu*	Asupra unei proprietăți a paralelogramului	82
44. *A. Dobrescu*	Asupra notei 26	527
32. *Lt. M. I. Focșeneanu*	Un ortopol remarcabil	303
41. *C. Ionescu-Bujor*	Asupra unui articol al lui E. CATALAN	467
4. *N. N. Mihăileanu*	Notă asupra triunghiurilor isologice	27

3. Algebra

11. *Maior I. Linteș*	Asupra notei Nr. 30	132
31. *Maior I. Linteș*	Asupra problemei Nr. 4553 din G. M. XLI	302
45. *I. I. Petrescu*	Încă o generalizare a problemei 4624	528
14. *T. Popoviciu*	Despre o inegalitate a lui WOLSTENHOLME	135
25. *A. A. Roșu*	Asupra problemei 2421	248
38. *G. Silaș*	Asupra problemei 2889	415
12. *E. Vișa*	Asupra notei 41	133

4. Trigonometria

35. *I. A. Ioan*	Asupra sinusului diferenței a două arce	366

5. Analitica

27. *Ilie Popa*	Indicatricea lui BACALOGLU	248

6. Analiza

28. *M. Ghermănescu*	Asupra problemei 3330	299

7. Istoria Matematicilor

42. *I. Ionescu*	Asupra studiilor lui GH. ASACHI	526
2, 6, 36, 40, 47 * * *	Acum o sută de ani în lumea matematică [1]	26, 79, 414, 466, 631

8. Diverse

43. *Tr. I. Chițulescu*	Asupra problemei 4759	527
39. *Th. G. Cocea*	Asupra problemelor 3275 și 3394	417
5. *I. Ionescu*	O controversă	77
21. *N. N. Mihăileanu*	La problema 4669	194
18. *Lt. C-dor Gh. Niculescu*	Articolul *«Câteva observații asupra teoremei lui* VAN VLECK»	194

---

1) Note trimise de Seminarul matematic din Iași de sub conducerea D-lui Prof. *A. Myller.*

Pag.

26. *T. Popoviciu* . . . Asupra problemei 1058 248
19. *Al. A. Roşu* . . . Asupra problemei 4544 194
5. *G. Săndulache* . . O controversă 76
50. *G. D. Simionescu* . Asupra problemei 4716 637
20. *Gh. Vasiliu* . . . Asupra problemei 4338 194

D. CHESTIUNI DE EXAMEN

Concursul *Gazetei Matematice* din 1937 468
Examenul de capacitate pentru profesori secundari 584, 637
Şcoala Politechnică „Regele Carol II". Concursul de admitere în anul I . . 83

E. BIBLIOGRAFII

1. Lucrări recenzate [1])

A. Gheorghiu [2]) . . . G. HOHEISEL. Integralgleichungen 89
A. G. Ioachimescu . . ŞT DRĂGĂNESCU. Curs de mecanică 305
I. Ionescu . . . . . V. MARIAN. Pravila comerţială de la 1837 . . 419
I. Ionescu . . . . . P. MONTEL. Lecţiuni despre funcţiunile quasi-periodice 407
N. Mihăileanu . . . . R. ESTÈVE & H. MITAULT. Cours de géométrie Tome III 478
G. Ţiţeica . . . . . R. GARNIER. Leçons d'Algèbre et de géométrie 251
V. Vâlcovici . . . . . A. MYLLER. Curs de geometrie analitică . . . 29

2. Lucrări nerecenzate

Th. Angheluţă . . . . Exerciţii şi probleme de Analiză, Teoria funcţiilor şi Mecanica Raţională 474
O. Bosuvka . . . . . Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à *n* dimensions à courbure constante. II. III. 196
J. Dollon . . . . . Problèmes d'Agrégation 587
T. Gajdoš . . . . . Akustikà Měřeni na Pištalách Metodom Interferenčni 420
G. Julia . . . . . Eléments de géométrie infinitésimale 587
Institutul Rom. Energie I. R. E. . . . . . ANDRÉ-MARIE AMPÈRE 89
R. Kotovă . . . . . Měřeni Koeficientù Spřaženi při Kyvech Torsnich Kyvadel Spřažených Výchylkon 420

---

1) S'au scris recenzorii în ordine alfabetică, iar la fiecare recenzor lucrările recenzate sunt înscrise tot în ordinea alfabetică.

2) In general recenzorii au semnat numai cu iniţialele numelui şi pronumelui. Pentru istoric, le dăm numele întreg.

Pag.

P. Libois . . . . . Sur une classe de plans quadruples 477
Maior I. Linteş . . . Noţiuni elementare despre construcţia avioanelor . 139
V. Marian . . . . . DESCARTS Einfluss in Transylvanien im 18 Jahrhundert 418
P. Noordhoff . . . . Five place tables 587
G-l Sc. Panaitescu . . Coordonatele geografice ale oraşului Iaşi . . . 196
I. I. Popa . . . . . Matematica în ultimul pătrar la Universitatea din Iaşi 475
Al. Th. Popescu şi *Christina Popescu* . . Monografia laboratorului de electrodinamică pentru încercări industriale 139
Gh. Popescu-Botoşani . Puterea motorului de aviaţie în altitudine . . . 305
L. Seifert . . . . . Sur une conoïde cubique 420
D. A. Stan şi *A. Tauber* . Tabele pentru calculul fundaţiilor de beton armat ale stâlpilor izolaţi 587
C. C. Teodorescu . . . La reception des rails et l'application pratique des resultats obtenus 29
C. C. Teodorescu şi *M. Stamatiu* . . . . Recherches sur la résistance aux efforts mécaniques du sel gemme roumain 29
N. Teodorescu . . . . La dérivée aréolaire 196
O. N. Ţino . . . . . Algebră elementară pentru cl. IV secundară . . 88
O. N. Ţino, M. Teohari, V. Bădulescu . . . . Aritmetica pentru clasele I, II, III secundară . . 88
O. N. Ţino, M. Teohari, V. Bădulescu . . . . Geometria pentru clasele I, II, III secundară . . 88
O. N. Ţino, M. Teohari, V. Bădulescu . . . . Algebra pentru clasa VI secundară 88
O. N. Ţino, M. Teohari, V. Bădulescu . . . . Trigonometria pentru clasa VI secundară . . . 88
O. N. Ţino, M. Teohari, V. Bădulescu . . . . Algebra pentru clasa VII secundară 88
O. N. Ţino, M. Teohari, V. Bădulescu . . . . Astronomia pentru clasa VII secundară 88
J. Zahradníček . . . Dynamická Metoda pro Měřeni Gravitačniho Pole Zemského 420
J. Žak . . . . . Měřeni na Jazyčkových Pýstalách 420

3. Extrase suplimente şi teze

N. Abramescu . . . . Sur une étude de la forme d'une courbe ou d,une surface dans le voisinage de l'un de ces points . 474
N. Abramescu . . . . Sur l'étude de la forme d'une courbe ou d'une surface dans le voisinage de l'un de ses points et une nouvelle interpretation de la cubique donnant les tangentes de DARBOUX et SEGRE . 475

Pag.

N. Abramescu . . . . . Sullo studio di una superficie nell intorno di un suo punto ed una nuova interpretazione della cubica che da le tangenti di DARBOUX e SEGRE 475

N. Abramescu . . . . Sur le developpement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynome et application à la détermination des courbes de convergeances de certaines series de polynomes . 475

V. Alaci . . . . . Une classe nouvelle de fonctions discontinues à deux variables et les équations correspondantes qui peuvent represénter différentes configurations géométriques 474

N. Botea . . . . . Une relation entre nombres complexes et la généralisation d'un théorème de géométrie élémentaire 529, 587

G. G. Constantinescu . . Sur certaines classes d'intégrales abéliennes . . 587

C. Iacob . . . . . Memoriu de titluri şi lucrări 368

C. Iacob . . . . . Etude d'un jet gazeux 368

C. Iacob . . . . . Asupra probabilităţii pe care o are un elev de a fi admis la un examen 368

I. Ionescu . . . . . ANDRÉ-MARIE AMPÈRE 89

Maior I. Linteş . . . . Sintetizarea progreselor realizate în construcţia gurilor de foc 251

V. Marian . . . . . Les points de CURIE ferromagnétiques et la saturation absolue de quelques alliages de nickel . 418

V. Marian . . . . . Aritmetica lui G. ŞINCAI 639

Cr. Mateescu . . . . . Calcul des plaques élastiques rectangulaires simplement appuyeés sur le pourtour et soumises à la flexion par un moment le long d'un côté 368

A. Myller . . . . . Tricentenarul geometriei analitice 475

Al. V. Niculescu . . . . Une classe de courbes gauches 89

Al. V. Niculescu . . . . Courbes sphériques, courbes d'ENNEPER et de TZITZEICA 89

Al. V. Niculescu . . . . Courbes sphériques de Mr. TZITZEICA 89

C. D. Orăşanu . . . . Proecţiunea stereografică în România întregită . 477

C. D. Orăşanu . . . . Proecţiunea Colonelului BONNE în România . . 639

I. I. Popa . . . . . Elementele lui EUCLID 139

Gh. Popescu-Botoşani . . Problemele actuale asupra motorului de aviaţie . 196

J. B. Souto . . . . . Determinacion de la paridad entre emprestitos con distintos sistemas de rescates 251

V. Vâlcovici . . . . . Asupra caracterului involutiv al ecuaţiilor din mişcarea relativă 587

Pag.

V. Vâlcovici . . . . . Ueber die Wiederstandswerte der Relativbewegung einer starren Körpers in einer zähen Flüssigkeit . 587
T. Vescan . . . . . Considerationes sobre la mecanico vectorial y relativista de los medios deformabiles . . . 477
T. Vescan . . . . . Une formule de la réfraction astronomique déduite de la forme parabolique du trajet lumineux 477
T. Vescan . . . . . Teoria cinetică elementară a gazelor 477
T. Vescan . . . . . Elementele teoriei gazelor electronice 477
G. Zapan . . . . . Formule sociale 419

4. Reviste, periodice

Anales de la Sociedad cientifica Argentina 28, 87, 138, 195, 249, 304, 367, 421, 529, 586, 638.
Boletin Matematico 87, 138, 195, 249, 367, 421
Buletin I. R. E. 138, 195, 586
Buletinul Institutului Român pentru Betoane, Construcţii şi Drumuri . 88, 249, 476, 529
Buletinul „Societăţii de Matematici" a liceului Tasse Dumitrescu din Mizil . 138
Buletinul Societăţii Politechnice 88, 195, 249, 304, 476, 529, 586
Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine 474
Bulletin de mathématiques et de physiques pures et appliqueés de l'Ecole Polytechnique „Roi Carol II" 195, 477
Bulletin of the American Mathematical Society 28, 29, 87, 88, 195, 304, 367, 421, 586
Časopis pro Pēstováni Matematiky a Fysiky 304, 422
Contribucione al Estudio de los Cientios Fizicas y Matematicas 367
Deutsche Mathematik 88, 475, 586
Gazeta Matematică. Supliment cu exerciţii 196, 305, 420, 477, 529
Instituto Matematico Hispano Americano 529
Journal de Mathématiques Elémentaires 138, 196, 249, 305, 367, 422, 476, 529, 587, 638
Mathematica 250
Mathesis 88, 196, 250, 305, 419, 587
Natura 639
Numerus 138, 368
Pitagora 29, 138, 196, 305, 368, 420, 477, 587
Revista Matematică din Timişoara . 138, 139, 196, 250, 305, 368, 420, 476, 587, 638
Revista Ştiinţifică « *V. Adamachi* » 305, 587, 638
Societatea Română de Ştiinţe. Buletinul şedinţelor 418
Sphinx 88, 139, 196, 250, 305, 368, 420, 476, 529, 587, 639
Spisy Vydávanè privodovědenckon faculton Masarykovy University . . . 476
Ştiinţă şi Progres 139, 196, 305, 420, 476, 529, 587
The Mathematical Gazette 29, 420, 639

F. CERERI *)

Nr. Cererii	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul
1	24 (XXI)	?
4	24 „	?
5	24 „	?
7	59 „	?
8	59 „	?
10	91 „	?
11	144 „	?
12	145 „	?
13	145 „	219 (XXI) ?
14	183 „	?
15	219 „	?
16	254 „	?
17	294 „	264 (XXXVIII) ?
20	420 „	?
23	17 (XXII)	?
24	75 „	?
26	161 „	?
27	187 „	?
28	213 „	?
29	231 „	?
30	258 „	?
31	277 „	?
32	277 „	259 (XXIII) 39, 186 (XXIV)?
33	308 „	?
34	40 (XXIII)	?
35	40 „	?
36	65 „	?
37	86 „	211 (XXIII) ?
38	112 „	?
39	137 „	?
40	157 „	?
41	185 „	?
42	211 „	?
43	235 „	?
44	259 „	?
45	275 „	?
46	13 (XXIV)	?
49	57 „	?
50	70 „	?
51	88 „	?
52	103 „	?
55	168 „	?
56	168 „	?
58	16 (XXV)	?
59	36 „	?
60	58 „	?
61	58 „	?
62	71 „	?
63	71 „	?
64	122 (XXV)	?
65	122 „	?
66	155 „	?
67	175 „	?
68	199 „	?
70	223 „	?
71	251 „	?
73	45 (XXVI)	?
74	45 „	?
75	94 „	?
77	198 „	?
78	227 „	?
80	263 „	?
81	27 (XXVII)	?
82	27 „	160 (XXVII)?
83	160 „	?
84	197 „	?
85	197 „	?
86	240 „	?
87	283 „	?
88	329 „	?
89	361 „	?
91	26 (XXVIII)	?
92	57 „	?
93	57 „	?
94	104 „	?
95	136 „	?
96	136 „	?
97	213 „	?
98	213 „	?
99	256 „	?
100	297 „	?
101	342 „	?
102	458 „	?
103	458 „	?
104	24 (XXIX)	?
105	58 „	?
107	145 „	?
108	226 „	?
109	298 „	?
112	419 „	?
113	454 „	?
115	22 (XXX)	?
116	102 „	?
117	102 „	?
118	140 „	?
119	218 „	?
120	261 „	?
122	306 „	?
123	337 „	?
124	383 „	?

*) In această tabelă semnul ? arată că nu s'a primit răspuns sau că se mai aşteaptă răspuns dacă e pus după răspuns. Litera A arată că răspunsul trebue trimis direct autorului cererei.

Nr. Cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
126	423 (XXX)	?
128	33 (XXXI)	?
129	55 „	?
130	56 „	?
131	100 „	?
134	184 „	?
142	53 (XXXII)	?
143	102 „	?
144	142 „	?
146	216 „	?
148	296 „	?
149	343 „	?
152	19 (XXXIII)	19(XXXIII)?
153	51 „	?
154	51 „	?
157	146 „	?
158	185 „	?
159	217 „	?
162	295 „	?
163	341 „	?
166	457 „	?
179	385 (XXXIV)	?
181	24 (XXXV)	?
186	216 „	?
193	466 „	?
196	57 (XXXVI)	?
201	221 „	?
207	414 „	?
208	462 „	?
210	62 (XXXVII)	?
211	98 „	?
212	137 „	?
214	217 „	?
215	260 (XXXVII)	?
219	425 „	?
220	448 „	?
223	94 (XXXVIII)	?
227	57 (XXXIX)	?
235	222 „	?
237	360 „	?
238	409 „	?
239	458 „	?
243	212 (XL)	?
244	266 „	?
245	309 „	?
247	499 „	?
248	553 „	?
250	148 (XLI)	?
251	189 „	?
252	241 „	?
253	292 „	?
254	343 „	?
255	384 „	?
256	485 „	?
257	533 „	?
258	581 „	89, 197
259	629 „	?
260	30 (XLII)	A
261	139 „	478
262	251 „	?
263	307 „	?
264	368 „	?
265	422 „	?
266	530 „	?
267	588 „	?
268	639 „	?

G. DIVERSE

Pag.

1. Sporirea Bibliotecii „*Gazeta Matematică*“ 31, 90, 139, 198, 251, 308, 368, 422, 479, 530, 588, 639
2. Şedinţele Societăţii Române de Ştiinţe 530
3. Scrisoarea D-lui Prof. P. SERGESCU relativ la publicarea bibliografiilor matematice 588

H. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE

a) Repartizarea problemelor propuse după materii

Aritmetica şi teoria numerelor . . . . . 4712, 22, 3, 35, 6, 47, 8, 9, 60, 71, 83, 4, 808, 18, 9, 20, 31, 2, 44.

Geometria . . . . . 4711, 4, 5, 20, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 37, 8, 43, 4, 50, 1, 2, 3, 5, 9, 61, 2, 8, 72, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 85, 6, 7, 8, 9, 96, 7, 8, 807, 9, 10, 1, 21, 2, 3, 4, 5, 33, 4, 5, 6, 7, 43, 5, 6.

Algebra 4716, 7, 30, 3, 4, 9, 40, 1, 2, 54, 63, 4, 9, 81, 90, 1, 9, 800, 1, 2, 6, 13, 4, 7, 26, 7, 30, 8, 9, 40, 7, 8,

Trigonometria . . . . 4708, 18, 9, 23, 31, 2, 56, 7, 65, 6, 7, 80, 92, 3, 5, 803, 4, 5, 12, 5, 6, 28, 9, 49, 50.

Analitica . . . . . 4721, 82, 94, 841, 2, 51, 2, 3, 4.
Analiza şi Calculul Integral . . . . . 4746.
Descriptivă . . . . . 4758.
Calculul Probabilităţilor . 4770.
Mecanica . . . . . 4745.

b) Repartizarea problemelor propuse pe autori

N. Abramescu 4721, 94
N. N. Aldea 4761
I. Alexiu 4823
M. F. Amărăşteanu . . . 4739
A. Angelescu 4730, 90
Th. Angheluţă . . 4717, 32, 814
G-l Gh. Buicliu . 4712, 36, 60, 84, 809, 38, 49
Ad. Buşilă 4827
V. Claudian 4746, 69
Th. Gh. Cocea 4726, 51, 87, 811, 36, 46
C. Coşniţă 4841
Gh. Dumitrescu . . . 4765, 89, 825
U. M. Florescu . . 4720, 44, 63, 85 812, 21
L-t. M. I. Focşeneanu . . . 4805
Ad. C. Gheorghiu 4715, 38, 62, 854
Gh. Th. Gheorghiu 4734, 56, 66, 93, 848
M. Ghermănescu 4733, 54, 81, 91, 826, 40
H. P. Ionescu . . 4731, 49, 79, 801
I. Ionescu .4711, 23, 35, 47, 59, 71 83, 95, 807, 19, 31, 43
C. Ionescu-Bujor . 4714, 40, 67, 76 92, 803, 10, 28, 42, 53
L-t C. Ionescu-Ţiu 4718, 37, 78, 97, 850
D. Mavrodin 4816
N. N. Mihăileanu .4719, 25, 50, 74, 99, 813, 35
P. Mirescu 4745
M. Năstase 4824
Nicolau M. 4852
Al. V. Niculescu . 4728, 57, 80, 6, 833, 45
Lt. C-dor Gh. Niculescu . . .4741
O. Orănescu 4772
G. Popescu-Botoşani . . .4708, 73
Tib. Popoviciu . . . 4742, 806, 18
Al. A. Roşu 4753, 88, 815
I. C. Schileru-Dili 4729, 55, 68, 804
Al. Scodrano 4782, 851
P. Sergescu 4713, 820
Gh. D. Simionescu . 4716, 43, 64, 800, 34, 7
V. Thébault . 4724, 48, 77, 96, 808, 32
O. N. Ţino 4752, 847
Gh. Vasiliu 4727, 58, 75, 802 17, 29, 44
E. Vişa 4839
Lt. I. Gh. Zamfirescu . .4798, 822
Gh. Zapan 4722, 70

c) Indicarea paginei la care a fost propusă sau rezolvată

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
171	76 (II), 198 (XVI)	479
485	104 (V), 198 (XVI)	NR
585 *)	172 (VI), 238 (XVI)	
676	148 (VII)	
766	124 (VIII), 319 (XVI), 372 (XXX)	NR
887	172 (IX), 358 (XVI)	NR
914	267 (IX)	
1000 **)	220, 438 (XVI)	NR

1) Numărul latin din paranteză indică volumul în care problema este propusă. Problemele care au în coloana a doua mai multe numere, au fost publicate sau rectificate de mai multe ori în volumul respectiv.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru celelalte redacţia posedă soluţiuni care nu au fost publicate.

*) Soluţia problemei 585 s'a publicat la pag. 88 Vol. VII. Se mai aşteaptă discuţia la punctele cerute în nota de la finele acelei soluţii.

**) A se vedea pag. 291 Vol. XXXI, cu lămuriri.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
1008	244 (X), 462 (XVI)	NR
1056	100 (XI)	NR
1058 *)	100 „	NR
1092	196 „	
1146	76 (XII)	NR
1156	100 „	
1178	172 „	NR
1180	172 „	
1188	228 „	
1214	296 „	
1236	64 (XIII)	
1270	192 „	NR
1271	192 „	NR
1297	288 „	NR
1299	319 „	NR
1310	352 „, 372 (XXXI)	NR
1342	64 (XIV)	
1367	128 „	NR
1379	160 „	
1384	191 „	NR
1398	224 „	
1399	224 „, 200 (XVI)	NR
1412	256 (XIV)	NR
1424	228 „	
1450	352 „	NR
1497	128 (XV)	
1533	224 „	
1553	288 „	NR
1563	320 „	
1577	352 „	
1591	39 (XVI)	
1632	159 „	
1637	160 „	
1650	200 „	NR
1656	239 „	
1676	279 „	
1679	280 „	NR
1690	320 „	
1702	360 „, 399 „	
1711	372 (XXXI)	NR
1735	464 (XVI)	
1753	80 (XVII)	
1764	120 „	NR
1778	199 „	
1790	240 „	
1823	400 „	
1831	439 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
1835	440 (XVII)	
1840	466 „	
1858	78 (XVIII)	90
1876	119 „	
1882	120 „	
1898	199 „	
1906	200 „	NR
1911	239 „	
1914	239 „, 280 „	NR
1922	278 „	
1929	279 „	NR
1934	280 „, 320 „	
1944	319 „	
1945	320 „, 360 „	
1948	358 „	
1958	359 „	
1959	360 „	NR
1969	399 „	
1976	431 „	
1987	462 „	NR
2004	40 (XIX)	NR
2016	79 „	
2017	80 „	NR
2018	80 „	
2024	118 „	
2025	119 „	
2032	120 „	
2035	159 „	
2038	159 „	
2048	198 „	
2055	200 „	
2056	200 „	
2058	200 „	
2063	238 „, 280 „	308
2065	239 „	
2070	240 „, 280 „	NR
2074	278 „	NR
2079	279 „	
2083	280 „	
2091	319 „	
2106	358 „	
2108	359 „	
2110	359 „	
2112	360 „	
2116	398 „	
2118	399 „	

*) O soluție i s'a dat în articolul de la pag. 619 Vol. XLI. A se vedea și nota de la pag. 248. Vol. XLII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
2129	438 (XIX)	
2130	460 „	
2133	439 „	
2144	461 „	
2145	462 „	
2147	462 „	
2170	119 „	NR
2176	120 „	
2187	160 „	423
2194	197 „	
2197	198 „	
2217	239 „	
2222	240 „	
2227	279 „	
2235	280 „	
2240	318 „	
2247	320 „	
2248	320 „	
2249	320 „	
2250	320 „	
2263	359 „	
2264	360 (XX)	
2265	360 „	
2266	360 „	
2274	398 „	
2281	400 „	
2284	439 „	
2289	439 „	
2290	439 „	
2295	461 „	
2298	462 „	
2301	462 „	
2302	462 „	
2311	40 (XXI)	
2318	79 „ 160 „	
2330	118 „	
2332	119 „	
2337	120 „	
2338	122 „ 422 (XXXI)	NR
2343	157 (XXI)	
2344	158 „	
2353	159 „	
2354	198 „	31
2357	199 „	
2365	200 „	
2370	239 „	
2375	240 „	
2381	278 „	
2394	318 „	
2397	319 „	
2398	319 „	424

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
2405	320 (XXI) 423 (XXXI)	NR
2408	359 (XXI)	
2421	399 „	140
2422	399 „	
2423	399 „	
2430	439 „	NR
2435	440 „	
2436	440 „	
2439	440 „	NR
2456	31 (XXII)	
2461	32 „	
2462	62 „	
2466	63 „	NR
2469	63 „	198
2477	95 „	NR
2479	144 „	
2500	144 „	
2503	167 „ 333 (XXXI)	531
2510	191 (XXII)	251
2529	262 „	
2537	287 „	
2539	288 „	
2545	312 „	
2552	47 (XXIII)	
2553	47 „	
2556	48 „	369
2560	72 „	NR
2566	120 „	
2569	120 „	
2573	144 „	
2575	168 „	
2577	168 „	
2578	168 „	
2585	215 „	
2586	216 „	
2587	216 „	NR
2591	240 „	
2593	264 „	
2598	288 „	32
2599	288 „	
2602	318 (XXXI)	
2607	31 (XXIV)	NR
2623	80 „	513
2631	112 „	
2638	127 „	NR
2640	128 „	93
2645	143 „	
2647	143 „	
2655	191 „	NR
2660	191 „	
2661	192 „	
2664	24 (XXV)	

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
2665	24 (XXV)	NR
2675	63 „	
2682	64 „	
2684	80 „	NR
2688	80 „	
2689	80 „	
2692	108 „	
2694	108 „	
2701	141 „	34
2706	142 „	141
2713	143 „	NR
2717	143 „	NR
2727	168 „	
2731	191 „	
2735	192 „	NR
2752	264 „	
2758	56 (XXVI)	
2769	79 „	NR
2778	104 „	
2780	104 „	425
2789	135 „	
2803	160 „	
2814	192 „	NR
2818	216 „	
2820	216 „	
2822	216 „	
2827	247 „	
2828	248 „	
2850	335 „	
2851	335 „	
2865	70 (XXVII)	NR
2886	104 „	NR
2888	104 „	309
2895	143 „	
2906	184 „	
2909	221 „	NR
2912	222 „	NR
2920	262 „	
2922	263 „	
2926	264 „	NR
2936	343 „	NR
2947	376 „	NR
2953	416 „	
2955	416 „	
2959	448 „	
2960	448 „	
2969	39 (XXVIII)	
2971	39 „	
2983	79 „	
2985	80 „	
2993	119 „	

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
2996	120 (XXVIII)	
2999	120 „	
3000	120 „	
3003	159 „	
3005	159 „	
3013	199 „	
3019	200 „	
3041	319 „	
3052	359 „	
3054	360 „	
3059	360 „	
3069	400 „	NR
3070	400 „	
3071	439 „	
3073	439 „	
3075	439 „	
3081	479 „ / 454 (XXXI)	NR
3085	480 (XXVIII)	
3086	480 „	
3090	480 „	
3091	39 (XXIX)	
3095	40 „	
3096	40 „	
3108	80 „	
3118	120 „	
3127	159 „	NR
3134 *)	199 „	254
3150	240 „	
3160	280 „	
3161	318 „	NR
3167	320 „	
3173	358 „	
3177	359 „	
3178	360 „	
3180	360 „	
3189	400 „	
3198	440 „	
3208	480 „	NR
3210	480 „	
3220	40 (XXX)	
3227	80 „	
3228	80 „	
3230	80 „	NR
3232	119 „	
3236	119 „	
3239	120 „	
3245	160 „	
3248	160 „	
3249	160 „	
3251 **)	198 „	

*) A se vedea nota pag. 300 Vol. XLII. Se aşteaptă complectarea soluţiei.

**) Un început de soluţie s'a dat la pag. 314 Vol. XXX. Se aşteaptă soluţia completă.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
3253	199 (XXX)	
3255	199 „	NR
3260	200 „	
3267	239 „	
3277	280 „	
3279	280 „	
3287	320 „	
3288	320 „	
3291	358 „	
3296	359 „	
3298	359 „	NR
3299	360 „	534
3300	360 „	
3304	399 „	NR
3308	400 „	
3309	400 „	
3310	400 „	NR
3311	438 „	
3312	439 „	
3316	439 „	NR
3318	440 „	NR
3319	440 „	
3320	440 „	
3330	480 „	258
3332	119 (XXXI)	
3340	40 „	
3341	79 „	
3343	79 „	
3350	80 „	NR
3360	120 „	
3365	159 „	
3389	240 „	
3396	280 „	
3404	318 „	
3405	319 „	NR
3412	358 „	NR
3419	360 „	
3424	399 „	NR
3425	399 „	NR
3429	400 „	
3430	400 „	
3439	440 „	
3445	479 „	
3448	479 „	
3456	119 (XXXIII)	
3457	39 (XXXII)	
3459	40 „	
3467*)	79 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
3468	80 (XXXII)	
3472	80 „	
3474	119 „	
3477	119 „	
3488	159 „	
3489	159 „	NR
3493	160 „	
3495	199 „	
3497	199 „	
3499	199 „	
3503	200 „	310
3504	200 „	
3506	239 „	
3509	239 „	
3512	240 „	
3513	240 „	
3521	279 „	
3522	280 „	NR
3523	280 „	NR
3524	280 „	
3533	320 „	NR
3534	320 „	
3535	359 „	
3536 **)	438 „	
3542	360 „	NR
3545	398 „	NR
3546	399 „	
3547	399 „	
3551	39 (XXXIII)	
3554	400 (XXXII)	
3557	438 „	
3562	440 „	
3565	479 „	
3572	480 „	NR
3573	480 „	NR
3584	79 (XXXIII)	
3588	80 „	
3589	80 „	
3593	119 „	34
3597	120 „	
3600	120 „	
3607 ***)	159 „	
3608	159 „	NR
3610	160 „	
3620	199 „	
3622 ****)	239 „	
3625	239 „	
3627	278 „	NR

*) Vezi erata pag. 120 Vol. XXXII.
**) Vezi erata pag. 40 Vol. XXXIII.
***) Vezi erata pag. 240 Vol. XXXIII.
****) Vezi erata pag. 280 Vol. XXXIII.

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
3630	240 (XXXIII)	
3632	279 „	95
3635	279 „	NR
3639	280 „	
3640	280 „	35
3644	319 „	
3647	320 „	NR
3650	320 „	
3653	359 „	
3657	359 „	NR
3658	360 „	
3659	360 „	
3660	360 „	
3664	399 „	
3665	399 „	NR
3675	439 „	
3677	440 „	
3681	478 „	NR
3682	478 „	
3684	479 „	199
3689	480 „	
3692	39 (XXXIV)	
3693	39 „	
3699	40 „	NR
3700	40 „	NR
3702	79 „	
3703	79 „	NR
3705	79 „	
3706	79 „	
3713	119 „	
3714	119 „	
3720	120 „	
3725	160 „	
3732	199 „	
3733	119 (XXXV)	NR
3736	200 (XXXIV)	NR
3749	240 „	
3755	279 „	
3760	280 „	535
3762	319 „	
3763	319 „	
3764	319 „	
3765	320 „	
3766	320 „	
3768	320 „	
3772	359 „	
3775	360 „	
3776	360 „	
3780	360 „	
3784	399 „	
3787	400 „	

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
3790	400 (XXXIV)	
3792	439 „	
3793	439 „	NR
3802	479 „	NR
3804	479 „	
3807	480 „	
3808 *)	480 „	
3810	480 „	
3817	40 (XXXV)	
3819	40 „	
3820	40 „	
3823	79 „	
3824	79 „	
3829	80 „	NR
3832	119 „	
3836	120 „	NR
3837	120 „	
3839	120 „	
3840	120 „	
3844	159 „	NR
3845	159 „	
3849	160 „	
3853	199 „	NR
3863	239 „	
3864	239 „	NR
3867	240 „	
3873	279 „	
3874	38 (XXXVIII)	
3876	279 (XXXV)	
3880	280 „	
3883	319 „	
3896	360 „	NR
3902	398 „	
3906	399 „	200
3909	400 „	NR
3911 **)	439 „	
3913	439 „	NR
3915	439 „	
3916	439 „	NR
3920	440 „	NR
3924	479 „	
3926 ***)	480 „	
3933	39 (XXXVI)	NR
3934	39 „	
3939	40 „	
3944	79 „	NR
3945	79 „	
3950	80 „	
3961	159 „	
3965	159 „	
3975	200 „	

*) A se vedea complectarea enunțului la pag. 288 Vol. XL.

**) Inceputul soluției acestei probleme a fost dat la pag. 468 Vol. XXXVI.

***) Vezi rectificarea pag. 40 Vol. XXXVI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3976	200 (XXXVI)	
3983	238 „	NR
3985	239 „	
3988	240 „	
3999	280 „	
4000	280 „	
4005	319 „	
4010	320 „	NR
4013	359 „	NR
4021 *)	398 „	314
4022	398 „	
4028	400 „	
4029	400 „	
4030	400 „	NR
4034	439 „	NR
4035	440 „	
4038	440 „	
4041	38 (XXXVIII)	
4044	479 (XXXVI)	
4045	142 (XL)	NR
4053 **)	39 (XXXVII)	NR
4055	39 „	
4056	79 „	
4059	40 „	NR
4060	40 „	
4062	79 „	NR
4067	80 „	
4068	80 „	NR
4070	80 „	NR
4073 ***)	119 „	433
4074	119 „	
4075	120 „	
4080	120 „	
4083	159 „	
4084	159 „	
4085	159 „	NR
4088	160 „	
4091	199 „	97
4093	199 „	
4096	200 „	
4097	200 „	
4098	200 „	
4102	239 „	NR
4103 ****)	239 „	
4104	239 „	
4105	240 „	
4107	240 „	
4111	279 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4112	279 (XXXVII)	
4118	280 „	
4121	318 „	
4125	319 „	
4126	319 „	
4127	320 „	
4132	359 „	NR
4135	359 „	
4146	399 „	143
4148	400 „	NR
4150	400 „	NR
4151	438 „	NR
4155	439 „	
4157	439 „	144
4162	478 „	
4163	478 „	NR
4165	479 „	370
4166	479 „	
4167	479 „	NR
4169	480 „	NR
4172	39 (XXXVIII)	
4173	39 „	
4175	39 „	
4177	40 „	
4181	78 „	
4184	79 „	
4185	79 „	
4190 *****)	80 „	37
4191	118 „	639
4192	118 „	
4194	119 „	
4196	119 „	
4199	120 „	
4203	159 „	NR
4205	160 „	259
4206	160 „	NR
4210	160 „	NR
4214	198 „	
4215	199 „	
4225	239 „	
4226	240 „	
4230	240 „	NR
4232	279 „	
4234	279 „	
4236	280 „	NR
4238	280 „	
4240	280 „	NR
4243	319 „	

*) O soluție parțială a acestei probleme a fost dată la pag. 233 Vol. XXXVII.

**) Vezi erata pag. 120 Vol. XXXVIII.

***) Vezi erata pag. 504. Vol. XLII.

****) Vezi erata pag. 120 Vol. XXXVIII.

*****) Vezi erata pag. 120 Vol. XXXVIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4244	319 (XXXVIII)	
4245	319 „	
4247	320 „	
4248	320 „	
4249	320 „	NR
4250	383 (XXXIX)	
4251	359 (XXXVIII)	
4252	359 „	NR
4256	359 „	NR
4257	359 „	
4270	400 „	
4274	439 „	
4275	439 „	NR
4277	440 „	NR
4279	118 (XXXIX)	
4280	440 (XXXVIII)	NR
4281	479 „	NR
4283	479 „	NR
4285 *)	479 „	
4286	480 „	320
4287	480 „	
4288	480 „	644
4289	480 „	NR
4290	383 (XXXIX)	NR
4297	40 „	
4298	40 „	
4299	40 „	
4300	40 „	205
4301	78 „	NR
4302	78 „	
4303	78 „	NR
4306	79 „	261
4307	79 „	
4308	80 „	
4313	119 „	320
4315	120 „	NR
4316	120 „	
4319	120 „	NR
4320	120 „	NR
4326	159 „	
4329	160 „	
4333	198 „	NR
4335	198 „	
4337	200 „	NR
4339	200 „	
4340	200 „	NR
4342	239 „	NR
4344	240 „	645
4350	240 „	
4352	286 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4355	287 (XXXIX)	
4356	287 „	NR
4357	288 „	NR
4358	288 „	NR
4360	334 „	NR
4362	334 „	NR
4363	335 „	NR
4365	335 „	
4368	336 „	
4369	336 „	
4370	336 „	
4373	383 „	
4376	384 „	
4377	384 „	
4378	384 „	
4380	384 „	NR
4384	431 „	NR
4385	431 „	
4389	432 „	NR
4391	478 „	145
4393	478 „	NR
4394	479 „	537
4395**)	479 „	NR
4396	479 „	NR
4398	480 „	
4399	480 „	NR
4400	480 „	
4402	480 „	
4404	526 „	NR
4405	526 „	
4406	526 „	
4407	527 „	
4409	527 „	538
4410	527 „	
4411	528 „	
4412	528 „	NR
4413	528 „	262
4414	528 „	147
4416	46 (XL)	NR
4417	46 „	
4418 ***)	47 „	645
4420	47 „	
4423	48 „	490
4426	48 „	NR
4428	95 „	39
4432	95 „	
4435	96 „	
4437	96 „	
4438	96 „	
4441	143 „	

*) Vezi erata pag. 40 Vol. XXXIX.
**) A se vedea erata pag. 48 Vol. XL.
***) Vezi rectificare pag. 144 vol. XL.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4442	143 (XL)	
4443	143 „	263
4445	143 „	NR
4446	143 „	
4447	144 „	
4449	144 „	NR
4450	144 „	
4452	190 „	NR
4453	190 „	
4455	191 „	539
4458	191 „	
4460	192 „	149
4461	192 „	NR
4464	238 „	NR
4465	238 „	NR
4466	239 „	NR
4467 *)	239 „	539
4468	239 „	NR
4469	239 „	41
4470	240 „	
4471	240 „	541
4473	240 „	NR
4474	240 „	NR
4476	285 „	428
4477	285 „	151
4478 **)	285 „	
4479	285 „	NR
4480	286 „	NR
4481	286 „	NR
4482	287 „	
4483	287 „	98
4484	287 „	
4485	288 „	207
4486 ***)	288 „	NR
4487	334 „	NR
4488	334 „	371
4489	334 „	NR
4490	335 „	NR
4491	335 „	
4492	335 „	NR
4494	336 „	
4495	336 „	
4496	336 „	
4498	336 „	
4500	382 „	265
4501	382 „	265
4502	382 „	646
4503	383 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4504	383 (XL)	647
4505	383 „	42
4507	384 „	
4508	384 „	152
4509	384 „	
4511	430 „	NR
4513	430 „	NR
4514	431 „	NR
4515	431 „	NR
4516	431 „	NR
4517	431 „	324
4518	431 „	589
4520	432 „	
4522	432 „	NR
4524	478 „	
4525	478 „	
4526	478 „	
4527	479 „	
4528	479 „	266
4529	479 „	
4530	480 „	
4531	480 „	328
4532	480 „	154
4533	480 „	NR
4534	480 „	NR
4535	526 „	45
4540	527 „	
4542	527 „	542
4544	528 „	46
4545	528 „	329
4546	528 „	102
4547	573 „	NR
4548	573 „	
4550	574 „	NR
4551	574 „	
4552	574 „	649
4553 ****)	574 „	
4554	574 „	590
4555	575 „	597
4556	575 „	
4557	575 „	
4558	576 „	NR
4559	116 (XLI)	
4560 *****)	116 „	
4561	116 „	NR
4562	117 „	493
4563	117 „	156
4564 ******)	117 „	

*) Vezi erata pag 576 Vol. XL.
**) Vezi erata pag. 384 Vol. XL.
***) Vezi erata pag. 120 Vol. XLI.
****) I s'a dat o soluție la pag. 352 Vol. XLI. A se vedea nota de la pag. 302. Vol. XLII. Se așteaptă complectarea soluției.
*****) Vezi erata pag. 160 Vol. XLI.
******) Vezi erata pag. 412.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4566	118 (XLI)	
4568	118 „	
4569	118 „	544
4570	118 „	
4571	119 „	
4573	119 „	
4574	119 „	
4575	119 „	
4576	119 „	
4577	120 „	
4578	120 „	
4580	166 „	105
4581	166 „	
4583	167 „	650
4585	167 „	651
4586	262 „	
4587	262 „	NR
4588	168 „	
4589	168 „	
4590	168 „	
4591	214 „	372
4592	215 „	NR
4593	215 „	
4594	215 „	
4595	215 „	
4596	215 „	NR
4597	216 „	
4598 *)	216 „	NR
4599	216 „	
4600	216 „	269
4601	216 „	NR
4602	216 „	NR
4603	262 „	NR
4604	262 „	48
4605	263 „	NR
4606	263 „	271
4607 **)	263 „	
4609	263 „	208
4610	263 „	106
4611	264 „	
4612	264 „	NR
4613	264 „	
4614	264 „	
4615	310 „	NR
4618	311 „	
4619	311 „	
4620	311 „	
4621	311 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4622	312 (XLI)	
4625	312 „	
4626	312 „	
4627	359 „	107
4628	359 „	NR
4629	359 „	272
4630	359 „	NR
4631	359 „	
4632	359 „	108
4633	359 „	
4634	360 „	
4635	360 „	654
4636	360 „	NR
4637	360 „	
4638	360 „	
4639	406 „	
4640	406 „	
4641	407 „	NR
4642	407 „	
4643	407 „	431
4644	407 „	
4645	407 „	310
4646	408 „	51
4647	408 „	NR
4648 ***)	408 „	
4649	408 „	
4650	408 „	NR
4652	453 „	
4653	454 „	210
4654	454 „	
4655	454 „	
4656	454 „	546
4657	454 „	NR
4658	455 „	374
4659	455 „	273
4660	455 „	
4661	455 „	
4662	455 „	211
4663	502 „	
4664	503 „	
4665	503 „	432
4666	503 „	
4667 ****)	503 „	NR
4668	503 „	274
4669	503 „	161
4670	504 „	NR
4671	504 „	
4672	504 „	NR

*) Vezi erata pag. 264 Vol. XLI.
**) „ „ „ 312 „ „
***) Vezi erata pag. 456 Vol. XLI.
****) Vezi erata pag. 552 Vol. XLI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4673	504 (XLI)	
4674	504 „	
4675	550 „	NR
4676	550 „	
4677	550 „	
4678	550 „	
4679	550 „	377
4680	550 „	NR
4681	551 „	
4682	551 „	
4683	551 „	NR
4684	551 „	162
4685 *)	552 „	NR
4686	552 „	NR
4687	598 „	NR
4688	598 „	NR
4689	598 „	
4690	598 „	NR
4691	599 „	
4692	599 „	655
4693	599 „	NR
4694	599 „	381
4695	600 „	
4696	600 „	
4697	600 „	
4698	600 „	NR
4699	646 „	657
4700	646 „	218
4701	646 „	330
4702	646 „	
4703	647 „	
4704	647 „	
4705	647 „	
4706	647 „	
4707	648 „	
4708 **)	54 (XLII)	
4709	648 (XLI)	
4710	648 „	NR
4711	54 (XLII)	164
4712	54 „	547
4713	54 „	382
4714	54 „	383
4715	55 „	
4716	55 „	276
4717	55 „	
4718	55 „	385
4719	55 „	599
4720	56 „	
4721	56 „	602
4722	56 „	
4723	110 „	
4724	110 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4725	110 (XLII)	657
4726	110 „	NR
4727	111 „	436
4728	111 „	
4729	111 „	
4730	111 „	
4731	112 „	
4732	112 „	550
4733	112 „	
4734	112 „	NR
4735	166 „	498
4736	166 „	
4737	166 „	437
4738	166 „	
4739	167 „	605
4740	167 „	
4741	167 „	
4742	167 „	NR
4743	168 „	
4744	168 „	658
4745	168 „	
4746	168 „	
4747	222 „	332 499
4748	222 „	661
4749	223 „	NR
4750	223 „	387
4751	223 „	
4752	223 „	609
4753	223 „	
4754	224 „	
4755	224 „	
4756	224 „	439
4757	224 „	
4758	224 „	
4759	278 „	440
4760	278 „	662
4761 ***)	278 „	NR
4762	278 „	
4763	279 „	441
4764	279 „	
4765	279 „	
4766	279 „	
4767	280 „	551
4768	280 „	
4769	280 „	553
4770	280 „	NR
4771	334 „	443
4772	334 „	NR
4773	335 „	
4774	335 „	
4775	335 „	

*) I s'a rectificat numărul de ordine la pag. 600 Vol. XLI.
**) I s'a rectificat enunțul de la pag. 648 Vol. XLI.
***) I s'a rectificat enunțul la pag. 616.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4776	335 (XLII)	
4777	335 „	
4778	336 „	
4779	336 „	
4780	336 „	
4781	336 „	NR
4782	336 „	
4783	390 „	
4784	390 „	NR
4785	390 „	
4786	390 „	
4787	390 „	
4788	390 „	611
4789	391 „	
4790	391 „	
4791	391 „	NR
4792	392 „	
4793	392 „	
4794	392 „	
4795	446 „	NR
4796 *)	446 „	554
4797	446 „	
4798	446 „	NR
4799	447 „	NR
4800	447 „	611
4801	447 „	
4802	447 „	NR
4803	447 „	
4804	448 „	NR
4805	448 „	NR
4806	448 „	NR
4807	502 „	NR
4808	502 „	612
4809	502 „	
4810	502 „	NR
4811	503 „	NR
4812	503 „	
4813	503 „	NR
4814	503 „	
4815	504 (XLII)	
4816	504 „	
4817	504 „	
4818	504 „	
4819	558 „	664
4820	558 „	
4821	558 „	NR
4822	558 „	NR
4823	559 „	NR
4824	559 „	NR
4825	559 „	NR
4826	559 „	NR
4827	560 „	NR
4828	561 „	
4829	561 „	NR
4830	561 „	
4831	614 „	NR
4832	614 „	NR
4833	614 „	NR
4834	614 „	NR
4835	615 „	NR
4836	615 „	NR
4837	615 „	NR
4838 **)	615 „	NR
4839 ***)	616 „	NR
4840	616 „	NR
4841	616 „	NR
4842	616 „	NR
4843	670 „	NR
4844	670 „	NR
4845	670 „	NR
4846	670 „	NR
4847	671 „	NR
4848	671 „	NR
4849	671 „	NR
4850	671 „	NR
4851	671 „	NR
4852	672 „	NR
4853	672 „	NR
4854	672 „	NR

I. EXERCIȚII ****)

Aritmetica și teoria numerelor . . . . . 6(219).
Geometria . . . . . 4(110), 5(165), 11(277), 12(278), 16(388).
Algebra . . . . . 7(220), 8(220), 17(389), 18(389), 19(389), 20(445), 21(445), 25(556), 29(613), 33(667).
Trigonometria . . . . . 1(52), 2(53), 3(53), 9(221), 10(221), 13(333), 14(333), 22(500), 23(501), 26(557), 27(557), 28(557), 30(613) 31(666), 32(667), 34(667), 35(668), 36(668).
Mecanica . . . . . 24(501).
Analiza . . . . . 37(668 , 38(669).

*) A se vedea erata pag. 560 Vol. XLII.
**) „ „ „ „ „ 672 Vol. XLII.
***) „ „ „ „ „ 672 Vol. XLII.
****) Numerele din paranteză indică pagina la care a fost propus exercițiul, al cărui număr prevede paranteza.

J. TABLOUL NUMELOR

A Ioanei V. R., 40.
Abason E., 6, 195, 360, 393, 400, 403, 406, 409, 477, 505.
Abel, 57, 89.
Abramescu N., 5, 6, 25, 56, 70, 248, 250, 289, 290, 392, 474, 475, 537, 546, 547, 602, 605.
Adam I. M., 95, 141, 389, 532, 557, 613, 666, 667.
Agnew P. R., 304.
Agronomof N., 254.
Ahlfors, 57, 58.
Alaci V., 5, 6, 93, 95, 139, 141, 142, 199, 254, 474, 534.
Alasia C., 31, 198, 422.
Albeanu Gh. I., 297.
Aldea N. N., 33, 35, 37, 98, 135, 143, 145, 193, 278.
Alembert D'., 307.
Alexandrescu T. I., 17.
Alexiu I., 75, 165, 559.
Amărăscu O. G., 93.
Amărăşteanu F. M., 40, 44, 46, 51, 150, 154, 161, 167, 194, 208, 262, 264, 269, 274, 276, 277, 278, 298, 314, 322, 331, 332, 333, 372, 376, 381, 385, 386, 388, 428, 440, 445, 498, 501, 541, 542, 550, 551, 552, 553, 597, 599, 601, 602, 605, 610, 646, 649, 652, 654, 662, 664, 667.
Amodeo F., 479, 531.
Ampère André-Marie, 89, 138.
Anastasiu M. M., 297, 613.
Anca I. I., 437.
Anderson L. N., 87.
Andriescu R. M., 611.
Anfilochie Hotinul, 337.
Angelescu A., 6, 111, 258, 299, 391, 507.
Angelescu C. Dr., 170, 227, 228, 231.
Angheluţă Th., 5, 55, 112, 250, 474, 503, 550, 560, 569, 589.
Anguita F., 249.
Anicolaesi V. C., 383, 664.
Antomari X., 506.
Antoniu C., 6.
Antoniu S. I., 5, 6, 95, 142.
Apolonius, 537.
Apostol G. N., 277, 383.
Apostol V. R., 109, 150, 194, 264, 274, 298, 329, 330, 376, 380, 383, 386, 388, 431, 437, 507, 538, 541, 552, 602, 610, 611, 646, 650, 653, 656.
Aprihăneanu I., 309.
Arago 414.
Arcadian P. N., 93.
Archimede, 180, 197.
Ardeleanu Gh. D., 194.
Arghiriade Em., 6.
Armeanca I., 6.
Arnold de Port Royal, 523,
Arşavschi Al., 37, 212, 380, 382.
Arsene Al., 35,
Asachi Gh., 26, 522, 523, 524, 525, 526, 527.
Aschieri F., 475.
Aubert, 126.
Aumann G., 88.
Ausmann G., 476.
Avram N. C., 263.
Avramescu A.. 478.
Avramescu C., 6.
Ayyangar K. A. A., 29.

Babini J., 87, 195, 529.
Bacaloglu E., 248, 249, 307.
Backes F., 419.
Bădescu E. A., 150, 538.
Bădescu Fl. C., 297.
Bădescu Fl. I., 298.
Bădescu A. L., 7.
Bădescu Gh. N., 298.
Bădescu R., 7, 59.
Bădulescu V., 88.
Baer R., 421, 586.
Baidaff Ig. B., 7, 61, 87, 138, 195, 421.
Bajtai A. J. B., 122.
Bal S. L., 330, 378, 382, 384, 388.
Balaban I. Gh., 35.
Baloghy, 337.
Banach, 304.
Banciu I., 7.
Barbălatt M. B., 34, 95, 253.
Barbariu P., 70.
Barbilian D., 5, 7, 59, 393, 505
Barmen K. F., 475, 586.
Bârsu T. I., 34, 93, 142.
Bartels, 65.
Basacov Gh., 210, 271, 530.
Bathory Ş., 620.
Bazac I. Al., 298.
Bazac A. I. D., 383, 385, 487.
Beckenbach F. E., 586.
Beiu-Paladi G. E., 264, 298, 385, 493, 508, 610, 646.
Bejenaru, Gh. V., 298.
Beleş A., 195.
Belian R., 309.
Bell C., 29.
Bell T. E., 87, 304.
Beltrami E., 65.
Bernouilli, 88, 213, 253, 254,
Berra S. E., 367, 421, 529.
Bertrand L., 523, 524, 525.
Beschea C., 385.
Bessel, 299.
Bieberbach L., 88.
Biernaki M., 250.
Biggeri C., 304.
Bilo J., 305.
Birkhoff G., 421.
Bivolaru M. I., 165, 550, 610.
Bivolaru M. L, 332, 384, 652, 662, 664.
Blaga E., 653.
Blaschke W., 250.
Bleiweiss P., 141.
Blumberg H., 421.
Blumenfeld M. D., 95.
Bock I. Gh., 534.
Bodnărescu M. H. 90, 331, 384, 385, 664.
Bogdan Gr. I., 40, 150, 194, 208, 263, 277, 298, 330, 383, 385, 386, 538, 542, 610, 653.
Bogdan M, 310.
Boggs H., 421.
Bogza G. V., 40, 46, 150, 208, 264.
Boian D. Em., 298.
Boian P. O., 231.
Boiangiu I. Gh., 262, 264, 538.
Boitan P. N., 208.

Boitaru P. N., 263.
Boldescu P., 29, 420.
Bolyai I., 66, 67, 68, 69, 522.
Bonne Colonel 639.
Bompiani E., 474.
Boole, 475, 586.
Boolean, 29.
Boon C. F., 639.
Borel E., 195.
Borneanu G., 7, 426.
Boroş C. I, 330.
Bostangiu D. I., 553, 556.
Bosuvka O., 196.
Botea G. N., 5, 6, 7, 93, 141, 393, 417, 477, 529, 534, 537, 538, 539, 541, 542, 587, 589, 590, 629, 644, 647, 649, 651, 653, 654, 655.
Botez Gica D-ra, 383, 610.
Botez St. M., 7.
Botezatu C. F., 298.
Bouligand G., 250, 477, 478, 507.
Bourdan, 394.
Bran C., 437.
Brătianu C. I. Ionel, 176.
Bratu Gh., 7, 393, 394, 477, 589.
Bratu I., 363.
Brauer R., 29.
Brener M. A., 7.
Brianchon, 131.
Brink, 586.
Broncart F. I., 618.
Brocard H., 205, 243, 455. 630, 650, 651.
Brüll L., 141.
Brukner V., 7.
Bruwier L., 196.
Bucur N. V., 40, 150, 194, 208, 263, 298, 330, 383, 385, 437, 538, 542, 610.
Bucurenciu I. V., 608, 610, 611, 664.
Bucurescu I., 7.
Bucurescu I. V., 437.
Budeanu I. C.. 7, 119, 195.
Buga A., 479.
Buicliu Gh., 5, 6, 7, 45, 50, 54, 61, 76, 81, 93, 151, 156, 160, 166, 190, 247, 261, 268, 272, 278, 309, 330, 365, 370, 380, 390, 415, 431, 448, 461, 502, 535, 537, 547, 550, 581, 615, 629, 637, 643, 662, 671.
Buitiul G., 620.
Bujoreanu N., 7.
Bulat C. M., 385.
Bunescu D. A., 5, 7, 76, 92, 309, 478, 505, 525.
Bungescu I., 8.
Buradescu Tr., 8.
Burghelea S. C., 298.
Burlea M. A., 297.
Bush V., 367.
Busichovici A., 141.
Buşilă Ad., 8, 95, 141, 560.
Buşilă D. C., 8, 117, 138, 176, 229, 476.
Buşilă I., 8, 187.
Butlewski Z., 250.
Buzescu Cl. Georgeta, 297.
Buzescu A. V., 298.
Buzincu I., 652.
Buzincu D. I., 263.
Buzincu I. I., 40, 147, 150, 194, 274, 298, 329, 431, 508, 529, 538, 542, 590, 612.
Buzincu S. I., 208.
Buznea D. D., 297.
Bydzowsky B., 304.
Byerly E. W., 29.

Călin I. C. D., 40, 46, 47, 330, 610.
Călinescu I. A., 161, 199, 212, 274, 276, 277, 301, 376, 381, 382, 384, 385, 437, 550, 597, 602, 657.
Călinescu-Trâmbiţaş Paraschiva, 109, 212,
Călugăreanu G., 250, 474.
Cambureanu V. D., 8.
Cambureanu V. V., 8.
Câmpan Fl., 197, 413.
Campbell W. J., 367.
Cantor M., 413.
Capriel I., 8.
Carafoli E., 8.
Caraman E., 8, 410.
Caraman D. V., 208, 298, 329, 499, 652.
Caratheodory, 57.
Cardan, 659.
Cardara Gh., 40.
Cârdei D. Gh., 297, 383, 610, 664.
Carlitz L., 421.
Carmichael D. R., 28.
Carol I, 178.
Carol II, 230.
Carol-Rusk E., 304.
Carson L. St. G., 479, 531.
Cartan E., 57, 58, 367.
Cartianu Gh., 8.
Cassian Gh., 8.
Catalan E., 68, 467.
Cauchy, 68, 270, 414, 419.
Cazacu N. C., 8.
Ceauşescu E. V., 150, 194, 208, 261, 262, 263, 322, 330, 493, 538, 542, 646, 650.
Ceauşoglu V., 424.
Čech, 423.
Cehan G. A., 208.
Cell W. I., 586.
Cercelaru Gr. D., 46, 266, 330.
Cerchez Gr., 229.
Cesaro E., 29, 270, 454.
Cetăţeanu N., 298.
Cetăţeanu St., 298, 610, 611.
Ceva, 130, 475.
Chambers H. L., 87.
Chambrez I., 526.
Champly R., 308.
Chapman W. H., 420.
Chasles, 414, 631.
Cherciu Gh., 610, 664.
Chiriac I. C., 208, 329, 538.
Chiricescu V., 8.
Chiricuţă A., 8.
Chiriţă M. M., 194, 208, 330, 541.
Chiţulescu Gh., 526, 527.
Chiţulescu I. I., 5, 8, 505.
Chiţulescu I. Tr., 440, 527, 556.
Chytilova Marta 476.
Ciobanu St., 368.
Ciobanu I. V., 297.
Cioc I. D., 298, 437, 499.
Cioc M., 8.
Ciorănescu I. C., 95, 141.
Ciorănescu I. N., 5, 8, 34, 93, 97, 132, 143, 144, 145, 195, 250, 371, 477, 505, 530, 589.
Cipariu T., 509.
Cismaru V., 297.
Ciucă I. I., 150, 194.
Ciurescu I. R., 298, 332, 386, 388, 440, 498, 550, 552, 553, 602, 610, 658, 664.

Charkson M. J., 422.
Claudian V. [1]), 168, 280, 553.
Coatu G., 309.
Cocea G. Th., 41, 111, 223, 320, 390, 417, 503, 611, 615, 656, 670.
Coculescu N., 530.
Cojaru P., 147.
Cojocaru P. P., 40, 51, 150, 194, 208, 263, 274, 277, 298, 329, 386, 388, 493, 538, 542, 552, 553' 590, 610, 652, 654
Comberousse Ch. de, 515, 519.
Comloşan Cornelia, 332, 383, 388, 442, 610, 664.
Constantinescu Anton, 93.
Constantinescu Gh. Ing., 9.
Constantinescu Gh. fost Prof., 175.
Constantinescu Gh , Prof., 191, 196, 250, 257, 299, 300, 319, 581, 584, 587
Constantinescu Gh. Gh , 29, 37, 132, 138, 142, 165, 199, 212, 218, 277, 371, 382, 424, 437, 477, 478, 529, 534, 544, 587, 302.
Constantinescu I., 478.
Constantinescu Sp., 309.
Constantinescu T., 9, 175.
Constantinescu V., 298.
Constantinescu Z., 5, 9.
Conta V., 132.
Coolidge L. J., 29.
Cooper R. 420.
Copeland H. A., 421.
Copernic, 181.
Cornăţeanu I. A., 40, 263, 277, 298, 330, 383, 386, 437, 440, 499, 507, 538, 590, 610, 611, 650, 662, 664.
Coşereanu I., 9, 93, 95, 142.
Coşniţă C., 95, 201, 203, 616.
Coşniţă V. [2]), 95, 142, 534.
Costăchescu V. C., 476.
Costinescu D., 9.
Cotescu S. C., 150, 194, 208, 263, 277, 330, 385, 437, 538, 542, 610.
Cotiger S. I., 274, 277, 383, 385, 498, 552, 553, 652, 664.
Cotlar M., 28.
Crăciun I. I., 440, 610, 611, 664.
Crăciunescu E., 52.
Crăciunescu I. M., 82, 297, 507.
Craig T. A., 367.
Craiu S. P., 208.
Cramer, 571.
Creţu Ş., 297.
Cristea Em., 263.
Cristescu V., 24, 25, 30, 303.
Crivăţ I., 309.
Crivetz T., 639.
Crook J. W., 477.
Csecke W., 42, 194, 329, 541, 597, 599, 646.
Culcer G-l, 231.
Curchi I., 37, 329, 537.
Curie, 418.
Curry B. H., 304.
Curtiss H. J., 421.

Dan M., 194, 330.
Danghel St., 526, 527.
Darboux G., 28, 210, 250, 475, 605.
Darmois G., 250.
Dăscălescu Hr., 9.
Davidescu Al., 231.
Davidoglu A., 530.
Davila C., 251.
Deac I., 597.
Deaux R., 196, 250, 419, 587.
Dechalles P., 90.
Deciulescu D. Gh., 297, 383, 386, 437, 498, 611. 612.
Delens P., 88, 196, 419,
Denjoy A., 250.
Descartes, 181, 418, 648.
Deuren P., 506.
Deutsch M. A., 277. 330, 386, 388, 437, 600, 602, 610, 611, 658, 662.
Diaz L. E., 367.
Dickson E. L., 304, 421.
Dimitriu I. Călin, 150, 208, 263, 277, 385, 542, 553, 556, 653.
Dincă Al. Şt., 297.
Dines L. L., 87.
Dirac, 474, 529.
Dirichlet, 367, 414.
Dobbs I. V. 639.
Dobra V. 620.
Dobrescu A., 150, 194, 380, 528, 541, 646.
Dobrescu D. P., 194, 264, 330, 383, 437, 438, 539, 541, 546, 550, 552, 589, 610.
Dobrescu - Băbici M., 93, 199.
Dobrovici I , 25.
Doehlemann K., 422.
Dollon J., 587.
Dordea Tr., 17.
Dörge K., 475.
Dorneanu V., 95.
Drăgănescu Şt., 305.
Drăghiceanu M., 308.
Drăghicescu I. 653.
Dragu T., 226.
Drâmba D., 589.
Drape Elisabeth, 476.
Dressel G. F., 586.
Drosescu Gh. I., 9.
Dumbrăvescu G. D., 40, 208, 263.
Dumitrescu I. C. P. A., 263.
Dumitrescu A. D., 9.
Dumitrescu I. Gh., 5, 9, 279, 391, 505, 559, 621.
Dumitrescu C. I. Ing., 9.
Dumitrescu C. I. Elev, 437.
Dumitrescu G. M., 34, 70.
Dumitriu D. M., 275.
Dumitru C. I. 646.
Dumont E., 308.
Dupin, 249, 414.
Durell V. C., 420.
Dye A. K., 364.

Ecaterina II, 450.
Eckstein V , 272, 274, 376, 377, 386, 431, 438, 550, 600, 602, 656.
Eddington S. A., 420.
Einstein, 70.
Eisenhart P. L , 57.
Emanoil V., 76.
Emanuel D., 226, 231.

1) Este numele actual al D-lui V. Coşniţă.
2) Vezi Claudian V.

Enache D , I. 150, 194, 208, 264, 298, 330, 538, 542, 653.
Enăşescu D. V., 40, 150, 208, 263, 538, 542.
Engel Fr., 586.
Enke, 79.
Enneper, 89.
Erbiceanu, 120.
Estève R., 478.
Etherington H. M. I., 420.
Euclide, 64, 66, 67, 68, 70, 90, 139, 179. 522, 524, 525, 618, 619, 639.
Euler, 150, 248, 303, 307, 376, 419, 446, 520, 522, 523, 545, 645, 656.
Evolceanu V., 230
Ewisig M. G., 586.

Faà de Bruno Fr., 198
Fabian W., 420.
Federigo E. 522.
Felbinger I. von, 450, 451.
Felix C. G-l, 9.
Felix C. St. C., 35.
Fenchel W., 475.
Fermat, 382, 588.
Fibonacci, 140, 141, 248, 615, 671.
Filică C Şt. 332.
Filipescu Em. Gh., 9, 119, 169, 177, 195, 226, 229, 361, 438, 476.
Fini P., 610.
Finţescu A., 93, 95.
Firu P., 383, 440.
Fischer Al., 422.
Fischer I. H., 475.
Fistié G., 250.
Fitting F., 586.
Flancher, 101.
Fletcher-Jones A. A., 420.
Florescu H., 150.
Florescu B. I., 34, 142, 370, 433.
Florescu M. U., 5, 6, 9, 56, 168, 199, 253, 279, 398, 441, 442, 503, 556, 658, 660.
Florescu L. V., 150, 161, 163, 194, 208, 211, 264, 272, 274, 276, 298, 329, 332, 376, 380, 382, 384, 385, 388, 437, 438, 440, 441, 498, 506, 541, 544, 551, 553, 590, 597, 600, 602, 610, 611, 646, 650, 651, 652, 657, 664.
Florescu L. Zoe, 499, 610.
Focşăneanu I. M., 9, 95, 141, 253, 259, 304, 448, 581.
Föppl A., 139.
Fortescue, 403.
Foster M. R., 421. 586.
Fourier, 421.
Franasovici R., 230.
Frankland B. W., 525.
Fredholm, 89.
Frégier, 29.
Frenet F., 507.
Freytag O., 475.
Frink H. A., 422.
Froelich E., 620.
Fuller B. F., 87.
Fundăţeanu C. I., 9.
F. L. G., 367.
F. J., 440.
F. G. M., 271, 278.

Gabrilescu R., 9.
Gajdoš T., 420.
Galan D. I., 298.
Galbură Gh., 398.
Gâlcă I. T., 9.
Galenkin, 87.
Gambier M., 474.
Garcia G., 250.
Garnier R., 251.
Gaspar L. F., 367.
Gataianţu V. B., 93, 141.
Gâţan M., 34, 142.
Gauss, 27, 65, 88, 155, 156, 390, 414, 522.
Gauthier P., 251.
Gavrilescu N. C., 194, 208, 264, 329, 382, 384, 385, 386, 437. 443, 493, 538, 541, 554, 590, 600, 610, 611, 652, 658, 662, 664.
Gelin E., 90.
Gentry M., 185.
Georgescu C., 368.
Georgescu I. C., 34, 141, 142, 199, 253, 309.
Georgescu E., 31.
Georgescu I. Em., 142.
Georgescu I. St. I., 35.
Georgescu I. N., 10, 227.
Georgescu N. N., 10.
Georgescu-Roegen N., 10, 141.
Georgescu-Val N. I., 10, 76.
Gérardin A., 146, 147
Gerono, 243, 244, 284, 285.
Gheorghiu C. Ad., 5, 6, 10, 55, 89, 96, 166, 199, 202, 203, 204, 279, 535, 537, 672.
Gheorghiu Th. Gh., 5, 6, 10, 25, 32, 33, 37, 39, 95, 112, 141, 142, 186, 200, 224, 250, 253, 258, 279, 299, 309, 392, 424, 439. 440, 490, 493, 505, 530, 554, 671.
Gheorghiu C. I., 141.
Gheorghiu S. I., 10.
Gheorghiu A. M , 10.
Gheorghiu Gh. P., 332.
Gheorghiu P. P., 383, 440, 664.
Gheorghiu A. Ş , 10.
Ghermănescu M., 5, 10, 82, 98, 102, 103, 105, 112, 147, 149, 211, 218, 224, 250, 253, 254, 265, 266, 269, 270, 299, 300, 309, 310, 314, 324, 336, 368, 371, 391, 477, 507, 544, 546, 559, 616.
Ghermani D,. 176, 195, 476.
Ghibu O., 450.
Ghimicescu I. Gh., 95.
Ghimuş D. A., 10.
Ghişoiu I. C., 208, 646.
Ghişoiu I. P., 10, 95.
Ghiţescu V,, 10.
Gibbins M. N., 639.
Gillespie C D., 29.
Gloden A., 26, 27, 87, 161, 246, 274.
Göbl F., 60.
Godeau R., 305, 419, 587.
Godeaux L., 474.
Goldenberg E. M., 150.
Goldner H., 60.
Gonzales O. M., 87, 249.
Gooden J., 617, 618, 619, 620.
Goormaghtigh R., 88, 196, 250, 282, 419, 512.
Gorovei A. S., 93.
Goth L. M., 611.
Gött J., 419.
Gowurin K. M., 421.
Grabovschi F. E., 211.
Graeser E., 476.
Grant S. H., 304.
Greenhill G. A., 139.

Greenwood A. I., 28.
Grigore M. I., 298.
Grigorescu C., 10.
Grigorescu E., 309.
Grigorescu A. V., 262, 263, 264, 541.
Grumăzescu M., 46, 150, 161, 194, 274, 328, 330, 332, 376, 383, 386, 542, 550, 551, 553, 556, 590, 600, 608, 610, 612, 646, 652, 662, 664.
Grün O, 475.
Guenjian B., 251.
Guichard C., 506.
Gussenhoven L., 196.
Guţu I. Al., 10, 195.
Gutzu V., 10.
Gyerö-Monostor M., 122.
Gwyther E. C., 420.

Haimovici M., 639.
Hall M., 421.
Halsted B. G., 67. 69.
Hamilton J. N., 29, 367.
Hanganu D. M., 10, 195, 476.
Haret C. Sp., 24.
Helfert A. von, 450.
Herjeu N., 177.
Herman V., 382, 383, 388, 437, 478, 553, 556, 610, 611.
Hermite, 89, 250, 530.
Hermann A., 475.
Herschfeld A., 28.
Heuchamps E., 250.
Hilbert, 87.
Hilf A., 539, 541.
Hill E., 87, 414.
Hill D. J., 28.
Hilton H., 393, 477.
Hoheisel G., 89.
Hollcroft R. T., 421, 586.
Hope-Jones W., 420.
Horenstein H. S., 330.
Hortopan Gh. Gr., 298.
Hossu I., 478.
Houël J. G., 66, 67, 68.
Hrŏska V., 422.
Huber I., 95.
Huler I., 93.
Hull R., 586.
Hulubei T., 141.
Hurmuzescu D., 505.
Hurwitz A. W., 29
Huyghens, 181.

Iacob C., 305, 268, 530.
Iacob St. E., 445.
Iancovici de Mirivo T., 449, 450, 451, 510.
Ianculescu S. O., 133, 150, 194, 208, 658, 660.
Ianculescu T. R., 10.
Ignat D., 208.
Ignaţiu Tr. 277, 332, 383, 610.
Ilie I. N., 297.
Iliescu Em., 95.
Iliescu Gh., 5, 11, 132, 186, 505, 581.
Iliuţă-Dăbuleni I. I., 34.
Illia A., 620.
Imbru I., 183.
Ingold L., 87.
Ioachim H., 277, 384, 652, 662.
Ioachimescu Gh. A., 11, 24, 30, 118, 195, 229, 307, 308, 505, 644.
Ioachimescu A. Gh., 11.
Ioan A. I., 24, 298, 367, 437, 506, 668.
Ioan Marcel, 520.
Ioanovici A., 5, 11, 229, 361.
Ionescu Constanţa, 109.
Ionescu M. C., 664.
Ionescu D-tru, 194.
Ionescu S. D., 383.
Ionescu V. D., 5, 11, 35, 106, 637.
Ionescu B. N. Gh., 611.
Ionescu P. H.[1], 5, 6, 11, 26, 33, 35, 37, 98, 110, 112, 144, 145, 219, 220, 223, 336, 447.
Ionescu Iancu, 60.
Ionescu Ion, 5, 11, 30, 31, 39, 40, 54, 59, 70, 79, 89, 90, 105, 107, 110, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 139, 164, 166, 169, 195, 198, 219, 222, 225, 235, 251, 254, 257, 278, 307, 308, 314, 319, 332, 334, 337, 361, 368, 733, 390, 418, 419, 422, 436, 440, 443, 446, 449, 476, 479, 498, 499, 502, 504, 508, 525, 527, 531, 554, 558, 588, 589, 612, 614, 639, 657, 664, 670.
Ionescu G. Iulian, 610, 662.
Ionescu I. L., 93, 95.
Ionescu M. G-l, 233.
Ionescu N. N., 302.
Ionescu I. P., 95, 141.
Ionescu D. St., 297, 437, 507, 611.
Ionescu V., 208, 538. 542.
Ionescu-Brezuica I., 93, 95.
Ionescu-Bujor C., 5, 6, 11, 34, 54, 149, 150, 162, 163, 167, 185, 199, 200, 207, 208, 220, 261, 262, 273, 274, 280, 281, 320, 334, 335, 383, 385, 392, 431, 432, 447, 461, 467, 502, 539, 541, 551, 553, 560, 616, 627, 645, 646, 647, 649, 650, 651, 656, 672.
Ionescu-Ţiu D. C., 5, 6, 11, 29, 35, 55, 138, 166, 336, 381, 385, 387, 389, 437, 439, 446, 505, 613, 671.
Ionescu-Zane Gh., 11.
Iordache E., 40, 150, 208.
Iosif II, 510.
Isac C. D., 264, 542.
Isărescu, 119.
Istinie-Brezuica I. C., 93, 95.
Istrati C., 11.
Iulian V. Ioniţă, 208, 376.
Ivănescu C., 98, 261, 320.
Ivanisserich L., 249.
Ivaşcu Al., 363.

Jacobi, 414, 418, 421.
Jacobi J. G. C., 79.
Jackson D., 586.
James D R., 421.
Janosi N., 617, 620.
Jareghie N. I., 440.
Jareghie V. I., 277, 297, 383, 437, 608, 610, 611, 664.
Jijie A., 11.
Jipa C. A., 40, 263, 277, 298, 332, 383, 437, 493, 552, 652, 662, 664.

1) Este acelaşi cu Ionescu-Biss P. H.

Jourdain, 523.
Jujescu I. Gh.. 93.
Julia G., 289, 587.
Jung W., 88.
Juraşcu, 58.
Jurek B., 422.

Katz P., 34, 93, 95, 142.
Katz S., 142, 253.
Kaufmann N., 11.
Kaufman S., 251, 309.
Kemény S. baron, 122.
Ketchum W. P., 421.
Kirilov Gh., 175.
Kiriţescu C., 116, 231, 587.
Kleen C. S., 304.
Klein F.. 475, 523, 586.
Klein Samoil, 509, 510.
Klima J., 304.
Kline R. J,, 29.
Klose A., 475.
Knall S., 208.
Knalt A., 150.
Kneser H., 475.
Knoll F., 88.
Knothe H., 476.
Korbein P., 476.
Kotová R., 420.
Kowalewski G., 586.
Kraitchek, 587, 639.
Krall L. H., 87, 421.
Krames J., 419.
Kran W., 476.
Kubota, 530.
Kullback S., 87.
Kummer, 414.
Kurzbeck, 450.

La Menza F., 28, 138, 249, 304.
Lagneau J., 88.
Lagrange, 68, 79, 139.
Laissant A. C., 31.
Lalescu Tr., 54, 138, 226, 230, 314, 368, 406, 506, 507, 508. 530, 650, 651.
Lambert G., 87.
Lamé G., 308.
Lammel E., 422.
Lamoth P., 11.
Laplace, 101, 197, 250, 474, 529, 556.
Lascu B., 437, 546, 551, 610, 611.
Laurent H., 79.
Lazăr Gh., 120, 121, 179.
Lăzărescu Fl. St., 93, 95.
Lăzărescu H., 440.
Lăzărescu E. I., 40.
Lăzărescu P. St., 376, 384, 437.
Lazu C., 11.
Leadbeater G. J., 420.
Leahu I. D., 208.
Lebădă I. D,, 42, 150, 261, 266, 320, 537, 538, 542, 646.
Lebesgue H., 250, 475.
Lebrun M., 419.
Leclercq Ch., 139.
Leemans J., 419.
Lefschetz S., 586.
Leftwich S. H., 420.
Legendre M. A., 65, 308, 524.
Lehmer H. D., 367.
Lehmer Emma, 87.
Leibnitz, 179, 180.
Leja, 367.
Lejeune, 414.
Lemoine E., 199, 200, 628, 630, 631.
Leonescu, 20.
Leonida D., 11. 234.
Leuco I., 154, 277, 314, 330.
Libois P., 419, 477.
Lie Sophus, 58, 79, 476.
Lindow M., 368.
Linteş I., 5, 6, 11, 51, 52, 76, 120, 132, 139, 242, 251, 274, 276, 302, 308, 366, 477.
Liois M., 88.
Liouville J., 414.
Liteanu I. Gh., 5, 12, 76, 97.
Littrow, 67.
Livada F. Gr., 12, 505.
Lob H., 420.
Lobatschewsky, 65, 66, 67, 68, 69, 414, 466, 522.
Lodge A., 29.
Longchamps G. de, 305.
Loria G., 419.
Luca L., 198.
Luca L. N., 309.
Lucas E., 52, 78.
Lukasiewicz, 421.
Lurquin C., 419.

Mac Duffee C. C., 29.
Mackinsey C. C. J., 29, 421.
Măciuca O., 93.
Mc Coy H. N., 304.
Magală I. G,, 263.
Măinescu Z. I., 297.
Malaxa Elena, 12.
Malaxa N., 12.
Malcoci C., 12.
Mamut P., 664.
Mamut I. P., 277, 332, 333, 440, 610, 652.
Mamut T. P., 298, 383, 550, 662.
Mănac M., 264, 330.
Manafu V., 12.
Mănescu C., 175, 176.
Mănescu I., 199.
Mănescu M., 314.
Mankowski T., 527.
Mannheim A., 281, 289.
Manoil E., 664.
Manoilescu M., 12, 118, 232.
Manolescu M. Em , 93.
Mansion P., 67, 68.
Mărăcine B., 12.
Marcovici E., 51, 160, 161, 274, 276, 277, 376, 379, 388, 551, 602, 611, 652, 657.
Marcu V., 309.
Mareş I. Em., 37.
Mareş T., 12, 505.
Margulius M., 37, 96, 98, 145, 199, 203, 309, 320, 436, 537.
Maria Theresia, 449, 450.
Marian I., 34, 95.
Marian V., 123, 183, 341, 418, 419, 451, 511, 620, 639.
Marin Şt., 95.
Marinescu M., 478.
Marinescu-Oran Gh., 141.
Martac V. R., 298, 441, 611.
Marteş V. Gr., 37, 44, 47, 208, 329, 541, 649, 652.
Mateescu Cr., 5, 12, 195, 368, 478.
Matei D. D., 30, 50, 107, 108, 161, 273, 298, 374, 386, 500, 611.
Măţieş V. I., 253, 323, 548.
Marvodin D. D., 43, 44, 102, 144, 145, 165, 199, 212, 217, 219, 254, 261, 269, 270, 277, 330, 331, 371, 383, 385, 440, 504, 541, 542, 550, 553, 556, 558, 597, 602, 606, 610, 646, 649, 650, 652.

Maxwel A. E., 420.
Mayer O., 79, 309.
Mazilu C. P., 37, 154, 208, 263, 264, 266, 329, 538. 541, 646, 649.
Mecu M., 276.
Melachton, 122.
Melchior E., 88.
Menciu C., 309.
Menelaus, 130, 475.
Merbl A. I., 51, 273, 653.
Mereuţă Em., 37, 218.
Mereuţă V., 12.
Metea S. V.. 263, 537.
Metzburg I. G. Ch. de, 234, 235.
Michal D. A., 304, 586.
Mihăescu S. St., 93, 253,
Mihăileanu N. N., 6, 12, 28, 55, 98, 108, 110, 138, 142, 161, 194, 196, 200, 203, 210, 233, 261, 309, 320, 335, 387, 420, 447, 478, 503, 505, 537, 587, 599, 611, 615, 631, 657.
Mihăilescu, A., 330, 376.
Mihăilescu Gh., 264.
Mihăilescu Ig. Paul, 298, 388, 440, 553
Mihăilescu P. T., 12.
Mihalcea St. D.. 40, 150, 194, 208, 264, 538, 652.
Mihalcea N. N., 298.
Mihalcea I. Oct. 537, 538.
Mihalopol C., 12.
Mihoc Gh., 218, 530, 589.
Milea G. E, 98.
Miller Norman, 421.
Milne-Thomson M.L., 420.
Milu I. N., 150, 553, 611.
Mindlin D. R., 87.
Mineur Ad., 88, 419.
Mingea N. M., 297.
Miquel, 130, 166.
Mircea M. E., 12.
Mircea N. St., 17, 57, 171, 220.
Mirea N. St., 17, 57, 230.
Mirescu P., 12, 168.
Mironescu M. C,, 231.
Mitault H., 478.
Mitescu C., 12.
Mititelu C. C., 12, 90, 369.
Mititelu C. I., 12.
Mitnimovitch S., 305.
Mitrimovitch D., 419.
Möbius, 304, 414.
Mocănescu Cr. I., 35.
Mocanu N. V., 208.
Moesner A., 249, 367.
Moisescu M., 330.
Moisil C. Gr., 95, 530, 589.
Moisiu M. C., 297.
Moisovici M. St., 51, 52, 107.
Monge, 419.
Montel P., 417, 418, 474, 506, 507.
Montessus de Ballore R. de, 476.
Mongomery Deane, 421.
Morden M., 87.
Morley, 29.
Morse M., 367, 421.
Morţun V., 226.
Murăroiu I., 35.
Mureşeanu Gh., 388.
Musca A., 620.
Musceleanu Dacia, 493, 541, 646.
Musceleanu S. Ileana. 388.
Mussel mann R. J., 305.
Myller A., 29, 30 475.

Nadolu T. A., 298, 383, 440, 499, 610.
Nagel, 320.
Năstase Gr. M., 264, 298, 330, 384, 508, 538, 553, 559, 590, 646.
Năsturaş D., 17.
Nathansohn I., 34.
Navier L., 476.
Neamţu E., 309.
Neamţu P., 13.
Nedelcu V. N., 277, 298, 383.
Nedelescu F. A., 298, 508.
Negoiţă M. V. P., 556.
Negrea A. L. M., 31, 32, 37, 50, 51, 98, 109, 150, 154, 161, 163, 194, 205, 207, 208, 215, 218, 262, 263, 265, 273, 274, 277, 309, 330, 332, 376, 384, 386, 388, 425, 431, 432, 437, 440. 441, 540, 541, 547, 551, 553, 556, 597, 599, 601, 602, 606, 610, 646, 650, 651, 652, 658, 664.
Negulescu D. Şt., 161, 211, 276, 298, 376, 437.
Negulescu A. Vl., 297.
Negura St., 13,
Neniţescu D., 477.
Neper, 235.
Nestor D., 13.
Netto, 87.
Neuberg J., 454, 588.
Neugebauer O., 411, 413.
Neuhaus W. F., 475.
Neville H. E., 29.
Newcomb S.. 251.
Newton, 51, 69, 181, 638.
Nica G., 419.
Nichifor I. Em., 419.
Nichifor A. G., 13.
Nicolae, Principe de România, 17.
Nicolaevici I. Gh., 60.
Nicolau Al., 13.
Nicolau Th. A., 34, 93, 95, 141, 142, 253.
Nicolau H. C., 13, 93, 140, 142, 309.
Nicolau T. M., 13, 672.
Nicolau-Dobridor C.I., 253.
Nicolescu S. I., 650.
Nicolescu Miron, 5, 13, 24, 119, 142, 253, 254, 418, 505.
Niculescu V. Al , 5, 13, 24, 89, 111, 224, 309, 310, 336, 377, 380, 390, 505, 525, 614, 670.
Niculescu Cr., 13, 169, 170.
Niculescu V.Gh., Lt. C-dor, 5, 13, 24, 129, 167, 194.
Niculescu G. M., 662, 664.
Niculescu Mircea, 610.
Niculescu I. R , 13.
Niewenglowski B., 80.
Nistor I. 309.
Nistorescu V. D., 277, 383.
Niţescu C. Gh., 42, 150, 542.
Noguerra R., 367.
Noordhoff P., 586.
Nordmann Ch., 70.
Nörlund, 421.

Obradovici G., 337, 338, 339, 340, 341, 508, 510.
Obretckoff N., 393, 477.
Oldenburger R., 421.
Olteanu E. St., 37.
Onicescu O., 13, 59, 132, 589.
Opran I. C., 208, 263.
Orănescu O., 5, 13, 56, 94, 334, 584.

Orăşanu D. C., 5, 13, 368, 477, 639.
Orăşanu Gr., 14,
Orghidan N., 588.
Ottulescu E., 423.
Oughtred, 179.
Ozanam, 90.

Pădureţ A. V., 161, 208, 276, 298, 383.
Paicu Gh. M., 297.
Paley C. A. E. R., 29.
Pall G., 304.
Pană Al., 443, 498, 664.
Panaitescu Sc. G-l, 14, 23, 196.
Panaitopol P., 93.
Pantazi Al., 5, 14, 59, 93, 187, 309, 474, 477, 505, 589, 621.
Pantelimon V. C., 277, 297, 332, 383, 437, 440, 610, 611, 650, 662, 664.
Pântescu C. C., 298.
Panţu Z. I., 253.
Paparizu I. G., 297, 507.
Papelier G., 126.
Papkovitch, 87.
Pappus, 439.
Parepeanu C. I., 98, 437, 438, 440, 538, 551, 597, 600, 608, 611, 650, 658, 664.
Parisot, 524.
Pârvu A., 5, 14.
Pârvu Tr., 116, 231.
Pascal, 18, 131,
Pascaru I. C., 383.
Pascaru I. I., 277, 298, 383, 610, 653, 662, 664.
Pascu V. H., 383, 437.
Pasere S. Em., 298.
Paşoi N. M., 298.
Pataky S., 121, 122.
Patraulea N., 37, 98.
Patriciu G. T., 17.
Pătroianu I. M., 141.
Paul M., 419.
Păun Gh., 309.
Păuţa M. M., 297.
Paxson W. E., 304.
Pearson K., 367.
Pedoe D., 639.
Perieţeanu D., 533.
Petcu I. V., 297.
Petersen J., 29.
Petr K., 422.
Petrescu Achile, 277, 383, 437, 441, 610, 611, 664.
Petrescu V. Anastase, 332, 440, 541.
Petrescu P. I. Benone, 298, 383, 386, 440, 602, 611.
Petrescu I. I., 107, 262, 330, 383, 529, 538, 539.
Petrescu Seb., 476.
Pefrovici M., 139.
Petrovitch T., 477.
Pfaff. 79.
Philipide M, 14.
Picard E., 102.
Piccard, 223.
Piscador J., 587.
Pithagora, 130, 410, 411, 413.
Plăcinţeanu I., 474.
Plüker, 414.
Poggendorff J. v.. 523.
Poincaré H., 69, 87.
Poinsot, 307, 414.
Poisson, 414.
Polya, 576.
Pompeiu D., 169, 195, 289, 352, 393, 399, 406, 477, 530, 655.
Poncelet, 414.
Popa A. Al., 298, 383.
Pop Gr Ilie 297.
Popa I. I., 139, 249, 474, 475, 525, 589.
Popa T. I., 250.
Popa D. M., 277, 297, 332, 383, 437, 440, 443, 445, 610, 611, 612, 650, 652, 662, 664.
Popescu Th. Al., 139.
Popescu Christiana, 139.
Popescu N. Corn., 14, 93.
Popescu V. F., 208.
Popescu Gh., 93, 95.
Popescu D. Gh., 141, 142, 524,
Popescu I. Gh G-l., 266, 415, 522, 537.
Popescu M. Gh., 298.
Popescu I., 14, 113, 114, 230.
Popescu C. I., 105.
Popescu Victor, 14.
Popescu-Botoşani G., 14, 54, 196, 305, 335.
Popescu-Zorica N. Al., 161, 298, 493, 556, 590, 611, 653, 658.
Popişca V. M., 297.
Popovăţ P., 477.
Popovici I. G., 276, 383, 385, 441.
Popovici Gavril, 277, 298.
Popovici Th. I., 34, 95.
Popovici R. L., 277, 383, 652.
Popoviciu S. D., 380.
Popoviciu I. Gavril, 139, 194, 274, 386, 498, 499, 552, 606, 611, 652, 653, 662, 664.
Popoviciu Tib., 14. 93, 95, 138, 141, 142, 152, 153, 154, 156, 167, 199, 248, 250, 417, 418, 448, 474, 504, 576, 589.
Popp N., 14.
Popp T., 14.
Portocală M. 14.
Postelnicescu C. M., 194, 210, 261, 262, 264, 277, 298, 320, 330, 380, 384, 388, 431, 508, 537, 538, 541, 590, 646, 650, 656.
Postolache V., 196, 305.
Potescu C. I., 40.
Potocki, 66.
Potopeanu Gh., 14.
Praporgescu N., 14.
Preciado I. T., 298,
Predoescu I. M., 646.
Prodan G. C., 208.
Prompt Dr., 588.
Protopopescu M. D., 332.
Protopopescu Gr. G-l, 14.
Ptolomeu, 109, 130, 181, 420.
Pungă N., 652.
Pungă A. N., 383.
Pungă I. N., 165, 610, 662, 664.
Purcariu C. I., 477, 478.
P. N., 305.

Quine V. W., 304.

Racliş R., 14, 59.
Rada T. D., 161, 208, 276, 330.
Radef A., 417.
Radianu Gh. M., 297.
Radu E., 226.
Radu I., 478.
Rădulescu Gh. Oct., 211, 277, 298, 330, 380, 385,

386, 437, 498, 507, 552, 553, 610, 611, 662.
Rainich J. G., 421.
Rajagopol C. T., 586.
Randels C. W., 421.
Randolph F. J., 29.
Rangacharian V., 421,
Rauch L. B. I., 556.
Raudenbusch W. H., 87.
Rayleigh, 476.
Rebuelto E., 586
Rees K. P., 28.
Regan F, 367.
Reinicke R., 586,
Revici T., 15.
Ricatti, 211, 212, 213, 216, 217, 218, 637.
Riemann, 67, 68, 70, 250, 476, 523.
Rinehart F. R., 304.
Rios S., 529.
Ripianu D., 332, 387, 437, 440, 551, 553, 608, 611. 662, 664.
Rizescu T. G., 93.
Rizescu T. I, 93, 142.
Rizescu S., 305.
Robbins E. H., 586.
Robertson S M., 29, 87.
Robinson M. R., 421.
Robinson T. R., 639.
Roco M, 17.
Roger P. D., 40.
Rohr I. A., 297, 440.
Rolle, 598.
Roman I. N., 208, 263.
Romaşcanu G. Georgeta, 298, 508, 552.
Roşca St. G., 98, 436.
Rosciescu F. M., 662.
Roşculeţ N. M., 420, 556, 611, 662, 664.
Rosenfeld L., 93.
Roşianu Gh., 309.
Roşu Al., 413.
Roşu Al. Al., 5, 6, 15, 93, 186, 194, 223, 248, 330, 390, 413, 504, 505.
Roşu V., 15.
Rotaru D., 493.
Rotaru G. G., 208.
Rouché E., 515, 519.
Rousse-Ball W., 413.
Ruja P., 338, 341.
Rumici A. Gh, 556, 611, 613.
Runceanu N. C., 329.
Russel A.. 420.
Russel N. H, 421.
Russu E., 310.

Şabac Gh. I., 262, 264, 538, 539, 646.
Sacchieri, 64, 65, 69.
Sacter O., 145, 212, 269, 375, 432, 544, 644, 652.
Sager N. I., 144, 150, 199, 262, 490 537, 538, 539, 646.
Şaichin O. A.. 298, 508.
Sălăgeanu A., 15.
Saligny A.. 172, 176, 177, 225, 226, 227, 228, 231.
Saligny M., 15.
Sanders T. S., 304.
Săndulache C., 77, 107, 160. 214, 218, 219, 373, 422, 443, 550, 602.
Săndulache G., 664.
Sanielevici S. 531
Săpunaru S. Gh., 15.
Sarian M., 5, 6, 15, 93, 142.
Sarkany L., 478.
Sanderson, 234.
Sauvage D. M., 308.
Savin C. I., 53, 98, 221, 501, 638, 668, 669.
Savovici F., 646.
Scabiola A C., 376.
Scărlătescu N., 477.
Schering, 68.
Schileru Dili C. I., 15, 111, 224, 280, 448.
Schmidt Fr., 67.
Schoenberg J. I., 29, 32.
Scholz E., 475.
Schönfeld H. A. 93.
Schröder, 475, 586.
Schultz G., 586.
Schultz W., 586.
Schwarz, 367.
Scodrano Al., 336, 671.
Segal J. 664.
Segre, 250, 475, 605.
Seifert L., 304, 420.
Sen N. D., 421.
Şerbănescu Gh. V., 15.
Sergescu B., 15.
Sergescu P., 5, 15, 54, 70, 123, 126, 127, 382, 417, 418, 432, 505, 558, 588, 589.
Sewel E. W., 586.
Sfinţescu I. C., 15.
Şiara I. V., 40, 150, 208, 493.
Sierpinsky W., 250, 474.
Silaş G., 37, 103, 417, 545,
Silverman L. L., 421.
Simionescu D. Gh., 5, 6, 15, 42. 47, 55, 141, 168, 195, 276, 279, 288, 374, 413, 447, 505, 599, 614, 615, 621, 637.
Simson T, 268, 303, 519, 520, 521, 522, 559.
Şincai Gh., 339, 341, 451, 510, 639.
Slught N. A., 250.
Smântânescu A., 15.
Smith E. D. 479, 531.
Smith V. E., 420.
Snyder V., 304·
Socecu V. I., 60.
Solacolu C S., 478.
Solomon I. W., 93.
Souto B. J, 251.
Spearman, 250.
Şreşefsky St. 308.
Stamatescu I. Gh., 15, 505.
Stamatescu I., 15.
Stamatiu M., 29.
Stan A. D., 16, 25, 361, 413, 476, 506, 517, 587, 588.
Stănciulescu G., 208, 263.
Stănculescu I., 211, 384, 388, 611, 658.
Stănculescu I. M., 298, 383, 611.
Stănculescu V., 383, 440, 610, 652, 662.
Steck M., 586.
Ştefan C. T., 498, 553, 664.
Ştefănescu Em., 142, 259, 310.
Ştefănescu D. N., 150, 161, 165, 211, 264, 273, 276, 277, 298, 329, 331, 378, 380, 383, 386, 388, 437, 440, 441, 506, 541, 551, 552, 553, 556, 597. 602, 606, 610, 611, 646, 650, 652, 659, 664.
Ştefănescu V. P., 332, 610,
Ştefănescu S. S., 195, 478, 530
Steidl H., 88.
Steiner, 205, 206, 207, 286, 287, 288, 414.
Stieltjes J. Ph., 529, 586.

Stoenescu I. Al., 23, 197.
Stoermer C., 57.
Stoian St. D., 437.
Stoian S. I., 211, 385, 610, 611.
Stoica Al., 93.
Stoica D. Al., 41, 42, 210, 264, 373, 538, 590.
Stoica N. Aurel, 93.
Stoica V. D., 16, 25, 581.
Stoicescu T., 16, 46, 52, 53, 103, 105, 147, 208, 270, 389, 546, 590, 649, 667.
Stoilov S., 59, 250, 530, 589.
Stokvis, 403.
Stösz O., 87.
Streder G. I., 40, 46, 263, 274, 298, 376, 388, 440, 538, 542, 552, 553, 610, 611, 662, 664.
Strohal R., 385.
Stroian G., 309.
Strom W. C., 586.
Struve O., 66.
Sturm Dupin, 414.
Sudan G., 77.
Szosz O., 87.
Szegö G., 304, 576.

Tănăsescu Al., 24.
Tănăsescu A. G-l, 16.
Tănăsescu A. I., 142.
Tănăsescu A. T., 16.
Tănasiciuc I. Cl., 437.
Tănăsiciuc V. C., 277, 298, 383, 385, 499, 662.
Tânjală Gh. Em., 383, 384, 387, 606.
Tannery J., 507.
Tarasiuc I. S., 102, 152, 154, 277.
Tarski, 421.
Tartinville A., 76.
Tătaru Fr. C., 297.
Tătaru N. N., 298, 507.
Taubeur A, 34, 93, 98, 95, 476, 506, 507, 587, 588.
Taylor, 199, 200, 645.
Tchebycheff, 586.
Teichmüller O., 475.
Temple G., 639.
Teodoreanu V., 16.
Teodorescu C. C,, 16, 29.
Teodorescu N. D., 332, 477, 602, 610, 613.
Teodorescu N., 93, 95, 196, 253, 490, 589.
Teodorescu V. N., 16.
Teohari M.. 88.
Tètrel A., 506.
Thales, 331.
Thébault V., 26, 48, 50, 57, 61, 88, 110, 132, 139, 145, 146, 222, 244, 247, 259, 265, 272, 285, 305, 320, 335, 364, 368, 371, 419, 428, 430, 431, 446, 452, 455, 461, 502, 587, 614, 629, 630, 633, 639, 661.
Theodorescu N. Dorin, 297, 383, 387, 437, 507, 522, 602, 610, 611, 664.
Theodorescu N., 422.
Theodoru H., 195, 361, 478.
Thierin H. G., 16, 308.
Thirry Cl., 196.
Thybaut A., 506.
Tică-Gall P. M., 440, 552.
Ţichindeal, 337.
Tilică C. Şt., 298, 384, 386, 440, 443, 445, 550, 552, 556, 600, 608, 611, 612, 658, 662.
Tilly M. J. de, 67, 68.
Ţino O., 5, 6, 16, 88, 187, 223, 262, 263, 264, 324, 328, 425, 490, 493, 498, 542, 544, 590, 597, 608, 609, 610, 671.
Ţiţeica Gabriela, 16.
Ţiţeica Gh., 5, 16, 30, 59, 89, 116, 118, 169, 187, 195, 248, 250, 251, 268, 406, 474, 476, 505, 508, 530, 605, 656.
Ţiţeica I. I., 42, 45, 150, 161, 186, 194, 208, 211, 219, 261, 262, 264, 268, 274, 298, 330, 380, 384, 431, 437, 525, 537, 538, 539, 541, 590, 645, 646, 650, 656.
Ţiţeica Şerban, 589.
Todd A. J., 29.
Toma I. V., 297.
Tomescu H., 383.
Tomescu St. I., 16.
Tonolo A., 529.
Toporăscu E., 90, 477, 530, 531.
Taranzos I. F., 138.
Toricelli, 180.
Tornier E., 475.
Trejo A C., 367.
Tresse A, 506.
Trofimov P., 505.
Trufin C. Tr., 297, 383, 610, 664.
Trufin D. Tr., 441.
Tudoran Cornelia, 664.
Tudoran Lidya, 498.
Tudoran M. Sonia, 332, 440, 441, 498, 608, 611, 613, 662, 666.
Tufănescu C., 368.
Tunu R. S., 440.
Turcu R. Al., 297.
Turcu I. S., 277, 383, 610, 611.
Turcu R. S., 437, 664.
Turlescu L. A., 297.
Turner S. J., 420.
Tycho de Brahe, 181.

Ulescu A., 16.
Unter B d-ra, 150, 203, 264, 538, 542.

Vahlen T., 586.
Valbreuze R de, 138.
Vâlcovici V., 16, 30, 59, 418, 530, 587.
Văleanu G. G-l., 231.
Van der Monde, 371, 570.
Van Vleck, 123, 125, 126, 127, 128, 194.
Vandiver S. H.. 421, 586.
Vardala I., 16, 118.
Varga O., 250.
Vartic G. N., 383, 610.
Vârtosu N., 309.
Vasilache I. G., 40, 263, 538.
Vasilache I., 16.
Vasilescu Al. Alexandra, 50, 105, 107, 108, 109, 160, 272, 276, 330, 332, 380, 465.
Vasilescu Fl., 309.
Vasilescu Gr., 16.
Vasilescu C. I., 16.
Vasilescu-Karpen N., 115, 195, 228, 231.
Vasilescu-Stabu A. M., 105, 276, 297, 330, 332, 383, 388, 437, 438, 440, 441, 498, 556, 610, 611, 653, 657, 664.

Vasiliu C. D., 297.
Vasiliu G. D., 17.
Vasiliu Gh., 5, 17, 111, 194, 195, 224, 328, 329, 335, 436, 447, 504, 560, 670.
Vasiliu C. I., 34, 93, 95, 141, 142, 205, 417, 425.
Vasiliù M., 17, 34.
Vasiloschi E. F., 208, 376.
Vasu V., 476.
Vauban, 182.
Vecten, 461, 465.
Vedia J. D., 367.
Velea M., 46.
Veneroni, 304.
Ver Eecke P., 419.
Vesa R. V., 297.
Vescan T., 195, 477.
Viciu A. A., 17.
Viciu E., 478, 505.
Vigarié E. 639.
Vignaux C. J., 28, 138, 195, 367, 529.
Villars G., 587.
Vişa E., 133, 216, 218, 272, 289, 297, 351, 498, 616.
Visser C., 87.
Vlad M. C., 332, 383, 388.
Vlad I. C. M., 440, 442, 498, 610, 611, 664.
Volterra, 89, 530.
Vuibert H.. 138, 149, 192, 196, 249, 273, 305, 367, 422, 454, 476, 587, 638, 668
Vusatiuc D. M., 208.
Vycicho F., 250.

Wakeford, 420.
Walfisz A., 422.
Walker T. G., 29.
Walsh L. J., 28, 421.
Ward Morgan, 87, 421.
Waring, 421.
Warschawski E. S., 367.
Wavre R., 530.
Weatherburn E. C., 420.
Weber W., 88, 475, 586.
Wegner U., 88, 475.
Weierstrass, 135.
Weiss A. E., 87, 250.
Weiss U. E., 586.
Whyburn M. W., 29.
Wilder L. R., 87.
Wibron, 588.
Windred G., 29.
Winkler E., 175.
Witting A., 368.
Woinaroski R., 5, 17.
Wolff Chr., 120, 121, 122, 123, 179, 180, 181, 182, 183.
Wolstenholme, 135.
Wong C. B., 421.
Wring, 304.
Wronsky, 570.
Wylie R. C., 367.
Wylie Jr., 421.
Wilie Shaun, 422.

Zacharias M., 475.
Zaharescu E., 274.
Zaharescu E. I., 208.
Zaharia O. N., 23, 139.
Zahradnicek J., 420, 476.
Zàk J., 420.
Zamfirescu C. Gr., 17.
Zamfirescu G. I. Lt., 203, 446, 558.
Zapan Gh., 17, 56, 132, 280, 419, 420.
Zapan Gr., 5, 6, 17.
Zgârcea T. G., 208.
Zlatcu St. C., 17.
Zolotovici I. D., 298.
Zorn M., 586.

K. UVRAJE CITATE *)

1. Cărţi şi Lucrări

Pag.

N. Abramescu . . . . . Lecţiuni de Algebră superioară 25
N. Abramescu . . . . . Introduceri în studiul geometriilor neeuclidiane . 70
N. Abramescu . . . . . Lecţiuni de geometrie pură infinitezimală . . . 289
A. Angelescu . . . . . Lecţiuni de Calcul Diferenţial 507
X. Antomari . . . . . Cours de géométrie Descriptive 506
Arnold de Port Royal . Nouveaux éleménts de géométrie 523
Arnold de Port Royal . Logique de Port Royal 523
Gh. Asachi . . . . . Elemente de matematică 26, 529
Aubert & Papelier . . . Exercices d'Algèbre 126
P. Barbarin . . . . . La géométrie non EUCLIDIENNE 70
E. Beltrami . . . . . Un precursore italiano di LEGENDE e di LOBATCHEWSKI 65
I. Bolyai . . . . . Ştiinţa spaţiilor 66, 67
G. Bouligand . . . . . Cours de géométrie analitique 507
Bourdon . . . . . Applications de l'algèbre à la géométrie . . . 394

*) In acest capitol nu sunt trecute uvrajele citate la *Bibliografii* şi la Sporirea Bibliotecei „*Gazeta Matematică*".

Pag.

M. Cantor . . . . . Geschichte der Mathematik 413
Chasles . . . . . Apérçu historique sur le développement de la géométrie 414, 631
V. Cristescu . . . . . Culegere de probleme de Trigonometrie 25, 198, 666, 667
Gh. Em. Filipescu . . . Statica şi rezistenţa 438
F. Frenet . . . . . Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal . 507
E. Froelich . . . . . Introductio facilis in Mathesin 620
F. J. . . . . . Eléments de géométrie 440
F. G. M. . . . . . Exercices de géométrie 271, 668
F. G. M. . . . . . „ „ trigonométrie 271
F. G. M. . . . . . Compléments de trigonométrie 278
A. Gérardin . . . . . Factorisations quadratiques et primalité . . . 146
M. Ghermănescu . . . Curs de algebră superioară 103, 507
J. Gooden . . . . . Trigonometria plană şi sferică 618
C. Guichard . . . . . Traité de géométrie 506
G. B. Halstad . . . . Contribuţia geometriei neeuclidiene la filozofie 69
A. V. Helfert . . . . Die Oesterreichische Volksschule 450
Houël . . . . . Notă asupra imposibilităţei unei demonstraţiuni a postulatului lui EUCLID 66
Iancovici . . . . . Anleitung zur Rechenkunst 450
N. Ianosi . . . . . Trigonometria plană şi sferică 617
A. G. Ioachimescu . . Culegere de probleme 24, 644
A. G. Ioachimescu . . . Culegere de probleme de algebră 389, 613
M. Ion . . . . . Geometria modernă 520
I. Ionescu . . . . . Beton armat 508
I. Ionescu, G. Ţiţeica, V. Cristescu, A. G. Ioachimescu . . . . . Culegere de probleme de aritmetică, geometrie, trigonometrie şi algebră 30
G. Julia . . . . . Cours de cinématique 289
F. Klein . . . . . Nicht euclidische Geometrie 523
S. Klein . . . . . Scurtă cunoştinţă a istoriei Românilor . . . 509
S. Klein . . . . . Gramatică, Logică şi Aritmetică 509
S. Klein . . . . . Aritmetica 510
T. Lalescu . . . . . Calcul algebric 54
T. Lalescu . . . . . Curs de geometrie analitică 506, 507, 508
T. Lalescu . . . . . La géométrie du triangle 650, 651
N. Lobatchewski . . . Asupra principiilor geometriei 65
N. Lobatchewski . . . Noile principii ale geometriei cu privire asupra teoriei paralelelor 65
N. Lobatchewski . . . Cercetări asupra teoriei paralelelor 65
N. Lobatchewski . . . Pangeometrie 66
N. Lobatchewski . . . Géométrie imaginaire 414

Pag.

E. Lucas . . . . . Théorie des nombres 52
T. Mankowski . . . . . Inceputurile LWOWULUI modern în arhitectură . 527
Mannheim . . . . . Principes et développements de géométrie cinématique 281, 289
P. Mansion . . . . . Métagéometrie 68
P. Mansion . . . . . Premiers principes de la métagéométrie 68
P. Mansion . . . . . Expositions des principes de la géométrie non Euclidienne 68
P. Mansion . . . . . Pour la géométrie non Euclidienne 68
Cl. G. I. de Metzburg . Institutiones mathematique 234
P. Montel . . . . . Lecţiuni despre funcţiunile aproape periodice 506, 507
O. Neugebauer . . . . Zur Geschichte des Pythagorischen Lehrsatzes . 423
B. Niewenglowski . . . Cours d'Algèbre 80
Ch. Nordmann . . . . . EINSTEIN şi universul 70
Gv. Obradovici . . . Povăţuire cătră învăţătura socoatei 337
Polya & Szegö . . . . Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis . . . 576
Riemann . . . . . Asupra ipotezelor care servesc ca bază geometriei 67
Rauché et Comberousse . Géométrie 515, 519
W. Rousse-Ball . . . . Histoire des mathématiques 413
Sacchieri . . . . . EUCLIDES ab omni noevo vindecatus 64
L. Sarkany . . . . . Geometrie. Manual şi colecţiuni de probleme pentru clasele gimnaziale superioare 478
Schering . . . . . Essai de géométrie analitique générale 68
P. Sergescu . . . . . Gândirea matematică 70
G. Sincai . . . . . Aritmetica 451
O. Struve . . . . . Pandecte 66
Ing. D. Stan & Ing. A. Tauber . . . . . Tabele pentru calculul fundaţiilor de beton armat ale stâlpilor izolaţi 506, 507
G. Sudan . . . . . Algebra şi teoria numerelor 77
J. Tannery . . . . . Leçons d'Arithmetique 507
A. Tartinville . . . . Arithmetique 76
A. Tetrel . . . . . Solutions de problèmes de mathematique . . 506
J. M. de Tilly . . . . Studiu de mecanică abstractă 67
J. M. de Tilly . . . . Incercări asupra principiilor fundamentale ale geometriei şi mecanicei 68
G. Ţiţeica . . . . . Culegere de probleme de geometrie 211, 268, 629, 656
A. Tresse & A. Thybaut . Cours de gémétrie analitique 506
H. Vuibert . . . . . Relations entre les élèments d'un triangle 149, 192, 273, 668
Ch. Wolff . . . . . Compendiu al elementelor matematicei universale 120, 121, 179, 182

Pag.

Ch. Wolff . . . . . Elementa matheseos universal 120, 123
Ch. Wolff . . . . . Anfangs-Gründe aller mathematischen Wissenschaften 121, 122
Ch. Wolff . . . . . Auszug aus dem Anfangs-Gründen aller mathematischen Wissenschaften 121
* * * . . . . . Aritmetica Moldovenească 368
* * * . . . . . Anleitung zum Rechnen 508
* * * . . . . . Anleitung zum Rechnen, zum Gebrauche der Nationalschulen in dem Königreiche UNGARN und den damit verbundenen Staaten 338
* * * . . . . . Aritmetica Germano-Română 449, 451
* * * . . . . . Aritmetica dela 1806 . . . . . 508, 509
* * * . . . . . Politechnica din Lwow, situaţia ei actuală şi trebuinţele ei 526

2. Periodice

Acta eruditorum 68
Aeronautica 24
Annalés de la Société scientifique de Bruxeles 452
Annali della R. Scuoala Normali Superiore di Pisa 289
Archiva 509
Atheneum 522
Atti di Lincei 65
Biographie universelle 524
Buletinul Societăţei Politechnice 176, 177
Buletinul Societăţei Regale Române de geografie 588
Bulletin de l'Institut roumain de l'énergie 400, 403
Bulletin de mathématiques et de physique de l'Ecole Polytechnique Roi Carol II 286, 359, 393, 400, 403, 621, 655
Bulletin Mathématique de la Société roumaine de Sciences 393, 406
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris 79, 248
Foaia Matematică 417
Gazeta Matematică 5, 9, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 40, 54, 56, 57, 59, 60 61, 70, 71, 76, 80, 81, 110, 113, 114, 116, 117, 118, 119, 120, 123, 130, 132, 133, 169, 171, 172, 186, 187, 190, 194, 204, 207, 218, 226, 232, 234, 248, 265, 270, 281, 297, 300, 301, 302, 314, 323, 336, 337, 352, 361, 362 363, 372, 406, 413, 415, 422, 424. 425, 430, 440, 449, 461, 493, 504, 505, 508, 511, 512, 513, 527, 528, 533, 535, 539, 546, 547, 548, 556, 557, 560, 581, 605, 621, 629, 630, 640, 645, 646.
Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna 522
Grunerts Archiv der Mathematik und Phisik 248
Jahrbuch 588
Journal de Mathématiques élémentaires 25, 454
Journal für die reine und angewandte Mathematik 79, 466

Pag.

Mathematica 588, 605
Mathematical Gazette 525
Mathesis 50, 68, 132, 218, 247, 431, 461, 516, 629
Mesagerul universităţei din Kazan 65
Monitorul Oficial 60
Nouvelle correspondance 68, 454
Nouvelles Annales de Matéhmatiques 135, 185, 243, 284, 285, 467
Revista geniului 76
Revista Matematică din Timişoara 50, 52, 247, 261, 320, 380, 430, 601, 602, 636, 637
Sphinx 62
Suplimentul de Exerciţii Gazeta Matematică 6, 21, 363, 660
Zeitschrift für Mathematik und Physik 307
Zentralblatt 588

L. ERATA

Pagina sau problema de îndreptat	*Pagina la care se indică îndreptarea ce trebue făcută*
Problema 3300	56
Pag. 625, 626, 630 Vol. XLI	56
Exerciţiul 219	336
Pag. 260, 261, 301, 309	392
„ 269, 370	448
„ 433	504
Problema 4796	560
Pag. 342	560
Problema 4761	616
Problema 4838	672
Problema 4839	672

M. SUPLIMENTE

Recreaţiuni Matematice. Supliment la No. 1 . . . . . 4 pagini
„ „ „ „ „ 4 . . . . . 4 „
„ „ „ „ „ 7 . . . . . 4 „
Dare de seamă asupra mesei comune dela concursul din 1937. Supliment la No. 9 . . . . . 3 „
Recreaţiuni Matematice. Supliment la No. 11 . . . . . 4 „

N. PUBLICAŢIUNI IN AFARĂ DE „GAZETA MATEMATICĂ“

N. Abramescu. — Lecţiuni de Algebră Superioară pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia V. . . . . .

V. Cristescu. — Culegere de probleme de Trigonometrie. Partea I, ediţia II revăzută şi adăugită de GH. TH. GHEORGHIU . .

Gazeta Matematică. — Supliment cu Exerciţii. Volumul III, 9 numere . . . . . 216 pagini

Dela apariţia ultimului număr, s'au pri[illegible] spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (1178, 4731, E, P); *Apostol R.* (4792, 802, 10, 16, 23); *Bodnărescu M. H.* (4773, 84, 92, 802); *Botezatu C. F.* (4573, 728, 57); *Călugăreanu D.* (P); *Cardara Gh. Gh.* (4730, 86, 97, 834); *Cetăţeanu Şt.* (4761, 89, 802, 13, E); *Florescu V.* (4577, 760, 66, 92, 803, 13, 22, 23, 28, 33, 34); *Florescu Z.* (4570); *Gavrilescu N. Const.* (4730, 88, 800, 28); *Herman Victor* (4813); *Ianculescu S. O.* (E); *Ionescu B. N. Gh.* (4802); *Ionescu N. G.* (4780); *Marcovici E.* (4636, 60, 780, 82, 842); *Mavrodin D.* (4746, 78, E); *Mihalcea V. Nic.* (4570); *Negoiţă V. Panait Locot.* (4833, P); *Nicolau Dobridor I. Locot.* (P); *Pană Alex. Subloc.* (4820); *Popescu-Zorica Al.* (4495, 575, 642, 778, 86, 92, 93, 97, 810, 16); *Segal Joe* (4570); *Stănculescu I. M.* (4816); *Thébault V.* (N, P); *Theodorescu N. D.* (2318, 4410, 776, 86, 823); *Tilică Şt.* (4792, 828); *Ţiţeica I. I.* (4776); *Zaharia O. N.* (A).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu* 1926. (Epuizată).

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN**

C. 90065